ASTRONOMIE,

[illegible]

[illegible]

ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE.

TOME TROISIEME.

ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE,

Lecteur Royal en Mathématiques ; de l'Académie Royale des Sciences de Paris ; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, &c. Censeur Royal.

SECONDE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME TROISIEME.



A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint Jacques.

M. DCC. LXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.



ASTRONOMIE.

LIVRE QUATORZIEME.

DE L'USAGE DES INSTRUMENS, & de la pratique des Obſervations.



LES deſcriptions contenues dans le livre précédent, ont dû faire connoître à peu-près l'uſage des inſtrumens d'aſtronomie. Cependant comme la pratique des obſervations ſuppoſe un grand nombre d'attentions pour vérifier & pour employer ces inſtrumens, j'ai cru devoir en traiter ſéparément dans ce XIVe Livre; je ſuivrai le même ordre que dans le Livre précédent.

Des Obſervations qui ſe font à la Lunette ſimple.

2470. L'on obſerve avec une lunette ſimple (2284) les éclipſes de lune & de ſoleil, celles des étoiles, celles des ſatellites de Jupiter. Dans toutes ces obſervations en général on peut employer également

les téleſcopes (2408); car puiſqu'il s'agit ſeulement de bien voir des aſtres, il eſt indifférent qu'on y emploie un téleſcope ou une lunette, ſi l'un & l'autre groſſiſſent également; il eſt vrai que les téleſcopes ſont plus aiſés à manier; mais les lunettes ſont plus faciles à faire, durent plus long-temps, & par conſéquent ſont plus communes que les téleſcopes.

Éclipſes de Lune.

2471. Hévélius avertit les aſtronomes de ne pas employer pour les éclipſes de lune des lunettes de 8 à 10 pieds, ou au-delà, parce que l'ombre de la terre y paroît trop mal terminée (*Selenog. pag.* 468). On a vu la raiſon de cette difficulté que l'on trouve à bien obſerver les éclipſes de lune (1788); c'eſt ce qui fait qu'on y emploie des lunettes de 4 à 5 pieds ſeulement, dont l'ouverture ſoit petite : on eſt perſuadé communément qu'il eſt difficile de faire cette obſervation mieux qu'à une minute près; cependant le P. Hell, obſervateur très-connu, & dont le témoignage eſt bien recevable dans cette matière, aſſure qu'on parvient à trouver la différence des méridens à 4 ou 5 ſecondes près, par le moyen d'une éclipſe de lune; pour cela il faut obſerver le moment où l'ombre arrive à une des taches de la lune, & il ne ſuffit pas de conſidérer l'ombre à l'endroit ſeul qui eſt le plus près de la tache, mais il faut que l'œil en parcoure la circonférence & la courbure, pour voir ſi elle forme un arc non interrompu, paſſant ſur le bord de la tache que l'on obſerve; il faut auſſi tâcher de choiſir un terme de l'ombre, c'eſt-à-dire, une circonférence d'un certain degré d'obſcurité, pour employer une ombre de la même denſité pendant toute la durée de l'obſervation; on doit choiſir les taches les plus grandes pour obſerver l'immerſion de leurs deux bords, ce qui eſt plus facile que d'eſtimer le milieu de la tache; enfin il faut obſerver au moins vingt ou trente taches différentes, dans leurs immerſions & dans leurs émerſions.

Attentions pour les obſerver.

2472. Le P. Hell trouve par ce moyen que l'éclipſe de lune du 22 Novembre 1760, obſervée à Paris par M. Meſſier, avec un excellent téleſcope de 30 pouces

de foyer, & à Vienne avec une ſimple lunette de 5 pieds, donne 56′ 13″ pour la différence des méridiens, quantité exacte, comme on le ſait d'ailleurs; cependant l'éclipſe commençoit 4′ 7″ ½ plutôt avec la petite lunette du P. Hell, qu'avec le fort téleſcope dont on ſe ſervoit à Paris, & finiſſoit 4′ 7″ plus tard; enſorte qu'on a 8′ ¼ de différence entre le réſultat du commencement & celui de la fin, quand on les conſidère ſéparément, pour en conclure la différence des méridiens en temps; malgré cette différence le réſultat moyen du P. Hell eſt à 3″ près, le même que nous avons eu d'ailleurs par un grand nombre de bonnes obſervations, qui eſt 56′ 10″, (2494). Il en eſt de même des ſatellites (2494, 2983); il peut y avoir quelque choſe à rabattre d'une préciſion ſi ſingulière, cependant la méthode que nous venons d'expliquer, mérite toute l'attention des aſtronomes. (*Ephem. aſtron. anni* 1764, *pag.* 201. & ſuiv.)

Différences que produiſent les lunettes.

2473. Lorſqu'on ſe ſert d'une lunette pour obſerver le ſoleil, il eſt néceſſaire d'employer quelque moyen pour ſe garantir de ſa trop grande lumière; je dois avertir à cette occaſion que le travail de ceux qui commencent à obſerver, eſt fort dangereux pour la vue, lorſqu'on néglige les attentions qui ſervent à la ménager. Le P. Scheiner raconte (*Roſa urſina*, *pag.* 69), que le premier inventeur des lunettes ayant voulu obſerver ſouvent le ſoleil, contracta une inflammation des yeux qui lui coûta la vie. Galilée & Caſſini devinrent aveugles ſur la fin de leur vie; il eſt très-ordinaire de voir des aſtronomes dont la vue s'eſt affoiblie, moins par l'uſage d'obſerver que par leur négligence à prendre les précautions convenables; M. de l'Iſle, au contraire, a vécu juſqu'à 80 ans, & il liſoit jour & nuit ſans lunettes.

Attentions néceſſaires aux jeunes aſtronomes.

Il eſt important de ne pas fatiguer ſes yeux par une trop forte ou trop longue attention, de ne pas regarder la lune long-temps, & ſur-tout de ne jamais recevoir dans l'œil la lumière du ſoleil, à moins qu'elle ne

ſoit ſuffiſamment affoiblie, ou par les vapeurs, ou par un corps obſcur.

Tuyaux de lunettes.

2474. Il eſt eſſentiel que le tuyau d'une lunette ſoit intérieurement norci, d'un noir qui ſoit mat, comme le noir de fumée, & ne réfléchiſſe point de lumière, car les rayons diſperſés affoibliroient l'image qui ſe forme au foyer par les rayons directs. Les tuyaux de bois formés par quatre planches minces bien aſſemblées ſont plus légers & ſujets à moins d'inconvéniens que les tuyaux de fer blanc, & on les noircit facilement avant de les aſſembler.

Autre avertiſſement.

2475. M. Caſſini dans ſon Inſtruction générale pour les voyageurs, (*Obſerv. aſtron. pag.* 57), avertit de ſe préparer toujours la veille aux obſervations importantes, comme ſi l'on vouloit obſerver la même choſe à la même heure, afin que s'il y a quelque difficulté dans l'uſage des inſtrumens, à cauſe de la ſituation de l'aſtre, de l'incommodité du lieu, ou du défaut des inſtrumens, on la puiſſe ſurmonter de bonne heure & y apporter remède; on reconnoît quelquefois l'importance de cet avis après l'avoir négligé.

Hélioſcope.

2476. Le P. Scheiner avoit employé pour obſerver le ſoleil une lunette qu'il appelloit *Hélioſcopium*, dont l'objectif & l'oculaire étoient d'un verre coloré; Hévélius en parle auſſi (*Selenog. pag.* 23); M. le Gentil (*Mém. de l'acad.* 1755, *pag.* 449), s'eſt ſervi d'un objectif verd pour regarder le ſoleil, & il y trouvoit l'avantage de diminuer la couronne lumineuſe qui borde les objets à cauſe des rayons colorés (2298); il trouvoit le ſoleil mieux terminé & le diamètre plus petit de 5″ qu'avec un objectif blanc; mais il eſt très-difficile d'avoir du verre coloré aſſez parfait pour former un bon objectif. M. le Gentil propoſe auſſi de ſe ſervir de pluſieurs toiles d'araignées couchées légérement les unes ſur les autres à l'extrémité du tuyau de l'objectif; ces toiles forment une eſpèce de voile tranſparent qui intercepte une partie de la lumière, & diſpenſe de

l'usage des verres noirs. (*Mém. acad.* 1752, *p.* 454).

2477. Les verres colorés en rouge, en jaune, en bleu ou en verd sont fort en usage ; cependant on doit craindre l'irrégularité qu'il y a presque toujours dans la matière & dans l'épaisseur de ces sortes de verres : on apperçoit des défectuosités monstrueuses quand on met ces verres sur l'objectif, comme M. le Gentil l'a éprouvé (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 451). Il vaut mieux employer des morceaux de glace de miroir que l'on peut enfumer soi-même ; on les éprouve en les plaçant sur l'objectif de la lunette, & l'on n'admet que ceux dont l'interposition n'altère point l'image du soleil. Il est vrai que l'erreur résultante de l'imperfection des verres colorés devient beaucoup moindre quand on les met entre l'œil & la lunette, mais cette erreur, quoique peu sensible, mérite encore quelque attention. (*Mém.* 1752, *pag.* 455).

Danger des verres colorés.

Manière de les éprouver.

2478. Au mois de Mars 1763, j'ai vu qu'on commençoit en Angleterre à employer un autre *Hélioscope*, pour affoiblir la lumière du soleil ; cet instrument est formé de 4 petites glaces qui par derrière ne sont point polies, renfermées dans une boîte de cuivre bien noircie, que l'on adapte au-devant des oculaires du télescope ; elles sont placées de manière que l'image du soleil arrive à l'œil après 4 réflexions, qui suffisent pour obscurcir le soleil, de manière que l'œil puisse en supporter la lumière ; cet instrument a l'avantage de donner au soleil une couleur blanche ; mais lorsqu'il y a des nuages & que le temps est changeant, on est obligé d'y substituer un verre fumé dans lequel il y ait des parties plus ou moins transparentes ; voici donc la méthode que j'ai coutume de suivre.

Hélioscope pour affoiblir la lumière.

2479. Je prens deux morceaux d'une glace mince, mais bien travaillée & bien égale d'épaisseur, je passe un des morceaux légèrement, mais à plusieurs reprises sur la fumée d'une chandelle ou d'une lampe, jusqu'à ce que dans certains endroits du verre je ne voie plus rien que la flamme de la lumière, mais que dans d'autres

Verres fumés.

endroits du verre j'apperçoive un peu les objets environnans. J'applique une bordure de carte ſur le verre fumé, je le recouvre avec le verre qui ne l'eſt pas, & je lie les bords avec du fil, du papier collé, ou de la cire à cacheter; cette méthode m'a toujours paru préférable à celle des verres colorés.

Attention pour obſerver Vénus & Mercure.

2480. M. Huygens nous avertit à la fin de ſon *Syſtema ſaturnium*, que pour obſerver les diamètres de Vénus & de Mercure, on ne doit pas négliger d'enfumer un peu l'oculaire de la lunette, pour que le diſque ſoit mieux terminé; en effet la ſurabondance de lumière fait qu'on a peine à voir leur diſque bien rond; & l'on apperçoit difficilement ſans cette précaution les phaſes de Mercure.

2481. Pour obſerver les éclipſes de ſoleil, on emploie différentes méthodes : la plus ancienne conſiſtoit à recevoir l'image du ſoleil ſur un tableau dans l'obſcurité : Scheiner, Gaſſendi, Hévélius, M. de l'Iſle, &c. s'en ſont ſervi. Pour employer cette méthode, on a une lunette mobile ſur un genou & qui paſſe au travers d'une fenêtre, dont la lumière eſt interceptée; on place un carton perpendiculairement à la direction de la lunette, à laquelle il doit être fixé; ſur ce tableau on trace un cercle de la grandeur de l'image du ſoleil, on tâche de contenir toujours cette image en dedans du cercle, en faiſant avancer la lunette; on diviſe ce cercle en 48 parties égales par le moyen de 24 cercles concentriques, on peut marquer ſur ce cercle que remplit l'image du ſoleil, les points où ſe terminent les cornes de l'éclipſe, à chaque fois qu'on obſerve la grandeur de l'éclipſe; d'où il eſt aiſé de conclure enſuite la grandeur du diamètre de la lune, ſoit par le calcul, ſoit même par une ſimple figure (*Hév. ſelen. pag.* 102).

Si l'on diviſe le cercle du tableau en degrés, & qu'on ſuſpende entre la lunette & le tableau un fil vertical dont l'ombre vienne tomber ſur le centre du cercle, on aura la ſituation des cornes de l'éclipſe par rapport au vertical; d'où l'on peut conclure leur ſituation

à l'égard de l'écliptique, & le lieu même de la lune.

2482. Lorsqu'on emploie pour observer une éclipse de soleil une lunette garnie d'un micromètre (2358), on peut faire trois sortes d'observations; 1°. l'on peut déterminer la grandeur de l'éclipse ou la partie éclairée, de momens à autres; il faut environ 4 minutes si l'on est seul, pour l'observer avec soin, pour marquer le temps de l'observation, pour l'écrire & se préparer à la suivante. L'héliomètre ou micromètre objectif sert également à observer la grandeur de l'éclipse; ces observations se calculent comme celles du commencement & de la fin d'une éclipse (1973). — Observation des éclipses avec le micromètre.

2483. L'on peut aussi mesurer la distance des cornes, ou des pointes de lumière qui sont formées par l'intersection des limbes du soleil & de la lune; il est même utile de faire alternativement ces deux opérations, mesurer la grandeur de l'éclipse, puis la distance des cornes; ensuite la grandeur de l'éclipse, &c. C'est ainsi qu'en prenant des parties proportionnelles, on trouvera pour un même instant & la grandeur de l'éclipse, & la distance des cornes; il y auroit encore plus d'exactitude si deux observateurs faisoient chacun de leur côté une des deux observations, ensorte que l'un observât continuellement la grandeur de l'éclipse, & l'autre toujours la distance des cornes : on opère plus vîte & mieux lorsqu'on ne change point d'opération.

2484. Cette manière d'observer n'est pas assez usitée pour que j'aie cru devoir en détailler les calculs, cependant elle est devenue précieuse depuis qu'elle a fait trouver l'inflexion des rayons solaires (1992).

2485. Enfin l'on peut observer une éclipse de soleil avec un quart-de-cercle, comme M. Cassini le pratiqua dans le dernier siècle, & marquer à l'horloge l'instant du passage tant au fil vertical, qu'au fil horizontal, des bords du soleil & de la lune, & des cornes de l'éclipse; on en déduira les différences de hauteur & d'azimut, (2123) la distance des cornes, & par conséquent la distance des centres du soleil & de la lune, de deux — Avec le quart-de-cercle.

manières différentes, ſoit par les paſſages des bords; ſoit par ceux des cornes de l'éclipſe.

2486. Cette méthode a ſur toutes les autres l'avantage d'éviter l'inégalité des réfractions, qui eſt fâcheuſe dans les petites hauteurs, & de faciliter les réductions qui dépendent des parallaxes, parce que la parallaxe de hauteur eſt la plus facile à calculer (1628).

2487. La principale difficulté de cette méthode eſt le changement de ſituation des cornes, qui arrive pendant l'intervalle de leurs paſſages au même fil, il eſt abſolument néceſſaire d'en tenir compte; pour cela on fait une table des différences de hauteurs obſervées ſucceſſivement pluſieurs fois entre la première corne, & la ſeconde; on voit par-là combien cette différence de hauteur augmente à chaque minute de temps, & s'il s'eſt écoulé une minute entre les paſſages des deux cornes, on diminue de la quantité trouvée la différence de hauteur obſervée, pour avoir celle qui auroit eu lieu ſi ces deux cornes avoient été obſervées au même inſtant ou qu'elles euſſent été ſtationnaires, & à même diſtance l'une de l'autre, pendant l'intervalle de temps qu'il y a eu du paſſage de la première à celui de la ſeconde.

2488. Quand on a trouvé la diſtance des centres & l'angle que fait cette ligne avec le cercle de latitude; on peut en conclure la différence de longitude & de latitude apparente entre la lune & le ſoleil (2129); par la diſtance apparente à la conjonction, on cherchera la diſtance vraie, & enfin la conjonction vraie, avec la latitude vraie au moment de la conjonction (1976).

2489. On peut faire les mêmes opérations par le moyen du réticule, en cherchant la différence d'aſcenſion droite & de déclinaiſon entre les deux cornes de l'éclipſe, d'où l'on conclud également leur diſtance.

Du commencement & de la fin.

2490. Pour obſerver le commencement & la fin d'une éclipſe de ſoleil ou d'étoile fixe par la lune, on choiſit les plus longues lunettes, qui ſont communément celles de 18 pieds, ou les téleſcopes de 2 pieds de foyer; on ne ſauroit examiner avec trop d'attention cet

inſtant

inſtant unique où le ſoleil commence à paroître entamé, celui où il ceſſe de l'être, le moment où une étoile diſparoît, & celui où elle ſort comme un éclair de deſſous le diſque de la lune; on en conclut enſuite le temps de la conjonction (1971).

Les éclipſes annulaires, ſont celles qui offrent les phénomènes les plus ſinguliers; M. Maclaurin en rapportant l'obſervation qu'il fit de l'éclipſe annulaire de 1737 (*Philoſ. tranſ. n°.* 447), aſſure que la plupart de ceux qui obſerverent cette éclipſe avec des lunettes, apperçurent lorſque l'anneau ſe ferma & que la lune ſe trouva entièrement ſur le ſoleil, une lumière partagée en différentes taches irrégulières proche du point de contact; que le bord de la lune y parut dentelé, que ces parties irrégulières y paroiſſoient en mouvement; que quand les deux diſques ſe touchèrent ils ſemblèrent s'entremêler & couler l'un dans l'autre comme deux gouttes d'eau qui ſe rencontrent & ſe raſſemblent; M. Maclaurin 15″ avant que l'anneau ſe fermât apperçut comme un point de lumière, pâle mais fort ſenſible proche du bord de la lune, qui alloit toucher le ſoleil; & ce point lumineux parut jetter deux rayons vers les cornes de la lune à l'inſtant où l'anneau ſe ferma : le Lord Aberdour vit une ligne étroite de lumière ſur le bord obſcur de la lune, ſoit avant que l'anneau ſe fermât, ſoit après que le bord de la lune eût paſſé au-delà du ſoleil. Phénomènes d'une éclipſe annulaire.

Ces phénomènes devroient, ce ſemble, avoir lieu toutes les fois que l'on obſerve le commencement d'une éclipſe de ſoleil; il ne faudroit que s'y bien préparer, & ils nous avertiroient probablement de l'inſtant ſi difficile à ſaiſir où l'éclipſe va commencer; cependant je ne crois pas que juſqu'ici aucun aſtronome ait jamais obſervé le véritable commencement d'une éclipſe de ſoleil; comme l'on n'eſt point prévenu du point où le ſoleil va paroître entamé, on n'y apperçoit l'impreſſion de la lune, que lorſqu'elle eſt déja conſidérable.

2491. On peut auſſi conclure très-exactement le

moment où une éclipse a commencé, par la distance des cornes mesurée quelques instans après le commencement, pourvu que l'on sache combien la lune se rapproche du soleil en une minute de temps. Cette distance des cornes augmente fort rapidement; car si les diamètres sont de 32′ elle est de 1′ 27″$\frac{1}{2}$ aussi-tôt que la lune anticipe seulement de 2″ sur le disque du soleil ce qui arrive à peu près en 4 secondes de temps, plus ou moins.

2492. Les appulses de la lune aux étoiles dont elle approche, peuvent s'obser er comme les éclipses de soleil, ou par des distances répétées de l'étoile à un des bords de la lune, ou par des différences d'ascension droite & de déclinaison, (2505). Il en est de m.me des conjonctions des planètes avec les étoiles. Les observations d'une éclipse ou d'une conjonction doivent toujours se réduire par le calcul, à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, & la latitude au temps de la conjonction (1971, 2152), afin de comparer les tables avec l'observation, & de trouver les différences des méridiens des pays où l'observation aura été faite; car ce sont-là les avantages de ces sortes d'observations.

J'ai parlé assez au long de l'observation des passages de Vénus & de Mercure sur le soleil (2116, 2140).

Éclipses des satellites de Jupiter.

2493. Les observations des satellites de Jupiter se font communément avec des lunettes ordinaires de 18 pieds, ou des lunettes achromatiques équivalentes; il seroit inutile d'y en employer de plus longues, cela produiroit un défaut de correspondance entre les différens observateurs, qui ne compenseroit pas le petit avantage de voir les émersions plus tard & les immersions plutôt; la plupart des astronomes n'ayant pas de plus longues lunettes, il convient, ce semble, quant à présent, de s'assujétir à la convention générale.

Nous décrirons dans le XVIIIe. livre (2987) un instrument qui est fort utile pour se préparer à observer

les éclipses des satellites, c'est-à-dire, pour savoir à quel endroit est le satellite dont on veut observer une éclipse ; au reste, il suffit de savoir qu'avant l'opposition, & pendant tout le temps que Jupiter passe au méridien le matin ou après minuit, les éclipses se font à gauche de Jupiter, dans une lunette qui renverse, c'est-à-dire, à l'occident de Jupiter ; c'est le contraire après l'opposition ; la distance du satellite par rapport à Jupiter au moment d'une éclipse, est d'autant plus grande, que Jupiter est plus près de sa quadrature.

Avant l'immersion totale d'un satellite on le voit diminuer peu-à-peu ; il est très-bon de compter les secondes de temps qui passent entre l'instant où il commence à diminuer, & celui où il disparoît totalement ; lorsqu'on sera bien assuré qu'il ne paroît plus, on quittera la lunette si l'on est seul, mais on continuera de compter jusqu'à ce qu'on soit arrivé à l'horloge ; alors on soustraira ce qu'on aura compté depuis le premier moment où le satellite a commencé de diminuer, & l'on y ajoutera le nombre de secondes qu'il a employé à diminuer, pour avoir le moment de la véritable immersion.

Les émersions des satellites demandent une attention particulière pour saisir le premier instant de l'apparition. A l'instant qu'on commence à voir poindre ou pointiller le satellite, ou à le soupçonner, on commence à compter zéro, une, deux, &c. sans quitter la lunette, jusqu'à ce qu'on soit assuré de ne s'être point trompé ; alors on va à l'horloge, & l'on soustrait ce qu'on a compté depuis le moment où l'on a apperçu le satellite jusqu'à celui où l'on est arrivé à l'horloge.

Les émersions.

2494. Le P. Hell assure que la différence des lunettes avec lesquelles deux astronomes observeroient des éclipses de satellites, & même la différente conformation de leur vue, n'empêchent point d'en conclure avec exactitude la différence des méridiens, pourvu qu'on compare entre elles autant d'immersions que d'émersions. La différence des méridiens entre Paris & Vienne en

Utilité des satellites pour les longitudes.

Autriche, se trouvoit de 55′ 35″, lorsque le P. Hell ne comparoit entre elles que les immersions du premier & du second satellite, observées à Paris avec un excellent télescope de 30 pouces, & à Vienne avec une lunette ordinaire; mais elle se trouvoit de 56′ 43″, en ne comparant que les émersions; le milieu entre ces deux résultats est 56′ 9″, quantité fort exacte, puisqu'on a trouvé, par un très-grand nombre d'observations, 56′ 10″ pour la différence de longitude entre ces deux villes (*Ephém. astr.* 1764, *pag.* 189).

Longitude de Vienne.

Différence des lunettes en temps.

Par de semblables comparaisons on détermineroit à peu-près combien de secondes une immersion doit arriver plus tard avec une lunette de 18 pieds qu'avec une lunette de dix. On a dit qu'il falloit ajouter 3″ de temps pour 2 pieds de plus sur la longueur des lunettes, lorsqu'il étoit question du premier satellite. M. le Président de Saron, ayant fait lui-même d'excellens télescopes de 12 & de 30 pieds de foyer, le premier avec 3 pouces, le second avec 6 pouces d'ouverture, a trouvé assez constamment 10″ de différence avec ces deux télescopes, en observant les éclipses du premier satellite. Cette quantité est bien plus grande pour les autres satellites (2983), & doit varier pour les lunettes de différentes longueurs, de différentes bontés, de différentes ouvertures; pour les vues plus ou moins fixes, & pour les différentes latitudes du premier satellite (2982). Voyez aussi la *Connoiss. des temps* de 1704, *pag.* 101).

Support des lunettes.

2495. Les lunettes simples & celles qui portent des micromètres, ont besoin d'être soutenues du côté de l'oculaire, par quelque support qu'on puisse mouvoir aisément, & l'on se sert communément d'un cric; c'est un instrument composé de 3 pieds, assemblés vers le haut par une tablette horizontale, ou par une pièce de bois verticale creusée en forme de coulisse; dans le milieu de cette coulisse glisse une tringle de bois ou de fer, qui se termine en haut par une traverse en forme de croix, sur laquelle on appuie la lunette.

Pour fixer la croix, ou le ſupport, à différentes hauteurs, on ſe ſert d'une vis de preſſion ; ou bien on y applique une cremaillère & une roue dentée ; on l'élève auſſi par une corde qui s'enveloppe ſur un axe placé ſur le côté, & qu'on tourne avec une manivelle ; ou bien l'on fait tendre la corde par un contre-poids ; chacun imaginera facilement une manière d'ajuſter de ſemblables machines ; & comme l'on peut auſſi s'en paſſer, je n'inſiſterai pas ſur cette partie.

2496. Mais une choſe bien importante, & que je ne puis aſſez recommander à tous les obſervateurs, c'eſt de placer toujours la lunette de manière qu'on ſoit à ſon aiſe, dans une ſituation commode, & que la lunette ait un mouvement facile ; on ne ſauroit mettre trop d'importance dans cette précaution, j'ai vu des aſtronomes habiles manquer des obſervations importantes par le défaut de ſoin dans cette partie ; il faut auſſi que les yeux ſoient bien repoſés, pour une obſervation délicate, telle qu'une éclipſe de ſatellite de Jupiter, une émerſion d'étoile ou une fin d'éclipſe de ſoleil. **Avis eſſentiel.**

2497. Lorſqu'une lunette eſt expoſée long-temps à l'humidité de l'air pendant les obſervations nocturnes, le verre ſe ternit, & l'on ne voit plus rien ; pour éviter cet inconvénient, qui eſt très-grand dans les obſervations, on peut ajuſter au bout de la lunette un tuyau de papier brouillard qui abſorbe l'humidité, & l'empêche d'aller juſqu'à l'objectif de la lunette ; il y a des temps où l'on ſera même obligé de changer plus d'une fois ce tuyau de papier. **Humidité de l'air.**

Des Obſervations qui ſe font avec le Réticule.

2498. La lunette qui porte un réticule, doit être bien *centrée*, c'eſt-à-dire, que le centre de l'ouverture de l'objectif, doit être celui de la plus grande épaiſſeur du verre, afin que le rayon principal, ou l'axe optique de la lunette paſſe par le centre de l'objectif ;

ſans cela le mouvement de l'aſtre au travers de la lunette ſeroit inégal, & les meſures priſes en différens points du champ de la lunette, ne ſeroient pas les mêmes. Pour concevoir l'effet d'un verre mal centré, imaginons un objectif dont on a coupé la moitié ; la plus grande épaiſſeur ſe trouvera au bord du verre, de même que l'axe principal autour duquel toutes les images doivent être égales, également diſtinctes, également lumineuſes.

Première méthode pour centrer les verres.

2499. Si l'on expoſe au ſoleil un objectif convexe des deux côtés, & qu'on faſſe réfléchir l'image du ſoleil ſur les objets voiſins, on voit deux images ; la plus vive doit être au centre de celle qui eſt la plus grande & la plus pâle ; ſi elles ne ſont pas exactement concentriques, c'eſt une preuve que le verre eſt mal centré ; on peut alors prendre un cercle de carton qui ſoit ouvert circulairement, & le promener ſur l'objectif juſqu'à ce que l'ouverture tombe ſur une partie de verre qui ſoit bien centrée, & l'on ſe ſervira ſeulement de cette partie de l'objectif ; le foyer de réflexion de la ſurface concave ayant le même axe que le foyer de réflexion de la ſurface convexe, on eſt sûr que le verre eſt bien centré.

Seconde méthode.

2500. Si l'on place un objectif à l'extrémité d'un tube bien rond, & qu'on faſſe faire au verre un demi-tour ſur ſon axe en regardant un objet terreſtre, l'objet ne doit pas changer de place ; il paroîtra toujours au même point des fils du réticule, ſi l'objectif eſt centré ; s'il ne l'eſt pas, on le ſcellera avec de la cire molle au bout d'un tube plus étroit que le verre, de manière qu'il puiſſe changer de place ; on fera tourner le tube, en donnant ſucceſſivement différentes ſituations au verre ſur le tube, & l'on verra celle qui eſt néceſſaire pour que la portion du verre, qui répond à l'ouverture du tube, faſſe un objectif bien centré : ce ſera la partie du verre dont il faudra ſe ſervir.

Troiſième méthode.

2501. La parallaxe optique dont M. Bouguer a beaucoup parlé (2599), fournit un troiſième moyen de centrer une lunette. On pointera ſur un objet fort éclatant ;

& ayant fixé la lunette dans une situation invariable ; on enfoncera l'oculaire, autant qu'il sera possible, sans cesser d'appercevoir l'objet ; on le retirera ensuite autant qu'on le pourra, toujours sans que la lunette varie ; si dans ce mouvement de l'oculaire l'objet que l'on regarde paroît toujours sur le milieu des fils, & que la parallaxe optique se fasse autant d'un côté que de l'autre, on sera assuré que le verre est bien centré ; car les deux images que l'on verra dans ces deux situations, étant nécessairement sur l'axe optique principal, ne peuvent être toutes deux sur le milieu de la lunette, à moins que l'axe optique ne concoure avec le rayon moyen, ou avec l'axe du cône de lumière que donne la lunette, (M. Bouguer, *figure de la Terre*, *pag.* 212).

2502. Enfin, on peut centrer des verres en rendant leur épaisseur circulairement égale, comme nous l'avons dit pour les lunettes achromatiques (2503) ; car si un verre est tourné bien rond, & que son épaisseur prise circulairement, soit toujours la même à égale distance du centre, on est sûr que le verre est centré. Quatrième méthode.

2503. Il est utile à un astronome d'avoir une LUNETTE D'ÉPREUVE, bien centrée, qui porte deux carrés aux extrémités de son tube, & qui puisse servir à vérifier divers instrumens ; cette lunette d'épreuve (*fig.* 198), peut s'appeller aussi *Lunette centrée*, *Lunette contre-pointée* ; les tasseaux carrés *C* & *D* doivent être exactement égaux, rectangles, avec leurs faces opposées parallèles & bien dressées ; l'objectif doit être si bien centré, que la ligne *AB* passant par la croisée des fils, réponde au même point, lorsqu'on place la lunette sur chacune de ses deux faces à volonté. Ceux qui font les instrumens d'astronomie, ont sur-tout besoin de cette lunette d'épreuve, dont nous parlerons plus d'une fois (2555, 2569, 2595). Lunette d'épreuve. *Fig.* 198.

2504. Le réticule (*fig.* 138), dont nous avons déja parlé (2350), sert à déterminer la différence d'ascension droite & la différence de déclinaison entre une étoile & une planète, dont on veut connoître la posi- Du réticule simple. *Fig.* 138.

tion, entre deux planètes, comme dans les paſſages de Vénus ſur le ſoleil (2136), ou entre une tache & le bord du ſoleil & de la lune (3137).

Dans ces ſortes d'obſervations nous appellons *Fil équatorial* ou *Fil parallèle*, (on ſous-entend *à l'équateur*), celui qui eſt dans la direction du mouvement diurne, & qu'on doit faire parcourir à l'un des aſtres que l'on obſerve; le *Fil horaire* eſt celui qui eſt perpendiculaire au mouvement diurne, & placé dans le plan d'un cercle de déclinaiſon.

Attentions qu'éxige le réticule de 45°.

On doit être d'abord fort attentif à mettre le réticule au foyer de l'objectif, pour éviter totalement la parallaxe optique de l'image (2599). Il eſt auſſi trèsnéceſſaire que le réticule ſoit placé dans la direction exacte du mouvement diurne; c'eſt-à-dire, qu'un des aſtres décrive le parallèle ſans le quitter le moins du monde, car toute l'erreur ſe trouveroit ſur la différence d'aſcenſion droite; il y a des moyens d'éviter cette condition (2130, 2509), en y ſuppléant par le calcul; mais il ne faut y avoir recours que quand il eſt difficile de faire autrement.

Il faut abſolument vérifier les angles d'un réticule, avant que de s'en ſervir; pour cela on trace des angles de 45 & de 90°, avec exactitude ſur un grand carton, qu'on place à une diſtance conſidérable; en regardant ces lignes dans la lunette, on voit ſi tous les fils du réticule ſe confondent exactement avec les lignes qu'on a tracées; la co-incidence doit avoir lieu dans tous les ſens.

Converſion du temps en degrés.

2505. La différence des temps écoulés entre le paſſage de deux aſtres au fil horaire du réticule, doit ſe convertir en degrés pour former la différence d'aſcenſion droite entre les deux aſtres (88, 212, 877); mais la manière de faire cette converſion exige des attentions (953): ſi l'horloge eſt réglée ſur le premier mobile (955), c'eſt-à dire, ſi elle fait 24 heures juſtes entre deux paſſages d'une étoile au méridien, & que les deux aſtres ſoient fixes, comme ſont deux étoiles,

il

il suffit de convertir le temps à raison de 15 degrés par heure, c'est le cas le plus simple; mais si l'horloge ne fait pas exactement 24 heures dans l'intervalle du retour d'une étoile au mériden (2613), il faudra faire cette régle de trois : le nombre d'heures, de minutes & de secondes que fait l'horloge entre deux passages de l'étoile d'un jour à l'autre, est à 360°, comme le nombre d'heures, de minutes & de secondes écoulées entre les passages des deux astres, est au nombre de degrés, minutes & secondes, qui sont la différence d'ascension droite entre les deux astres observés.

Si l'on règle son horloge sur le soleil, on sera obligé de prendre pour second terme de la proportion précédente, la somme de 360° & du mouvement propre en ascension droite, qu'a eu le soleil dans l'intervalle des deux passages, qui ont servi à connoître le mouvement de l'horloge.

2506. Si l'horloge suit exactement le temps solaire moyen, il suffira de convertir le temps en degrés, à raison de 360° 59′ 8″3 pour 24 heures, ou 15° 2′ 27″ 8 pour chaque heure. Si l'horloge retardoit de deux secondes par jour sur le mouvement moyen, il faudroit réduire le temps observé en temps moyen, & y faire une petite correction, en disant, par exemple, pour une heure $24^h : 2'' :: 1^h : 0'', 08$ que l'on ajoute à l'intervalle d'une heure compté sur l'horloge à pendule, & l'on trouve $1^h\ 0'\ 0''\ 08$ de temps moyen. On peut aussi ajouter 1″ 26, c'est-à-dire, $1''\frac{26}{100}$, ou $1''\frac{1}{4}$ pour chaque heure, à la différence d'ascension droite en degrés, ou les retrancher si l'horloge avance de 2″ par jour; ce sera le double si l'horloge avance de 4″, & ainsi de suite; l'on aura également par ces deux méthodes les degrés qui répondent à un intervalle de temps. Cas où l'horloge avance.

2507. La différence d'ascension droite ainsi trouvée en degrés, minutes & secondes, s'ajoute à l'ascension droite de l'astre qui a passé le premier, pour avoir celle de l'astre suivant. Si l'un des astres a un mouve-

ment en aſcenſion droite, & que l'autre ſoit fixe; on aura par l'opération précédente l'aſcenſion droite de la planète pour le moment où elle a paſſé au fil horaire du réticule.

Du cas où les deux aſtres ſont mobiles.

Lorſqu'on a obſervé la différence d'aſcenſion droite entre deux planètes qui ont chacune leur mouvement, par exemple, Mercure & le Soleil, on n'a qu'à convertir le temps en degrés (2505), ſans égard aux deux mouvemens; on ajoutera cette différence d'aſcenſion droite à celle du ſoleil calculée pour le moment de ſon paſſage (906) ſi le ſoleil a paſſé le premier, & l'on aura l'aſcenſion droite de Mercure au moment où Mercure a paſſé. En effet, l'obſervation nous donne la différence entre le point du ciel qu'occupoit le ſoleil à ſon paſſage au méridien, & le point où étoit Mercure lorſqu'il y eſt venu à ſon tour, ce ſont les ſeuls points dont on ait beſoin, & l'on peut ſuppoſer qu'ils ſont fixes pendant toute la durée de l'obſervation. Dès que le ſoleil a paſſé au réticule, il n'importe plus pour cette obſervation qu'il ait un mouvement, ou qu'il n'en ait point, & dans l'inſtant où Mercure y arrive, il eſt égal qu'il ait eu auparavant, ou qu'il doive avoir enſuite un mouvement quelconque, on a toujours ſa poſition pour le moment même du paſſage de Mercure, par le moyen de la poſition qu'avoit le ſoleil quand le ſoleil paſſoit au réticule.

2508. Pour trouver la différence de déclinaiſon entre les deux aſtres qui ont paſſé au réticule, il ſuffit d'obſerver les paſſages aux fils obliques, & de convertir l'intervalle en arc de grand cercle, & l'on a la diſtance de chaque parallèle au centre du réticule (2352).

Cas où le réticule a une ſituation quelconque.

2509. Il y a des cas où l'on n'a pas le temps de placer le fil du réticule exactement dans la direction du mouvement diurne, & de le faire ſuivre par un des deux aſtres, ce qui exige un tâtonnement quelquefois aſſez long; on peut alors recourir à la méthode ſui-

vante, que M. Cassini & M. de l'Isle employèrent autrefois, & que M. Zanotti a publiée le premier (*Comm. inst. bon. Tom. II, part. 3, pag. 75*).

Soit la route d'un astre ou son parallèle *BAD*, (*fig.* 146), *AC* le fil horaire du réticule, qui devroit être placé suivant *Ca*, perpendiculairement à la route *BD*; *BC* & *DC* les deux obliques, dont la position devroit être *Cb* & *Cd*, si le réticule étoit exactement disposé dans la direction du mouvement diurne; on observera les passages d'un astre en *B*, *A*, *D*, & l'on en conclura les intervalles de temps *BA* & *AD*, que j'appelle *m* & *n*, alors on aura la perpendiculaire *Ca*, ou la différence de déclinaison entre l'astre observé & le centre du réticule, $= \frac{m^2 n + n^2 m}{m^2 + n^2}$, qu'il faudra réduire en degrés de grand cercle; & la quantité *A a* sera $= \frac{m^2 n - n^2 m}{m^2 + n^2}$. Cette quantité ajoutée au temps du passage de l'astre en *A*, dans le cas où *BA* est plus grand que *AD*, donnera le passage en *a* sur le vrai cercle horaire *Ca*, qui passe au centre *C* de la lunette. Ayant ainsi les passages de chacun des deux astres par le fil horaire *Ca*, l'on en conclura la différence d'ascension droite (2505). Lorsqu'il s'agit du soleil, on peut aussi employer la méthode de M. de Fouchi, (2130) & se passer des fils obliques. *Pl. XVI. Fig. 146.*

2510. On pourroit observer des différences d'ascension droite & de déclinaison entre une planète & une étoile, sans le secours d'aucun réticule ni micromètre, si l'on avoit seulement un diaphragme ou cercle de carton au foyer des verres, bien rond & bien terminé; les temps que la planète & l'étoile employeront à le traverser, convertis en degrés & multipliés par le cosinus de la déclinaison seront les valeurs des cordes décrites; connoissant deux cordes d'un cercle, il est aisé de connoître leur intervalle qui est la différence de déclinaison des deux astres, comme la différence des temps où ils ont été au milieu de ces cordes est la différence d'ascension droite.

Il ſeroit bien utile que les curieux qui ont tant de loiſir, & qui ſouvent jouiſſent d'un ſi beau ciel vouluſſent paſſer quelques ſoirées à chercher de temps en temps des comètes, & les comparer à des étoiles par une méthode auſſi commode. Cette branche de l'aſtronomie ſera des progrès rapides, ſi ce genre de curioſité peut ſe répandre un jour parmi les gens qui ont des connoiſſances & de l'émulation.

Difficulté de voir les fils.

2511. Dans l'uſage des réticules & des micromètres on eſt ſouvent obligé d'éclairer les fils pour les appercevoir, & c'eſt une choſe aſſez embarraſſante dans les obſervations; ſi l'on éclaire trop, on ceſſe d'appercevoir les petites étoiles; ſi l'on éclaire trop peu les fils ne paroiſſent pas; ſi l'on éclaire le haut de la lunette en faiſant tomber la lumière ſur l'objectif, il faut que la lumière ſoit à l'abri du vent, qui en agitant la flamme produit une parallaxe dans les fils & fait vaciller dans la lunette l'image de l'objet. Il y a des aſtronomes qui éclairent les fils par une ouverture pratiquée vis-à-vis de l'oculaire, mais les fils éclairés de côté paroiſſent alors d'une forme différente par un reflet de lumière qui eſt ſouvent irrégulier.

2512. On éviteroit bien de l'embarras ſi l'on parvenoit à voir les fils, même dans l'obſcurité; cela eſt poſſible pourvu que l'on obſcurciſſe l'obſervatoire & que l'œil deſtiné à regarder dans la lunette ne voie jamais la lumière; il ne doit pas même ſervir à regarder l'horloge; c'eſt l'autre œil avec lequel il faut regarder le cadran & écrire l'obſervation, & celui-ci même ne doit jamais voir directement la lumière. Ces attentions ſont difficiles à obſerver, mais quand on s'y eſt plié par habitude, on en eſt bien dédommagé par la facilité que l'on trouve dans les obſervations des plus petites étoiles.

Fig. 147.

Vérification du rhomboïde.

2513. Après avoir parlé de l'uſage du réticule de 45°, je paſſe à l'uſage du réticule rhomboïde (*fig.* 147), qui a été expliqué ci-deſſus (2353) : il y a trois vérifications à faire dans un réticule rhomboïde, car il

faut reconnoître 1°, si les deux fils *EF*, *BD*, sont à angles droits; 2°, s'ils sont exactement les deux diagonales du parallélogramme *BEDF*, 3°, si l'une des diagonales *BD*, est exactement double de l'autre; toutes ces vérifications sont essentielles pour un observateur qui se propose d'employer un semblable réticule; pour y parvenir on doit tracer en grand, mais avec soin, un réticule semblable sur un mur éloigné, sur un carton, ou sur une planche; en examinant cette figure avec la lunette, on voit si les lignes qu'on a tracées correspondent exactement à celles du réticule, & l'on parvient ainsi à connoître les défectuosités de celui-ci, pour y avoir égard dans le calcul. *Fig.* 147.

2514. Lorsqu'on emploie le réticule dans une observation, on doit d'abord s'assurer que l'un des astres parcourt exactement le parallèle *EF*, sans le quitter le moins du monde, depuis son entrée dans la lunette en *K*, jusqu'au moment où il se cache en *E* sous la lame du réticule; si l'astre ne suit pas bien exactement le fil on tournera la vis qui est ordinairement dans la boîte du réticule, & qui lui donne un petit mouvement de rotation, pour faire incliner le fil jusqu'à ce que l'astre le parcoure exactement. Cette inclinaison se produit par le moyen de quelques dents qui sont ordinairement à la circonférence du chassis du réticule, ou d'une vis comme dans la *fig.* 163: si l'on n'a pas un réticule denté & propre à un semblable mouvement, on peut incliner la lunette jusqu'à ce que l'astre en parcoure exactement le fil, ou bien qu'elle aille de l'angle *F* à l'angle *E*.

Le réticule étant ainsi disposé dans la direction du mouvement diurne, on compte exactement le temps qu'une étoile emploie à aller de *F* en *E*; on le convertit en degrés (2505), pour avoir l'arc de l'équateur ou l'angle au pole qui répond à *EF*, & l'on multiplie cet arc par le cosinus de la déclinaison de l'astre pour avoir l'arc de grand cercle *EF* (892).

Trouver la grandeur du réticule.

2515. EXEMPLE. Le 14 Novembre 1763 au ma-

tin, voulant comparer Mercure avec l'épi de la Vierge, je trouvai que l'étoile en parcourant le fil équatorial *FE*, étoit en *F* à 5^h 22′ 12″ & en *E* à 5^h 25′ 24″; ainsi elle employoit 3′ 12″ à aller de *F* en *E*; je convertis cette quantité en degrés, j'ai 48′ 0″, c'est l'arc de l'équateur qui passoit pendant le temps que l'étoile alloit de *F* en *E*; je multiplie cette quantité par le cosinus de 9° 55′ déclinaison de l'épi de la Vierge, j'ai 47′ 17″ valeur de l'arc *EF*, qui est la largeur de mon réticule, & en même temps sa hauteur *BM*, qui est égale à la base (2353).

Trouver la différence de déclinaison.

2516. Pour connoître la différence de déclinaison entre les deux astres observés au réticule rhomboïde en *d* & en *m*, on convertira en degrés chacun des intervalles de temps que les astres ont mis à traverser le réticule, on multipliera chacun de ces intervalles par le cosinus de la déclinaison de l'astre auquel il appartient; la somme des produits se retranchera de la longueur du réticule ou de *BD*, & l'on aura la différence de déclinaison *dm*. Si les deux astres ont passé du même côté ou dans le même triangle *BEF*, on multiplie également les intervalles de temps par le cosinus de la déclinaison de chaque point, & l'on retranche l'un de l'autre pour avoir la différence de déclinaison. Si le réticule n'a qu'environ un degré de largeur, on peut employer le cosinus de la déclinaison moyenne entre celles des deux astres.

2517. Règle générale. On prendra la somme ou la différence des intervalles de temps employés à traverser le réticule, convertie en degrés & multipliée par le cosinus de la déclinaison moyenne; si c'est la différence, on aura sans autre calcul la différence de déclinaison; si c'est la somme, on la retranchera du double de la largeur du réticule, pour avoir la différence de déclinaison.

2518. Exemple. Après avoir observé l'épi de la Vierge en *F* & en *E* (2515), j'observai Mercure en *f*, à 6^h 15′ 4″ & en *e* à 6^h 17′ 9″, la différence 2′ 5″

convertie en arc, donne 0° 31′ 15″; multipliant par le cofinus de 9° 55′ qui eft la déclinaifon de l'étoile, on a 30′ 47″ pour l'arc *ef*, ou *Bd* qui retranché de 47′ 17″= *BM*, donne 16′ 30″ pour la différence de déclinaifon *dM*, entre Mercure & l'épi de la Vierge.

De-là il fuit que dans le cas où l'étoile avoit paffé au centre *M*, il fuffifoit de retrancher du temps par *EF*, le temps par *ef*, ou 2′ 5″ de 3′ 12″; car le refte 1′ 7″ étant converti en temps & multiplié par le cofinus de la déclinaifon donne 16′ 30″ qui eft la différence de déclinaifon *Md*, que l'on cherche.

Des obfervations précédentes il eft aifé de conclure que l'épi de la Vierge étoit au milieu *M* du réticule, à 5^h 23′ 48″, & Mercure en *d* à 6^h 16′ 6″ $\frac{1}{2}$, la différence 52′ 18″ $\frac{1}{2}$ étant convertie en degrés (à raifon de 23^h 55′ 50″ pour 360 degrés (2506), je fuppofe que l'horloge retardoit de 14″ par jour; on a 13° 6′ 54″ différence d'afcenfion droite entre Mercure & l'épi de la Vierge, le 13 Novembre 1763 à 18^h 16′ 6″ de temps vrai. Différence d'afcenfion droite.

Nous parlerons ci-après des corrections qu'il faut faire dans certains cas, à ces fortes d'obfervations, à raifon des parallaxes (2539) des réfractions (2546). Corrections.

Des Obfervations qui fe font au Micromètre.

2519. Le micromètre (2358) détermine les différences de déclinaifon bien plus exactement que le réticule, parce qu'il ne fuppofe pas la mefure du temps. Il fert auffi à mefurer la plus courte diftance d'un objet à l'autre, par exemple celle de Mercure & de Vénus au bord le plus proche du foleil (2131); on peut même l'employer à mefurer des différences d'azimut (2123); pourvu qu'il y ait un niveau fur le micromètre; & cela peut être utile dans des obfervations qui fe feroient fort près de l'horizon, où les différences d'azimut font préférées, comme n'étant point affectées de réfractions. Ufages du Micromètre.

Parallélisme des fils.

2520. Le premier examen qu'on doit faire dans un micromètre, conſiſte à rendre le curſeur exactement parallèle au fil fixe, & à rendre le fil horaire exactement perpendiculaire aux deux autres; cela ſe peut faire aiſément par le moyen de deux lignes exactement perpendiculaires l'une à l'autre, tracées à une grande diſtance de la lunette, comme nous l'avons indiqué pour le réticule (2504).

Erreur de l'index.

2521. On doit examiner enſuite le premier point de la diviſion, c'eſt-à-dire, le nombre de parties que marque le micromètre quand le curſeur eſt confondu & réuni avec le fil fixe; c'eſt ce que nous appellons *erreur de l'index*; on eſt obligé de la connoître exactement pour en tenir compte dans toutes les obſervations, car l'index ne marquera la vraie diſtance des fils, que dans le cas où il marquoit zéro, quand cette diſtance étoit nulle; s'il marquoit 10″, dans ce cas-là, il faudra retrancher 10″ de toutes les meſures priſes avec le micromètre. Pour connoître cette erreur, il ne s'agit que de réunir exactement les deux fils, & de voir ce que l'index marque, plus ou moins que zéro, & ce ſera l'erreur, ſouſtractive s'il marque plus, additive s'il marque moins.

Méthode pour la connoître.

2522. Dans les micromètres où les fils ne peuvent concourir enſemble, & ne font que ſe toucher, il faut voir ce que marque l'index, quand les fils commencent à ſe toucher le plus légérement, en retrancher encore le nombre des parties qui répondent à une épaiſſeur de fil (2536), & l'on aura la quantité de parties que l'index auroit marquées ſi les fils euſſent pu concourir l'un ſur l'autre.

M. Bradley avoit obſervé que dans un micromètre les fils en ſe touchant exactement l'un & l'autre s'uniſſent par une eſpèce de cohéſion ou d'attraction, qui les retient unis quelque temps, lors même qu'on détourne la vis; enſorte qu'on les voit enſuite ſe quitter ſubitement, & avec une eſpèce de ſecouſſe. Pour éviter l'erreur qui naît de cette attraction, il faut éviter de

faire

faire toucher les fils, & il faut déterminer le commencement de la division & l'erreur de l'index par une autre méthode que celle de rapprocher les fils l'un contre l'autre, j'ai oui dire à Londres que M. Bradley se servoit de la méthode suivante.

2523. Soient *A* & *B* (*fig.* 199), deux mires placées à une distance quelconque; *BC* le fil fixe du micromètre placé sur la mire *B*, & *AD* le fil mobile placé sur la mire *A*; on examinera le nombre des parties indiquées par le micromètre; je suppose qu'il soit de 124, c'est-à-dire, un tour de vis & 24 centièmes : on changera ensuite la position du micromètre, en mettant le fil mobile *AD*, sur la mire *BC*; & le micromètre étant fixé invariablement dans cette situation, on fera mouvoir le curseur jusqu'à ce qu'il atteigne la mire supérieure; on examinera les parties que marque alors le micromètre, & si l'on trouve exactement le double de ce qu'on a trouvé dans la première opération, par exemple, 248; on sera sûr qu'il n'y aura rien à ajouter pour l'erreur du commencement de la division, & que l'index seroit à zéro exactement, si les centres des deux fils pouvoient concourir l'un sur l'autre; si l'on ne trouve que 238, c'est-à-dire, 10 de moins que le double de 124, ce sera une preuve qu'il y a 10 parties pour l'erreur & qu'elle est soustractive : en effet la distance des mires n'étant véritablement que de 114, comme le prouve l'espace parcouru par le curseur; le micromètre ne devoit marquer que 114 dans la première situation, au lieu de 124 qu'il marquoit; ainsi l'on ôtera 10 parties de toutes les mesures prises avec ce micromètre, & réduites au centre du fil.

Autre manière de la connoître.

2524. J'ai oui dire qu'en mesurant le diamètre de la lune ou du soleil avec un micromètre, M. Bradley étoit dans l'usage de rendre les deux fils tangentes intérieures au limbe, ensorte qu'au-dehors de chaque fil on commençât d'appercevoir un filet de lumière; dans ce cas, il faut ajouter au nombre des parties qui marquent la distance des deux fils, la valeur d'une épaisseur

de fil, pour avoir le nombre qui s'obſerveroit ſi chaque bord du ſoleil étoit ſur le centre de chaque fil. Cependant je préfère de rendre les deux fils tangentes extérieures aux bords de l'aſtre que je meſure ; cela me paroît plus facile & plus exact ; je diſtingue mieux l'attouchement quand je vois le diſque entier hors des fils, & la rondeur du diſque me fait appercevoir, ce ſemble, avec une très-grande préciſion ſi le fil mord ſur le diſque, ou s'il en eſt éloigné. Dans ce cas, il faut ôter des parties du micromètre l'épaiſſeur d'un fil (2536), afin d'avoir la quantité de parties que marqueroit le micromètre, ſi les bords du ſoleil étoient exactement ſur le milieu de chaque fil ; il faut y appliquer enſuite l'erreur de l'index (2521).

Souſtraire l'épaiſſeur du fil.

Evaluer les parties du micromètre.

2525. L'intervalle des pas de vis, qui dans un micromètre ſert à meſurer les petits angles, étant ſuppoſé le même, il répond à un plus petit nombre de ſecondes, ſi la lunette eſt plus longue ; en effet l'intervalle *GF* (*fig.* 143) étant ſuppoſé de 2 pouces & l'angle *GAF* d'un degré, cette même étendue de 2 pouces portée à une plus grande diſtance du point *A*, ne rempliroit pas l'angle *GAF*, elle formeroit un plus petit angle.

Fig. 143.

Première méthode.

Si l'on meſure avec grand ſoin la diſtance *AB* qu'il y a entre le verre & les fils du réticule, en y ajoutant le tiers de l'épaiſſeur du verre ; & qu'on meſure auſſi la demi-diſtance *BF* des fils quand l'index marque un nombre donné, on pourra dire $AB : BF :: R :$ tang. *BAF*, & l'on aura en minutes & ſecondes la valeur des parties du micromètre qui répondent à *BF* (M. Caſſini, *p.* 125).

Seconde méthode.

2526. La ſeconde méthode pour connoître les parties du micromètre eſt celle du temps ; on connoît le diamètre du ſoleil par le temps qu'il emploie à traverſer le méridien (894, 1383), on meſurera ce diamètre en parties du micromètre, & l'on ſaura combien les parties du micromètre valent de minutes & de ſecondes.

2527. On peut y employer auſſi une étoile obſervée dans le crépuſcule, qu'on fera mouvoir le long d'un des

fils du micromètre ; les autres fils étant écartés d'une certaine quantité de parties du micromètre, marquées par l'index, on obſervera le temps que l'étoile emploie à aller d'un fil à l'autre, on convertira ce temps en ſecondes de degrés (2505) ; on multipliera les ſecondes par le coſinus de la déclinaiſon de l'étoile (892), & l'on aura l'arc de grand cercle qui répond aux parties du micromètre.

2528. Lorſqu'on ne veut point employer la meſure du temps, ni la meſure du foyer d'une lunette, pour trouver la valeur des parties du micromètre, on eſt obligé de meſurer une baſe ; mais on a rarement beſoin d'en venir-là, puiſque le diamètre du ſoleil eſt connu aujourd'hui avec la plus grande préciſion (1388). Troiſième méthode.

2529. En expliquant cette méthode, je prendrai pour exemple l'opération par laquelle je déterminai les diamètres du ſoleil avec plus de préciſion qu'on ne l'avoit encore fait; ſavoir, de 31′ 30″ ½ en été. Je meſurai l'étendue de la rue de Tournon, en face de l'obſervatoire que j'occupois, en employant les grandes perches qui avoient ſervi à la baſe de Villejuif (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 176) ; ayant abaiſſé un à-plomb, du haut de mon obſervatoire, & nivellé la rue avec ſoin, je trouvai 915 pieds ¾ de diſtance. Je plaçai à l'extrémité de la rue ſur le mur de la maiſon qui fait face au Palais du Luxembourg, une règle *AB* de 9 pieds miſe exactement d'à-plomb, avec deux mires *A* & *B*, c'eſt-à-dire, deux cartons ſur leſquels il y avoit un cercle noir avec un cercle blanc dans le milieu. Leur diſtance ayant été trouvée exactement de 8 pieds ⅓, & l'abaiſſement *HLA*, au-deſſous de l'horizon de 2° 36′, on trouve par le calcul du triangle *ALB*, que la diſtance *AB* des mires devoit paroître ſous un angle de 31′, en ſuppoſant 915 pieds ¾ entre les objectifs de la lunette & le plan des mires. Je meſurai exactement leur diſtance en parties du micromètre, & je trouvai 4930 ou 49 tours de vis, & 30 centièmes ; telle étoit la valeur de l'angle de 31′ ; ainſi il eſt certain que quand la

Meſure d'une baſe.

Pl. XXIX. Fig. 200.

lune paroîtra ſous le même nombre de parties, & qu'elle ſera compriſe entre les mêmes fils, ſon diamètre apparent ſera auſſi de 31′, pourvu que le micromètre n'ait pas changé de place & qu'il ſoit toujours à la même diſtance des objectifs de la lunette. C'eſt ainſi que j'ai trouvé les diamètres du ſoleil (1388).

Dans le calcul précédent la baſe étoit aſſez longue pour que le foyer des objets terreſtres fût ſenſiblement le même que celui des aſtres, enſorte que je voyois les mires fort diſtinctement, ſans allonger ma lunette & ſans changer la ſituation des fils; à la rigueur il auroit fallu l'allonger de 12 lignes $\frac{3}{5}$; mais ſur un foyer de 9 pieds, le changement d'un pouce eſt peu ſenſible dans les lunettes ordinaires.

2530. M. Bouguer en traitant des différentes images qui ſont diſtribuées le long de l'axe d'une lunette, évalue l'eſpace dans lequel elles ſont à peu-près de même force, à un peu moins de la moitié de l'intervalle compris entre les extrêmes, lequel eſt de $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$ du foyer (*Figure de la Terre*, *pag.* 204). Le P. Pézenas (*Mém. de Marſeille*, *année* 1755, *pag.* 105), dit qu'en obſervant ſur terre un objet placé à 443 toiſes avec une lunette de 15 pieds, l'image reſtoit tout auſſi diſtincte dans un eſpace de plus d'un pouce. Mais quoique l'image ſoit très-diſtincte, la meſure de l'objet en parties du micromètre va ſans ceſſe en diminuant quand on enfonce l'oculaire; car l'image *GF* (*fig.* 143), priſe un peu plus près de l'objectif *A*, y eſt néceſſairement un peu plus petite; ainſi quand on change la longueur de la lunette, on ne peut plus compter ſur la valeur des parties du micromètre, quand même la clarté de l'image ſeroit la même.

Fig. 143.

Cas où la baſe eſt trop petite.

2531. Si la baſe dont on ſe ſert n'eſt pas aſſez grande, c'eſt-à-dire, ſi l'image des mires n'eſt pas très-diſtincte & très-nette en laiſſant l'oculaire au point qui lui convient pour les objets céleſtes, & ſi pour la bien voir on eſt obligé de retirer l'oculaire un peu plus que

pour les objets céleſtes, on aura pour la meſure de l'objet un trop grand nombre de parties. Dans ce cas-là voici le procédé que l'on ſuivra : on placera l'oculaire au point où l'image des mires eſt la plus diſtincte ; & l'on aura la longueur du foyer pour les mires, ayant trouvé la meſure en parties du micromètre, on dira *la diſtance des mires aux fils du micromètre, eſt à la diſtance des mires à l'objectif, comme le nombre de parties qu'on vient de trouver eſt à celui qu'on auroit au foyer des rayons parallèles.* On cherchera enſuite exactement le point où il faut placer les fils, ou la quantité dont il faut repouſſer les fils pour qu'ils ſoient exactement au foyer des rayons parallèles, par le moyen de cette proportion : *la diſtance des mires aux fils du micromètre eſt à leur diſtance à l'objectif, comme la longueur du foyer pour les mires, eſt à celle du foyer des rayons parallèles* ; on verra de combien de lignes ce nouveau foyer eſt plus court que celui des objets terreſtres, & l'on enfoncera exactement de cette quantité le tube du micromètre quand il s'agira d'obſerver les aſtres; alors le nombre de ſecondes qui répond à un tour de vis augmentera en raiſon inverſe de la longueur du foyer.

Dans l'exemple précédent, je ſuppoſe que l'oculaire de la lunette ait été placé au point où l'image des mires étoit la plus diſtincte, & qu'on ait trouvé 1296 lignes pour la longueur du foyer, on dira 924 $\frac{3}{4}$ ſont à 915 $\frac{3}{4}$ comme 1296 lignes qui ſont le foyer de la lunette, ſont à 1283,4, qui ſont le foyer des rayons parallèles, plus court de 12 lignes $\frac{6}{10}$ ou 12 lignes $\frac{3}{5}$ que le précédent : il faut dans ce cas rapprocher de l'objectif le micromètre & la lunette, & cela de 12 lignes $\frac{3}{5}$ pour obſerver les aſtres ; alors les parties du micromètre diminuent dans le même rapport. Si l'on peut voir aſſez diſtinctement les objets terreſtres avec la diſpoſition de l'oculaire qui convient aux aſtres, on peut ſe paſſer de ces opérations ; mais quand on ſe ſervira des lunettes achromatiques (2298), il ſera abſolument néceſſaire de faire ces calculs, parce que leur foyer n'a

point cette étendue le long de l'axe, qu'on obſerve dans les lunettes ſimples. Les micromètres appliqués aux quart-de-cercles, ſe vérifient par la même méthode.

2532. Pour connoître ainſi par le moyen d'une baſe la valeur des parties d'un héliomètre (2435), il eſt encore plus eſſentiel d'allonger la lunette de la quantité convenable à la diſtance terreſtre ; & quoique l'on pût voir les objets très-diſtinctement ſans retirer l'oculaire, on trouveroit une erreur très-conſidérable dans la valeur des parties ; en effet les différentes images des objets que l'on regarde, étant diſtribuées ſur un eſpace de 2 à 3 pouces, le long de l'axe d'une lunette de 18 pieds ; l'oculaire vous fera voir l'image qui eſt à 18 pieds, quand il s'agira d'un objet céleſte, & celle qui eſt à 18 pieds 2 pouces quand vous regarderez un objet terreſtre ; dans le dernier cas les deux images anticiperont l'une ſur l'autre, quoique les deux autres qui ſont à 18 pieds de foyer ne faſſent que ſe toucher, parce qu'elles ſont plus petites. Il eſt donc néceſſaire d'employer la proportion précédente (2531) pour trouver la quantité dont on doit allonger la lunette en regardant les mires ; cette quantité étoit de 4 pouces pour un héliomètre de 18 pieds & une baſe de 915 $\frac{3}{4}$ (2529).

2533. Je ne parlerai pas ici de la manière de trouver la valeur des parties du micromètre objectif appliqué à un téleſcope, le calcul en eſt extrêmement compliqué ; on peut conſulter là-deſſus le Mémoire du P. Pézenas. Je dois ſeulement obſerver qu'il y a des aſtronomes qui ſe ſont trompés en croyant que la baſe qui ſert à évaluer les parties d'un micromètre devoit ſe compter depuis l'oculaire ; on peut voir la démonſtration que j'ai donnée pour l'héliomètre ſimple dans les Mémoires de l'académie 1760, *pag.* 50. Il s'agit ſurtout de concevoir que le même écartement des verres de l'héliomètre, & le même nombre de parties du micromètre meſurent le diamètre d'un aſtre, & celui d'un

objet terreſtre qui a le même diamètre vu du centre de l'objectif & non pas vu du foyer de la lunette.

2534. Il eſt vrai que l'image d'un aſtre qui a 30′ de diamètre, ne ſe forme pas au même point que celle d'un objet terreſtre qui paroît ſous un angle de 30′, mais cela n'empêche pas que les deux bords ne ſe touchent dans chacune de ces deux images; les angles qui ſe forment à ces deux foyers différens ne ſont pas les mêmes, il eſt vrai, mais ils appartiennent à deux objets qui vus du centre de l'objectif paroîtroient ſous le même angle, & dont le diamètre eſt repréſenté par le même écartement des objectifs & le même nombre des parties du micromètre.

2535. La méthode que j'ai indiquée pour connoître les parties du micromètre (2529), ſert à vérifier les pas de la vis, & à connoître leurs inégalités; car ſi l'on place quatre mires qui ſoient éloignées l'une de l'autre de la même quantité, & qu'on meſure leurs diſtances à la première mire en parties du micromètre; on verra ſi ces diſtances ſont exactement du même nombre de parties, comme elles doivent l'être ſi la vis eſt par-tout d'un pas égal.

Épaiſſeur des fils.

2536. Cette méthode ſert auſſi à connoître l'épaiſſeur des fils, car ayant rendu l'un des fils tangente intérieure à l'un des cercles qui ſervent de mire, & enſuite tangente extérieure; le changement de l'index indiquera la valeur de l'épaiſſeur du fil qu'on eſt obligé d'ajouter dans certains cas au diamètre meſuré entre les fils (2524), & à la hauteur méridienne du bord du ſoleil (2581).

On doit meſurer le diamètre horizontal.

2537. Pour connoître les vrais diamètres du ſoleil & des autres aſtres, il faut, tant qu'on le peut, meſurer les diamètres dans le ſens horizontal, parce que les diamètres verticaux ſont diminués par l'effet de la réfraction, & les diamètres inclinés le ſont auſſi plus ou moins (2246); on a auſſi à craindre les ondulations de l'air & les décompoſitions de rayons, qui ſe font

de bas en haut, & qui affectent un peu les diamètres verticaux.

Augmentation du diamètre vertical.

2538. M. Bouguer fut étonné en 1748 la première fois qu'il observa le soleil avec son héliomètre, de trouver le diamètre vertical du soleil plus grand que le diamètre horizontal, quoique par l'effet des réfractions il dût être plus petit ; & il pensa que cela pouvoit venir de ce que le bord supérieur paroît élevé par les rayons violets, les plus réfrangibles de tous, tandis que le bord inférieur est vu principalement par les rayons rouges qui sont les moins réfrangibles, & qui s'étendent vers le bas de la partie inférieure du disque solaire, (*Mém.* 1748, *pag.* 32).

Différence entre le Parallèle apparent & le Parallèle vrai.

Remarques sur le parallèle apparent.

2539. En observant les taches de la lune (3189), ou la différence d'ascension droite entre la lune & une étoile qui la suit ([a]), on est obligé de faire parcourir au bord de la lune le fil parallèle à l'équateur ; mais à cause du changement vrai de déclinaison de la lune & du changement de la parallaxe en déclinaison, il arrive que le fil décrit par le bord de la lune, n'est point parallèle à l'équateur ; & il faut faire une double correction à la différence d'ascension droite & de déclinaison. J'appelle donc *Parallèle apparent* la trace que suit la lune, où la direction du fil qu'elle parcourt dans la lunette, & *Parallèle vrai* celui qu'elle suivroit si pendant le temps qu'elle emploie à traverser la lunette, elle ne changeoit point de déclinaison, & que son mouvement fût exactement parallèle à l'équateur ; de même j'appelle *Cercle horaire apparent* celui qui est perpendiculaire à la trace apparente ou observée, & *Cercle horaire* vrai

([a]) Si l'étoile précède la lune, c'est l'étoile qui parcourt le fil & la différence des parallèles vrai & apparent devient indifférente.

vrai celui qui feroit perpendiculaire au véritable parallèle, & qu'il s'agit de trouver. Soit *DE* (*fig.* 201), un arc d'un degré pris fur l'équateur, & qui paffe en quatre minutes de temps, *LB* une portion du parallèle qui traverfe le cercle horaire dans le même temps : fuppofons que la lune pendant ces quatre minutes fe foit éloignée de l'équateur de la quantité *BC*, ou par le changement de la parallaxe, ou par celui de la déclinaifon vraie, elle fe trouvera en *C* au lieu de fe trouver en *B*, & elle aura parcouru l'efpace *LC* au lieu du parallèle *LB*; cet arc *LC* eft le parallèle apparent, & l'arc perpendiculaire à *LC* eft le cercle horaire apparent, c'eft celui par rapport auquel on fe trouve avoir mefuré la différence d'afcenfion droite, quand on a dirigé le fil du réticule fur le parallèle de la lune ; l'angle que font entre eux ces deux cercles, eft l'angle *CLB* du parallèle vrai & du parallèle apparent, c'eft cet angle qu'il s'agit de trouver. M. Mayer a donné une formule pour cet effet, dans fon mémoire fur la libration, mais il me paroît s'être trompé ; en voici une qui eft exacte.

Planc. XXIX. Fig. 201.

2540. Si *LB* eft le parallèle vrai de la lune dans l'efpace de quelques minutes, *L* fon lieu apparent dans le vertical *DL* au premier inftant, *LB* étant tirée parallèlement à *DE*, le point *B* feroit le lieu apparent de la lune dans le vertical *EB*, fi la parallaxe de hauteur & la déclinaifon vraie de la lune n'euffent point changé ; mais fi la parallaxe de hauteur a diminué de la quantité *BA*, la lune, au lieu de décrire le parallèle *LB*, a décrit le parallèle apparent *LA* qui fait avec le premier, un petit angle *ALB*, dont nous devons chercher la valeur. Je négligerai ici le changement de la parallaxe d'afcenfion droite dans le même efpace de temps, parce que ce changement ne pouvant altérer *BL* que d'une très-petite portion, il n'en réfulteroit fur l'angle *BLC* qu'une partie encore plus négligeable. Le finus de l'angle *BLC* eft égal à $\frac{BC}{BL}$ (3613), ou parce que les petits

Première caufe de différence.

Fig. 201. arcs ſont égaux à leurs ſinus, l'angle lui-même exprimé en décimales du rayon ſera $\frac{BC}{BL}$; *ABC* eſt égal à l'angle parallactique, on mettra à la place de *BC* ſa valeur *AB* coſ. *B* (3611); à la place de *AB* qui eſt le changement de la parallaxe de hauteur, on mettra ſa valeur en ſecondes $= \frac{p. \, dh. \, \text{ſin.} \, h}{57^{\circ}}$ (1631) *dh* étant le changement de la hauteur de la lune; à la place de *dh* on mettra *BL* ſin. *B*; enfin l'on multipliera par 57° pour convertir en ſecondes (3359), & l'on aura *p*. ſin. *h*. ſin.
Sa valeur. *B* coſ. *B* pour la valeur de l'angle cherché *ALB* exprimé en ſecondes.

2541. Je ſuppoſe, par exemple, que la parallaxe horizontale de la lune le 20 Octobre 1763 à 6^h 30′ du ſoir étoit de 54′ 2″, ſa diſtance au méridien 75°, la déclinaiſon 5° 36′, la hauteur 14°, & l'angle parallactique *B* 40° 57′ (1036); on ajoutera le log. ſin. de 14°, ceux du ſinus & du coſinus de 40° 57′, & celui de 54′ 2″ ou 3244″, on aura le logarithme de 6′ 28″ qui eſt l'angle cherché *ALB*.

On trouveroit à peu-près le même réſultat en calculant la parallaxe de hauteur pour deux inſtans, éloignés, par exemple, de 4′ l'un de l'autre; car alors l'arc *LB* ſeroit de 3600″ environ, le changement *AB* de la parallaxe de hauteur pris dans les tables, feroit trouver *BC*, & par conſéquent l'angle *BLC*; nous ferons uſage de cette correction (3189).

2542. Je joins ici une petite table des angles du parallèle vrai avec le parallèle apparent, à raiſon de la parallaxe, à différentes diſtances du méridien, pour la latitude de Paris, en ſuppoſant la lune dans l'équateur & ſa parallaxe horizontale de 60′. Cette table ſervira dans bien des occaſions, où il ſuffit d'avoir cet

0^h	0′ 0″
1	8 13
2	12 33
3	12 30
4	9 31
5	5 2
6	0 0

angle à 4 minutes près, ſans craindre plus de 1″ d'erreur ſur les différences d'aſcenſions droites obſervées en degrés, en ſuppoſant la différence de déclinaiſon d'environ un quart de degré; car 15′ ſin. 4′ = 1″. L'on comprendra par la table précédente & par l'exemple ci-deſſus, que la hauteur de la lune peut varier de 28°, ſans faire varier de plus de 12 à 13 minutes l'angle dont il s'agit, puiſqu'à 3^h la hauteur étoit de 28°, & qu'elle étoit nulle à 6^h.

Erreur qui peut en réſulter.

2543. Le parallèle apparent diffère auſſi du parallèle vrai, à raiſon du changement de la déclinaiſon vraie de la lune. La déclinaiſon de la lune change quelquefois de près de 6° par jour, enſorte qu'au lieu de parcourir le parallèle *LB* (*fig.* 201), dans l'eſpace de 4′ de temps, elle parcourra *LA*, & la différence *BC* ſera alors de 1′ de deg. Pour trouver en général la valeur de l'angle *ALB*, je prends la quantité moyenne du mouvement horaire de la lune en aſcenſion droite, qui eſt de 33′, je les retranche de 15° qui eſt le mouvement de la ſphère en une heure, & j'ai 867′ pour le mouvement de la lune par rapport au méridien; ainſi *LB* que je ſuppoſe parcouru en une heure ſera 867′ coſ. déclin. & ſi l'on appelle n le mouvement diurne en déclinaiſon, on aura $\frac{n}{24}$ pour le petit changement *BC* en une heure de temps; l'ange *BLC* en minutes de degrés eſt égal à $\frac{BC}{BL}$ multiplié par 3438′, que contient l'arc égal au rayon (3359); donc l'angle $BLC = \frac{3438\, n}{24 .\, 867 .\ \text{coſ. décl.}} = \frac{\frac{1}{6} n}{\text{coſ. décl.}}$, c'eſt-à-dire, la ſixième partie des minutes du changement diurne de la lune en déclin. diviſée par le coſinus de la déclin. de la lune, qui donne l'angle cherché en minutes.

Seconde cauſe de différence.

Fig. 201.

Mouvement de la ſphère en une heure.

2544. Pour appliquer ces deux équations à l'angle de poſition, on ſe ſervira des mêmes dénominations que dans les art. 1036, 1886, en appellant l'angle de poſition *Oriental*, quand le cerle de latitude eſt à l'orient du cercle de déclinaiſon vers le nord.

Règle pour ſes deux équations.

La première partie de la correction (2540) qui dépend de la parallaxe ſera orientale, & le cercle horaire apparent

ſera à l'orient du cercle horaire vrai vers le nord, tant que la lune n'aura pas paſſé le méridien, ou ſera dans l'hémiſphère oriental; elle ſera occidentale dans l'hémiſphère occidental.

La ſeconde partie ſera orientale quand la lune par ſa déclinaiſon ſe rapprochera du pole ſeptentrional; car alors le cercle de déclinaiſon apparent ſera plus à l'orient que le cercle de déclinaiſon vrai, vers le nord, il fera un angle oriental, en vertu de la dernière équation $\frac{\frac{1}{6} n}{\text{coſ. décl.}}$, c'eſt-à-dire, que cette ſeconde correction ſera orientale; ce ſera le contraire quand la lune tendra vers le midi.

2545. On prendra la ſomme de ces deux équations quand elles feront toutes les deux orientales, ou toutes les deux occidentales, ſinon on prendra leur différence, & l'on aura la correction totale. Cet angle de correction doit ſe retrancher de l'angle de poſition ou de l'angle du cercle de latitude, & du cercle de déclinaiſon vrai (1036), ſi les deux angles ſont de même dénomination; l'on aura l'angle du cercle de déclinaiſon apparent avec le cercle de latitude, dont on a beſoin; on prendra leur ſomme, ſi l'un des angles eſt oriental, & l'autre occidental : nous en ferons uſage (3189).

Equation pour la réfraction.

2546. Le parallèle vrai diffère encore du parallèle apparent, à raiſon de la réfraction (2160) qui change pendant le temps que l'aſtre emploie à traverſer la lunette; cela arrive ſur-tout quand l'on compare une planète à une étoile près de l'horizon (2250), comme dans la plupart des obſervations de Mercure. Je prendrai pour exemple les obſervations faites avec le réticule; ayant cherché dans les tables combien la réfraction en hauteur change dans l'intervalle de temps que l'aſtre met à parcourir la demi-largeur *MF* du rhomboïde (*fig.* 202), je prends *FH* égale à cette quantité, enſorte que *MH* ſoit le parallèle vrai, & *MF* le parallèle apparent ſur lequel eſt dirigé le loſange; l'obſervation nous donne la différence des paſſages ſur le cercle horaire apparent *MB*;

Fig. 202.

il faut les avoir fur le cercle horaire vrai MC, fur lequel devroit être dirigé le rhomboïde, fi dans la pratique on n'étoit pas obligé de s'affujétir au parallèle apparent.

2547. Soit $BM = d$, le finus de l'angle parallactique $= s$, fon cofinus $= t$; le changement de réfraction qui a lieu pour un degré de hauteur $= r$; la différence des paffages au cercle horaire apparent & au cercle horaire vrai, c'eft-à-dire, en B & en C fera en fecondes $\frac{2\,r\,t\,s\,d}{3600 \text{ cof. décl.}}$.

2548. Cette équation s'ajoute à l'afcenfion droite obfervée en B quand la planète monte, & qu'elle eft au midi du centre M de la lunette, ou quand elle defcend & qu'elle eft au nord.

2549. La correction de la déclinaifon eft égale à $\frac{r\,t\,t\,d}{3600}$ qu'il faut ajouter dans tous les cas à la différence de déclinaifon BM, parce que la réfraction accourcit toujours les diftances. Je donnerai dans les mémoires de l'académie la démonftration de ces formules, qui eft facile à déduire de ce qui précède.

DES OBSERVATIONS QUI SE FONT AVEC LE QUART-DE-CERCLE.

2550. Les hauteurs apparentes des aftres au-deffus de l'horizon font les premières obfervations que l'on faffe (22), & elles pourroient fuffire feules dans prefque toutes les recherches d'aftronomie; ainfi le quart-de-cercle eft le plus important, le plus univerfel, le plus fimple de tous les inftrumens (2117). Après la defcription que j'en ai donnée ci-deffus (2311), il ne me refte qu'à en expliquer les vérifications & l'ufage; je fuppoferai auffi la connoiffance du micromètre qu'on y applique ordinairement, & que j'ai décrit fort au long (2366).

La première vérification que l'obfervateur doit faire dans un quart-de-cercle, confifte à voir fi le fil du mi- Vérification du fil horizontal.

cromètre qui doit être horizontal, n'eſt point incliné à l'horizon; pour cela on tirera une ligne verticale ſur un mur éloigné, au moyen d'un fil à-plomb, & une perpendiculaire à cette verticale; on dirigera la lunette du quart-de-cercle ſur ces lignes, & l'on verra ſi le fil horizontal n'eſt point incliné par rapport à la ligne horizontale; il y a ordinairement dans les micromètres des vis (2376, 2378), par le moyen deſquelles on corrige cette inclinaiſon, tant pour le fil fixe que pour le fil mobile.

Le paſſage des étoiles par le méridien ſert auſſi à reconnoître ſi le fil eſt bien horizontal; car ayant dirigé dans le temps du crépuſcule le quart-de-cercle dans le méridien, & vers une des étoiles qui ſont à peu-près dans l'équateur, il faut que pendant une ou deux minutes, l'étoile ne ceſſe d'être coupée exactement en deux parties égales par le fil, & de le parcourir, ou qu'elle s'en écarte également, & dans le même ſens, avant & après le paſſage au fil du milieu.

Commencement de la diviſion.

2551. Lorſque la lunette d'un quart-de-cercle eſt pointée à l'horizon, ſa hauteur étant zéro, le fil à-plomb doit tomber ſur le commencement de la diviſion des hauteurs; lorſqu'on diviſe un inſtrument pour la première fois, il ſeroit très-bon de chercher un point dans l'horizon par le moyen d'un bon niveau (2398); on pointeroit la lunette ſur cet objet, & marquant ſur le limbe l'endroit où bat le fil à-plomb, on auroit le commencement de la diviſion. Celui qui conſtruit un quart-de-cercle peut auſſi chercher le commencement de la diviſion par l'opération du renverſement que nous allons expliquer.

Vérification par le renverſement.

2552. Lorſque l'inſtrument eſt diviſé, l'aſtronome qui en veut faire uſage doit néceſſairement le vérifier par le renverſement pour ſavoir ſi l'axe de la lunette fait exactement un angle de $90^\circ\ 0'\ 0''$ avec le rayon qui paſſe ſur le premier point de la graduation des hauteurs. La vérification par le renverſement, conſiſte à meſurer la hauteur d'un objet à peu-près horizontal,

avec le quart-de-cercle droit & renverſé, c'eſt-à-dire, le centre étant ſucceſſivement en haut & en bas; la moitié de la différence ſera l'erreur du quart-de-cercle. Soit *OC* (*fig.* 203), la lunette du quart-de-cercle pointée ſur une mire *M*, ou ſur un objet quelconque, ſitué vers l'horizon; ſuppoſons que dans cet état le fil à-plomb *CBP* tombe ſur le point *B* du quart-de-cercle, au lieu de tomber ſur le point *A*, qui eſt le commencement de la diviſion, l'arc *AB* ſera la hauteur apparente de l'objet *M*, indiquée par la diviſion. *Fig.* 203 & 204.

On renverſera le quart-de-cercle, c'eſt-à-dire, qu'on mettra en bas le centre *C*, & la lunette *OE* (*fig.* 204), le commencement *A* de la diviſion étant en haut, & la lunette *OE* à même élévation au-deſſus du ſol que la lunette *OC*, dans la première obſervation, (2554); l'on pointera la lunette *OE* ſur le même objet, & l'on ſuſpendra le fil à-plomb avec de la cire ſur un point *D* de la diviſion, tel que ſa partie inférieure vienne battre ſur le centre *C*, c'eſt-à-dire, ſur le point où le fil étoit ſuſpendu dans la première ſituation; l'arc *AD* marquera la hauteur de l'objet, ou ſa dépreſſion au-deſſous de l'horizon; ſi cet arc *AD* n'eſt pas égal à l'arc *AB* (*fig.* 203), qui marquoit la hauteur de l'objet dans la première ſituation, la moitié de la différence ſera l'erreur de l'inſtrument. En effet, ſi dans la première opération l'on a trouvé la hauteur de l'objet de $1^\circ\ 20'$ égale à l'arc *AB*, & que dans l'autre on ait la hauteur $1^\circ\ 24'$ égale à l'arc *AD*; il eſt évident qu'en éloignant de $2'$ le point *A* de la lunette *O*, l'on aura $1^\circ\ 22'$ dans les deux cas, comme cela doit être ſi le rayon qui paſſe au point *A* fait véritablement un angle droit avec l'axe optique de la lunette. On ſentira facilement que le premier point de la diviſion *A* étant trop près de la lunette ou du point *O*, eſt auſſi trop près du point *B*, ou du fil à-plomb dans la *fig.* 203, ainſi la hauteur *AB* priſe dans la ſituation naturelle du quart-de-cercle paroît trop petite. C'eſt le contraire dans la *fig.* 204; le point *A* étant trop près du point *O*,

Fig. 203 & 204. se trouve trop éloigné du point D, où est suspendu le fil à-plomb qui bat sur le centre en C, ainsi l'arc AD qui indique la hauteur de l'objet, est trop grand, de la même quantité qu'il étoit trop petit dans le cas de la *fig.* 203, parce que le point du limbe où répond le fil dans les deux situations est placé précisément en sens contraire par rapport au commencement A de la division; il est plus près de la lunette O, dans la *fig.* 203, & plus loin dans la *fig.* 204.

2553. Si l'objet M est à peu-près dans l'horizon, on pourra se servir du micromètre (2366) pour mesurer ces hauteurs; on suspendra le fil à-plomb au centre; on inclinera le quart de-cercle jusqu'à ce que le fil suspendu sur le centre vienne pendre exactement sur le premier point de la division; on fera mouvoir le curseur du micromètre jusqu'à ce qu'il atteigne l'objet M (*fig.* 203), & l'on aura ainsi le nombre de minutes & de secondes qui marque sa hauteur apparente sur le quart-de-cercle. Le quart-de-cercle étant renversé (*fig.* 204); on suspendra le fil sur le premier point de la division A, on inclinera le quart-de-cercle jusqu'à ce que le fil vienne pendre exactement sur le centre C, & l'on mesurera encore la hauteur de l'objet avec le micromètre; la différence entre ces deux hauteurs sera le double de l'erreur de l'instrument : par exemple, je suppose que le quart-de-cercle étant droit il a fallu faire descendre le curseur du micromètre à 600 parties pour mesurer la hauteur de l'objet, ce qui donne la hauteur de 600 parties au-dessus de l'horizon, & que dans le renversement il a fallu le faire descendre seulement de 400, la moitié de la différence est 100; c'est l'erreur qu'il faut ôter de toutes les hauteurs observées quand le quart-de-cercle est droit.

Dans le cas où l'on voudroit corriger l'erreur trouvée, par le moyen de la vis du chassis dormant (2374), on élévera le fil mobile au-dessus du fil fixe de 100
Fig. 159. parties, & mettant la clef sur le cadran en N (*fig.* 159), on fera remonter le fil fixe jusqu'à ce qu'il concoure

exactement

exactement avec le fil mobile ; on mettra enſuite les deux index *A* & *I*, exactement ſur zéro, & l'on ſera ſûr que les hauteurs meſurées avec le quart-de-cercle, ſe trouveront plus petites de 100 parties qu'elles n'étoient auparavant.

2554. J'ai dit que pour cette vérification, il falloit que la lunette fût à même hauteur au-deſſus du ſol où l'on eſt, dans les deux poſitions du quart-de-cercle (2552); car comme l'objet n'eſt jamais à une diſtance infinie, ſa hauteur ſeroit différente dans les deux ſituations, ſi la lunette étoit plus ou moins élevée ; ainſi quand la lunette ſera renverſée (*fig.* 204), il faudra élever le pied de l'inſtrument, & au moyen d'une règle faire enſorte que le centre de l'objectif de la lunette ſoit préciſément auſſi haut que dans la première ſituation (*fig.* 203).

La lunette doit être à même élévation.

Fig. 204.

Fig. 203.

Si l'on ne peut pas commodément élever le quart-de-cercle, on meſurera la quantité dont la lunette ſera plus baſſe dans le renverſement, auſſi bien que la diſtance de la mire *M* à l'objectif de la lunette, & réſolvant le triangle donné par ces deux lignes, on trouvera l'angle qu'il faut ajouter à la hauteur de la mire obſervée dans le premier état, pour avoir la hauteur qui devroit avoir lieu dans le renverſement, indépendamment de l'erreur du quart-de-cercle ; & c'eſt cette hauteur corrigée qu'il faut comparer avec celle qu'on aura effectivement obſervée dans le renverſement.

On peut auſſi éviter ce calcul en plaçant deux mires en *M* & en *N*, c'eſt-à-dire, deux objets remarquables, qui ſoient l'un au-deſſous de l'autre, préciſément de la même quantité que la lunette eſt plus baſſe dans une des ſituations ; on pointera ſur la mire la plus élevée *M*, quand la lunette ſera la plus haute ; mais on pointera ſur la mire inférieure *N*, dans le renverſement ; alors tout ſe fera comme s'il n'y avoit qu'une ſeule mire, & que la lunette eût été miſe à la hauteur de la mire *M* dans les deux ſituations.

Manière d'y ſuppléer.

2555. Il eſt néceſſaire pour la ſûreté & l'exacti-

Dernier point de la diviſion.

tude des obſervations, que le dernier point de la diviſion ſoit vérifié, auſſi bien que le premier. Lorſqu'on conſtruit un inſtrument, que le centre & la lunette ſont placés, le limbe dreſſé & l'arc décrit ſur le limbe; il s'agit de marquer le dernier point de la diviſion des hauteurs ou le point de 90° degrés, qui eſt vers la lunette O, (*fig.* 203); pour cet effet l'on place une règle bien droite qui paſſe ſur le centre du quart-de-cercle, & qui touche le limbe; on met ſur cette règle la lunette d'épreuve (2503), & l'on fait mouvoir la règle juſqu'à ce qu'on voye au centre de la lunette d'épreuve, le même objet qu'au centre de la lunette du quart-de-cercle; c'eſt une preuve qu'alors la règle & la lunette d'épreuve ſon exactement parallèles à la lunette de l'inſtrument; & comme je ſuppoſe qu'un des bords de la règle paſſe toujours ſur le centre, la règle marquera par ſon autre extrémité ſur la circonférence du quart-de-cercle, le point où doit finir la diviſion des hauteurs, c'eſt-à-dire, le point où doit battre le fil à-plomb quand la lunette ſera dirigée au zénit. Si l'objet dont on ſe ſert, n'eſt pas aſſez éloigné pour que la différence de hauteur qu'il y aura entre la lunette d'épreuve & la lunette de l'inſtrument ſoit inſenſible, il faudra employer deux mires qui ſoient entre elles à même diſtance que les lunettes, par la même raiſon que dans l'art. 2554. Si l'inſtrument eſt fait & diviſé, l'aſtronome qui veut en faire uſage, doit s'aſſurer auſſi du dernier point de la diviſion; c'eſt ce qu'on fait par le retournement.

Vérification par le retournement.

2556. La vérification par le retournement ſe fait au moyen des étoiles voiſines du zénit; elle ſert à vérifier ſi le point du zénit a été bien déterminé par l'opération précédente, ou s'il n'eſt arrivé aucun dérangement à la lunette & au limbe de l'inſtrument. L'on obſerve la hauteur d'une étoile voiſine du zénit, dans les deux poſitions de l'inſtrument; le limbe étant tourné vers l'orient & enſuite vers l'occident; cette hauteur doit être exactement la même, ſi la lunette eſt bien parallèle à la ligne de 90°; mais ſi l'on trouve 4′ de dif-

férence entre les deux hauteurs c'eſt une preuve qu'il y a deux minutes d'erreur au zénit.

2557. En effet, quand on obſerve une étoile *E* (*fig.* 205), le fil à-plomb étant ſur *CB*, ſi *A* eſt le point de 90°, *AB* ſera la diſtance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle, & *DB* ſera ſa hauteur; ſi le point *A* eſt de 2′ trop éloigné de la lunette *O*, la diſtance au zénit *AB* paroîtra trop petite, & la hauteur trop grande; mais quand le quart-de-cercle ſera retourné comme dans la *fig.* 206, le fil à-plomb tombera ſur *CE*, l'arc *AE* ſera la diſtance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle; & comme le dernier point de la diviſion des hauteurs où le point *A* eſt de 2′ trop éloigné de la lunette *O*, & par conſéquent du point *E*, la diſtance au zénit *AE* paroîtra trop grande de 2′, par la même raiſon qu'elle paroiſſoit trop petite dans la première ſituation; ainſi l'on trouvera 4′ de plus dans cette diſtance au zénit que dans la première, ce qui fera connoître que l'erreur au zénit eſt de 2′: il faudra ôter ces 2′ de la hauteur obſervée dans la première ſituation, & par conſéquent de toutes les hauteurs que donne le quart-de-cercle, dans ſa ſituation ordinaire.

Fig. 205.

Fig. 206.

Erreur de l'arc total de 90°.

2558. Dans cet exemple, l'erreur eſt différente de ce qu'elle étoit dans l'article 2552; ſi pareil cas arrivoit ce ſeroit une preuve que l'arc total au lieu d'être de 90° ſeroit trop petit de 4′, puiſque le premier point de la diviſion eſt trop près de la lunette (2552), & que le dernier point en eſt trop éloigné (2557). Dans ce cas, il faudroit augmenter toutes les hauteurs à proportion de 4′ pour 90°, indépendamment de l'erreur conſtante de 2′ additive à toutes les hauteurs. Nous avons cité pluſieurs exemples ſemblables (2180). On peut auſſi reconnoître la même choſe avec le compas à verge (2563); mais il eſt très-bon de ſe ménager une autre eſpèce de vérification pour l'arc total, par les méthodes précédentes.

Vérification d'un Sextant à deux Lunettes.

Utilité d'un Sextant.

2559. Le Sextant à deux lunettes tient lieu d'un quart-de-cercle; il eſt plus léger & plus commode, ce qui fait qu'on le préfere communément aujourd'hui, lorſqu'il s'agit des grands inſtrumens mobiles de 5 ou 6 pieds de rayon; les deux inſtrumens de 6 pieds qu'avoit M. de la Caille, ceux de Milan, de Vilna en Pologne, qui ont également 6 pieds, & celui de l'Ecole Militaire qui en a quatre, ſont faits de la même manière; c'eſt ce qui m'oblige à parler ſéparément de la vérification qui leur convient.

Fig. 207.

La première vérification d'un ſextant (*fig.* 207), ou d'un octant, (car il ſuffit que l'arc ait 45°), ſe fait de la même manière que celle du quart-de-cercle; on le vérifie par le retournement, pour déterminer le point *D* qui eſt le commencement de la diviſion (2556), ou pour connoître la ſituation de la lunette verticale *CO*, (je l'appelle *verticale*, parce que c'eſt celle avec laquelle on obſerve près du zénit); on vérifie auſſi le ſextant par le renverſement (2552), pour déterminer la poſition de la lunette horizontale *FG*, par rapport au point *D*; mais cette opération étant un peu incommode dans les grands inſttumens, on y ſupplée par les étoiles élevées de 45°. Je ſuppoſerai que les diviſions du ſextant commencent au point *D*, & qu'il y ait 60° au point *F*; les obſervations faites à la lunette verticale, donneront alors ſur le limbe des diſtances au zénit, & les obſervations faites à la lunette horizontale donneront des hauteurs.

Vérification à 45°.

2560. Le limbe du ſextant pouvant ſe tourner vers l'orient & vers l'occident, l'on obſervera la hauteur méridienne d'une étoile ſituée vers 45°, avec les deux lunettes & dans les deux ſituations de l'inſtrument; toutes les étoiles qui ſont entre 40 & 60° de hauteur, peuvent ſervir à la vérification d'un ſextant; pour un octant il faut choiſir celles qui ſont à 45° de hauteur

méridienne, ou environ. Si l'on ne trouve pas exactement une même hauteur de l'étoile par les deux lunettes & dans les deux positions, c'est une preuve que les lunettes ne font pas entre elles un angle droit, comme elles le devroient faire, & l'on aura la différence ou l'erreur à cet égard ; mais on connoît l'erreur de la lunette verticale *CD* par le retournement (2556) ; on en conclura donc l'erreur de la lunette horizontale *FG*. *Fig. 207.*

2561. Exemple. Je suppose qu'à Milan, sous 45° 25′ de latitude on ait observé dans le crépuscule, au mois de Mars, la distance de la Chèvre au zénit 0° 21′ du côté du nord, avec la lunette verticale *CO*, la division regardant l'orient & le fil à-plomb tombant hors des 60°, ou au-delà du commencement de la division ; je suppose qu'ensuite la distance ait été de 17′ le lendemain, lorsque le limbe regardoit l'occident & que le fil à-plomb tomboit au-dedans des divisions, comme dans la situation ordinaire ; ce sera une preuve que la distance au zénit est exactement de 19′, & que l'erreur de l'instrument est de 2′, qu'il faudra ajouter à toutes les distances au zénit, ou ôter de toutes les hauteurs qu'on aura observées avec la lunette verticale ; c'est l'erreur de cette lunette. On choisira une étoile, telle que δ d'Orion qui sous la latitude de Milan passe vers 44° de hauteur, 20′ après la Chèvre ; je suppose qu'avec la lunette verticale on l'ait observée au méridien, le fil à-plomb marquant 45° 50′, ce qui donne sa hauteur 44° 10′, le limbe étant tourné vers l'orient, & que le lendemain avec la lunette horizontale on ait trouvé cette hauteur de l'étoile 44° 7′, le limbe étant tourné vers l'occident ; on sait par la première vérification qu'il faut ôter 2′ de toutes les hauteurs observées à la lunette verticale ; donc, au lieu de 44° 10′ on a 44° 8′ pour la hauteur exacte ; mais la lunette horizontale donne 44° 7′, ou 1′ de moins, donc il faudra ajouter 1′ à toutes les hauteurs observées à la lunette horizontale ; à moins que le fil à-plomb ne fût avant le commence- *Erreur de la lunette de 45°.*

ment de la division, & la hauteur négative. C'est ainsi qu'on a l'erreur des deux lunettes, par le moyen de cette double vérification au zénit & à 45°.

Vérification des divisions du Quart-de-Cercle.

Nécessité d'examiner les divisions.

2562. La vérification d'un quart-de-cercle faite au zénit & à l'horizon, fera connoître la situation de la lunette par rapport au premier & au dernier point de la division. S'il y a 90° 0′ 0″ de différence, ou si l'erreur se trouve exactement égale dans les deux cas, ce sera une preuve que l'arc de 90° est exact (2558); mais en supposant juste l'arc de 90°, les subdivisions peuvent ne l'être pas; un observateur exact ne sauroit mettre trop de soin à examiner celles de l'instrument dont il se sert; & M. de la Caille nous apprend qu'il l'avoit fait sur les siens, (*Astron. fund. pag.* 158. *Mém. acad.* 1751, *pag.* 407). Il seroit bien à souhaiter que tous les astronomes imitassent son exemple.

Avec un compas.

2563. On peut vérifier très-bien les divisions avec un compas à verge, dont les deux pointes soient très-fines & munies chacune d'un microscope, ou du moins d'une forte loupe; on prend d'abord avec ce compas la distance du centre au premier point de la division, & l'on voit si cette distance est bien égale sur toute la circonférence; car s'il y a la moindre différence, il faut en tenir compte dans le calcul de la distance des points entre eux. On porte aussi ce rayon depuis le commencement de la division jusqu'à 60°; ce point est un des plus importans, & tous les autres en dépendent; on prend ensuite l'arc de 30° avec le compas à verge, & l'on voit si étant porté 3 fois sur la circonférence il tombe exactement sur 60 & sur 90°. Il en est de même des autres subdivisions. Le compas qui porte des verres sur lesquels on trace des lignes très-fines est fort commode pour ces vérifications; (*Boscovich de litter. exped.*).

2564. L'observation des angles sur le terrein (2583) fournit aussi un moyen de vérifier les divisions d'un petit quart-de-cercle, lorsqu'il a une alidade. On mesure divers angles autour de soi, & mettant toujours au même point l'intersection des axes des lunettes, la somme doit faire 360°, si l'on fait le tour de l'horizon, & qu'on réduise tous les angles au plan même de l'horizon (2585). C'est ainsi que M. Bouguer reconnut qu'il falloit ajouter 20″ à l'arc de 60° & 30″ à l'arc de 90° dans le quart-de-cercle dont il se servoit au Pérou, (*Figure de la Terre, pag.* 62 & 66). Avec le tour de l'horizon.

M. de la Condamine (*pag.* 18), nous apprend qu'il vérifia avec succès les divisions de son quart-de-cercle, de degré en degré, en plaçant perpendiculairement à une distance de 500 toises du centre du quart-de-cercle, un cordeau avec des mires en ligne droite à la longueur calculée des tangentes de degré en degré. Avec des mires en ligne droite.

2565. M. Passemant a proposé un moyen par lequel on pourroit non-seulement connoître, mais corriger très-exactement les plus petites erreurs de la division du limbe; il consiste à placer les points de divisions excentriquement sur des vis de cuivre qui soient bien au niveau du limbe, mais auxquelles on puisse donner un petit mouvement sur leur axe aussi-tôt qu'on aura reconnu qu'un des points n'est pas tout-à-fait à une juste distance du commencement de la division. *Hist. acad.* 1746, *pag.* 121.

Si l'on n'est pas en état de corriger ainsi les divisions, il faut du moins en connoître l'erreur, & dresser une table de la quantité qui devra se retrancher de chaque hauteur, mesurée sur le quart-de-cercle, pour avoir celle qu'on devoit trouver si les divisions eussent été exactes. On peut très-bien s'assurer par ce moyen d'une exactitude de 4″ à 5″ sur un sextant de 6 pieds. Précision que l'on peut espérer.

2566. M. le Duc de Chaulnes a donné, à la suite des arts de l'académie, des méthodes extrêmement ingénieuses pour diviser au microscope & à la machine, des quarts-de-cercles beaucoup plus exactement qu'on ne

l'a jamais fait ; il avoit conſtruit avec ces principes un quart-de-cercle d'un pied, qui donnoit à peu près la même préciſion que les inſtrumens ordinaires de 6 pieds (*Mém. acad.* 1765) : ce quart-de-cercle a paſſé entre les mains de M. le Prince de Conti.

Corrections à faire dans les Hauteurs obſervées.

2567. Le fil horizontal qui traverſe le champ d'une lunette, quoique parallèle à l'horizon, ne répond pas dans le ciel à des points qui ſoient à même hauteur. Soit Z le zénit (*fig.* 208), ZA le vertical qui paſſe au centre de la lunette, ZB le vertical qui paſſe en B par le bord du champ de la lunette ; dans le triangle ſphérique ZAB rectangle en A, l'hypothénuſe ZB eſt plus grande que le côté ZA, donc un aſtre qui paroîtra ſur le fil en A, ſera plus près du zénit ou plus élevé au-deſſus de l'horizon, que l'aſtre qui paroîtra ſur le même fil au point B. Le fil AB eſt dans le plan d'un grand cercle qui paſſe par mon œil, & qui eſt incliné à l'horizon autant que la lunette dans laquelle je regarde ; ce plan n'eſt point celui d'un almicantarat (191) ou d'un petit cercle parallèle à l'horizon ; c'eſt pourquoi les points A & B ne ſont point à mêmes hauteurs meſurées ſur la circonférence des verticaux, ZA & ZB.

Fig. 208.

Correction des hauteurs priſes au bord de la lunette.

Le point de la diviſion d'un quart-de-cercle indiqué par le fil à-plomb, marque la hauteur du point A qui eſt le milieu de la lunette ; ſi l'on a obſervé un aſtre, & meſuré ſa hauteur lorſqu'il étoit au point B du fil, le quart-de-cercle n'indiquant que la hauteur du point A, il faudra en retrancher la quantité dont le point B eſt plus bas que le point A, ou dont l'hypothénuſe ZB eſt plus grande que ZA, pour avoir la hauteur du point B. Je démontrerai que, dans un triangle ſphérique rectangle AZB, dont l'angle Z eſt très-petit, auſſi bien que le côté AB, l'excès de l'hypothénuſe BZ ſur le côté ZA eſt égal à $\frac{AB^2 \text{ cotang. } ZA}{2 \cdot 57^\circ}$, c'eſt-à-dire, la moitié du

du carré de la distance au centre de la lunette exprimée en secondes, multipliée par la tangente de la hauteur, & divisée par le nombre de secondes que contient l'arc de 57° égal au rayon, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 516).

Ainsi dans le solstice d'été où la hauteur du soleil à Paris est de 65°, si le soleil étoit observé sur le bord de la lunette dont la moitié du champ eût 40′, il faudroit retrancher 30″ de la hauteur indiquée par le quart-de-cercle, pour avoir la hauteur réelle du soleil au moment de l'observation. Il y a une différence pour le cas de la hauteur méridienne (2575).

2568. Par la même raison un astre observé dans le méridien, ne doit pas suivre exactement le fil horizontal du quart-de-cercle, à moins que l'astre ne soit dans l'équateur. En effet, puisque le fil horizontal d'une lunette placée dans le méridien, est dirigé dans le plan d'un grand cercle *AFB* (*fig.* 209), & non pas dans celui d'un parallèle diurne, tel que *AGD*; il en résulte nécessairement que l'astre observé dans le méridien, & qui passe au point *A* sur le milieu du fil de la lunette, ne suivra pas le fil *AF*, & qu'il s'élèvera de la quantité *FG*, mais *PA* = *PG*, donc la différence *FG* entre l'hypothénuse *PF* & le côté *PA* ou *PG* est $\frac{AF^2 \text{ cot. } AP}{2.57^\circ}$ ou $\frac{AF^2 \text{ tang. déclin.}}{2.57^\circ}$; cette quantité peut être plus grande pendant quelques instans que la quantité dont l'astre s'abaisse en s'éloignant du méridien; & un astre dont la déclinaison est boréale paroît s'élever dans la lunette après avoir passé le méridien, comme si la hauteur méridienne n'étoit pas la plus grande de toutes; cette espèce de paradoxe fut observé par M. Cassini, (*Figure de la Terre*, 1718, *pag.* 225), mais son explication ne m'a pas paru satisfaisante. *Fig.* 209.

2569. Il est extrêmement important dans les observations délicates, & sur-tout dans les grands secteurs astronomiques (2380), de mettre la lunette exactement parallèle au plan qui passe par le centre de la suspension, Du parallélisme de la lunette.

& par le limbe ; pour y parvenir on ſe ſert de la lunette d'épreuve (2503), on la place ſur une règle bien droite qui va du centre au limbe de l'inſtrument, on la dirige ſur un objet terreſtre fort éloigné, & ſi la lunette de l'inſtrument ſe trouve pointée ſur le même objet, on eſt ſûr qu'elle eſt parallèle au limbe. On eſt obligé communément d'employer pour cette vérification deux mires, dont l'une ſoit un peu plus élevée que l'autre, de la même quantité que la lunette d'épreuve eſt plus élevée que la lunette fixe, & l'on dirige alors la lunette la plus haute ſur la mire qui eſt auſſi la plus élevée.

M. de la Condamine & M. Bouguer, ont traité fort au long de l'importance du parallléliſme des lunettes dans les grands ſecteurs, & des erreurs qui peuvent réſulter du défaut de parallléliſme ; la formule employée ci-deſſus (2567) donne un moyen très-ſimple d'aſſigner les quantités de ces erreurs dans les deux cas principaux.

Fig. 210. 2570. Soit P le pole, (*fig.* 210), PE le méridien dans lequel on ait placé un inſtrument avec tout le ſoin convenable, au moyen d'une méridienne filaire (2579) : ſoit ED la quantité dont la lunette s'écarte de ce plan EP que je ſuppoſe le plan du limbe & du méridien ; ſoit DE la perpendiculaire abaiſſée ſur le limbe ; elle tombe au point E, & le point E du limbe eſt celui auquel on rapporte l'aſtre obſervé en D, lorſqu'il étoit au milieu de la lunette, car dans la vérification au zénit (2556), on fait enſorte que la lunette dans les deux poſitions en D & en G donne la même hauteur, la même diſtance au pole, ou que PD ſoit égale à PG ; or le point E de l'inſtrument auquel répond une étoile obſervée en D & en G, ne peut être le même, ſans que la ligne DEG ſoit perpendiculaire en E, ſur le plan de l'inſtrument. Ayant pris $PF = PD$, on aura EF pour l'erreur commiſe dans la diſtance de l'aſtre D au pole, & cette erreur $= \frac{ED^2 \cot. PE}{2.57^\circ}$ (2567) eſt comme la tangente de la déclinaiſon de l'aſtre. Elle deviendroit extrêmement conſidérable ſi l'on obſervoit un aſtre

Erreur qui en réſulte ſur les hauteurs.

très-près du pole, mais cela n'arrive jamais; ainsi l'erreur qui résulte d'un petit défaut de parallélisme qui ne seroit que de 5 à 6′, est tout-à-fait insensible dans les observations qu'on a coutume de faire, sur-tout près du zénit.

2571. Examinons un autre cas qui a, peut-être, souvent eu lieu parmi les astronomes, & dans lequel l'erreur est beaucoup plus grande. Je suppose que l'on connoisse bien la marche de son horloge & le temps vrai du passage d'un astre au méridien; au moment où l'on sait qu'il y passe on dirige la lunette au point *E* du méridien (*fig.* 211); mais la lunette s'écarte du limbe de la quantité *EH*, ainsi le limbe se trouvera placé dans le vertical *ZH*, je dis dans le vertical, parce qu'au moyen du fil à-plomb le limbe est toujours vertical; ayant donc élevé la perpendiculaire *NEH* sur le méridien *ZEK*, le point *H* du vertical ou du plan de l'instrument sera celui où l'on rapportera la hauteur observée; ayant pris $ZK = ZH$, l'erreur sera $= KE = \frac{EH^2 \cot. ZE}{2.57°.}$; ainsi elle augmente comme la tangente de la hauteur; cette erreur peut devenir considérablement plus grande que celle qui avoit lieu dans le premier cas (2570), parce qu'il est très-ordinaire d'observer des astres près du zénit, où la tangente de la hauteur est presque-infinie, ainsi l'on voit combien il importe de placer dans le méridien le limbe & non pas la lunette (2598), lorsqu'on a quelque doute sur leur parallélisme; ce qui fait la nécessité des méridiennes filaires dans ce cas-là (2579).

Cas où elle seroit considérable.

Fig. 211.

2572. Les observations des hauteurs méridiennes, quand elles ne sont pas faites exactement & dans le méridien, & au centre de la lunette, exigent deux considérations qui se rapportent à la même formule: supposons qu'un astre ait été observé à quelque distance du méridien, mais au centre même de la lunette; soit *S H* (*Fig.* 212), la hauteur méridienne du soleil, *S L* le parallèle qu'il décrit, *S B C* un arc de grand cercle

Fig. 212.

Fig. 212. perpendiculaire au méridien ZSH, & dont la portion SB eſt confondue avec le fil de la lunette, L le milieu du fil & en même temps le point où étoit le ſoleil quand on a obſervé ſa hauteur, SM une portion de l'almicantarat, ou un arc dont tous les points S & N ont la même hauteur au-deſſus de l'horizon; ſi l'on ſuppoſe que l'arc SB ſoit $=m$, la quantité BM dont le point B du cercle SBC ou du fil de la lunette eſt plus bas que le point M ou le point S, eſt égal à $\frac{m^2 \text{ tang. } h}{2 \cdot 57^\circ}$ (2567); mais le point L du parallèle à l'équateur eſt plus méridional que le point B, dans le cas de la figure 212, parce que le parallèle à l'équateur SL s'écarte du grand cercle SBC, de la quantité $\frac{m^2 \text{ tang. décl}}{2 \cdot 57^\circ}$. (2568).

Changement des hauteurs. *Ainſi la petite quantité* ML, *dont la hauteur de l'aſtre change à une diſtance* m *du méridien, eſt égale à* $\frac{m^2}{2 \cdot 57^\circ}$ (tang. haut. + tang. déclin.); le ſigne — eſt pour les aſtres qui paſſent au méridien entre le zénit & l'équateur. Cette formule n'a lieu que quand on obſerve la hauteur avec un quart-de-cercle mobile qui n'eſt pas exactement dans le méridien, mais qu'on obſerve ſur l'axe même de la lunette.

2573. C'eſt ordinairement en temps & non pas en degrés, que la quantité m ſe préſente à un obſervateur; il faut alors, non-ſeulement, réduire le temps en minutes de degrés à raiſon de 15° par heure, mais encore diminuer le nombre de minutes en le multipliant par le coſinus de la déclinaiſon, afin d'avoir l'arc de grand cercle qui eſt la diſtance SB, où l'arc SL du parallèle qui lui eſt ſenſiblement égal.

2574. Exemple. Une planète ayant 65° de hauteur, & 23° 50′ de déclinaiſon boréale, a été obſervée 4 minutes de temps après avoir paſſé par le méridien; il faut corriger la hauteur obſervée, & en conclure la hauteur méridienne; on réduit d'abord les 4 minutes en degrés, & l'on a 1° ou 3600″, on les multiplie par le coſinus de 23° 50′, & l'on a 3293″ pour la quan-

tité $m = SB$. Du double du logarithme de cette quantité on ôtera le logarithme de l'arc égal au rayon qui eſt 5, 31442; on ajoutera au reſte le logarithme de la tangente de la déclinaiſon, & l'on aura le logarithme de 23″ 3, dont la moitié eſt 11″ 6, ſecond membre de la formule (2572).

On ajoutera au même reſte le logarithme de la tangente de la hauteur, & l'on aura le logarithme d'un nombre dont la moitié 56″ 4 ſera le premier membre de la formule; retranchant le ſecond il reſtera 44″ 8 à ajouter à la hauteur obſervée, pour avoir la véritable hauteur méridienne.

2575. Quand le centre des fils eſt exactement dans le méridien & qu'on veut avoir la hauteur méridienne, par le moyen de la hauteur obſervée au bord de la lunette, on n'a beſoin que de la ſeconde partie de la formule précédente ou de l'art. 2568. C'eſt ce qui arrive quand on ſe ſert d'un quart-de-cercle, ou mural ou mobile, qui eſt exactement dans le méridien, & qu'on meſure la hauteur avant ou après le vrai paſſage au méridien; parce qu'alors on cherche la hauteur non pour le moment de l'obſervation, mais pour celui du paſſage en *S*. L'erreur eſt nulle pour un aſtre ſitué dans l'équateur, parce qu'alors il ſuit exactement le fil de la lunette, & paroît toujours à la hauteur indiquée par le centre des fils, & par les diviſions du quart-de-cercle. On trouvera les tables de ces équations avec des exemples, dans mon *expoſition du calcul*, *pag.* 278, & dans les mémoires de 1757, *pag.* 522.

2576. Caler un quart-de-cercle mobile, c'eſt le rendre droit ou vertical dans tous les ſens, & le placer à une hauteur donnée. Il faut non-ſeulement que le fil à-plomb tombe exactement ſur le point de la diviſion, mais il faut que le fil ſoit en l'air & ne frotte pas ſur le limbe; on ſe ſert pour cela des vis du pied (*fig.* 149). Pour être sûr que le fil à-plomb n'eſt arrêté par aucun obſtacle, aucune glutinoſité, l'on a ſoin de lui faire faire quelques oſcillations perpendiculaires

Manière de caler un quart-de-cercle.

Fig. 149.

au plan du limbe; & s'il revient battre exactement sur le même point, on est rassuré à cet égard. Il faut rendre le plomb aussi pesant qu'il est possible, c'est-à-dire, lui donner toute la masse que le fil est capable de supporter; on fait tremper le poids dans l'eau afin que les oscillations soient plutôt arrêtées, & qu'on puisse s'assurer à plusieurs reprises que le fil est exactement sur le point (2314).

Usage des faux planchers.

2577. Si l'on n'a pas une voûte ou un plancher très-solide pour asseoir un quart-de-cercle, il est fort à craindre qu'en allant du fil à plomb à la lunette on ne fasse incliner le plancher; cela causeroit dans l'observation une erreur, dont un astronome qui observeroit seul ne pourroit s'appercevoir. Pour y remédier, il faudroit avoir autour du quart-de-cercle un faux plancher sur lequel on marcheroit, qui ne dépendant point de celui où poseroit l'instrument, ne causeroit aucun dérangement dans sa situation; alors on dépendroit moins de la solidité du bâtiment.

Observations des hauteurs correspondantes.

2578. Lorsqu'on veut observer des hauteurs correspondantes, on commence par diriger le quart-de-cercle vers le soleil, & le caler en tous sens, de manière que le fil à-plomb ne fasse que raser le limbe, y touchant à peine, lors même que l'on fait tourner le plan de l'instrument sur son axe, (2576). On dirige la lunette au soleil, & l'on fait ensorte que le soleil paroisse à droite & en haut de la lunette, par exemple en *S* (*fig.* 135); car le soleil qui monte réellement paroît descendre dans la lunette. En attendant que le bord du soleil soit descendu sur le fil horizontal *ED*, l'on va au fil à-plomb que l'on regarde au travers des microscope (2314); s'il ne répond pas exactemenr sur un des points marqués de dix en dix minutes, on donne au limbe un petit mouvement avec la verge de rappel, ou avec les vis du pied si l'on n'a point de verge de rappel; & l'on fait venir le fil exactement sur le point. Alors on retourne à la lunette, & l'on attend que le premier bord du soleil vienne toucher le fil

Fig. 135.

horizontal *ED*, on compte les ſecondes, & l'on a l'heure, la minute & la ſeconde, où le bord du ſoleil s'eſt trouvé à la hauteur qui eſt marquée ſur le limbe par le fil à-plomb (921).

Après midi l'on dirige encore la lunette au ſoleil dans le temps qu'il approche de la hauteur où il a été obſervé le matin; on met alors le ſoleil à la droite du centre de la lunette & au-deſſous du fil horizontal, c'eſt-à-dire, en *G*; & comme le ſoleil paroît monter après midi de *G* en *C* dans la lunette, on a le temps, avant que le dernier bord parvienne au fil horizontal *ED*, d'ajuſter le fil à-plomb ſur le même point, c'eſt-à-dire, ſur la même dizaine de minutes où l'on a obſervé le matin. Quand le fil eſt bien placé, l'on retourne à la lunette, on compte l'heure, la minute & la ſeconde où le bord du ſoleil qu'on a obſervé le matin (par exemple le bord ſupérieur qui paroît inférieur dans la lunette) arrive au fil horizontal.

2579. La méthode des hauteurs correſpondantes ſert à placer dans le plan du méridien un mural (2588), une lunette méridienne (2604); elle ſert auſſi à tracer les méridiennes filaires dont il eſt abſolument néceſſaire de ſe ſervir quand on obſerve avec de grands ſecteurs (2571, 2598). Pour tracer une méridienne filaire, on perce un trou dans le volet d'une fenêtre ou dans une plaque de métal fixée dans le mur; on tend un fil du centre du trou juſqu'à l'autre extrémité de la chambre, à peu-près dans la direction de la méridienne; on abaiſſe des à-plombs de divers points de ce fil, & l'on tend un cheveu ou un fil très-fin le long de ces à-plombs, ſur deux taſſeaux de fer ſcellés aux deux extrémités de la chambre; on eſt aſſuré par les à-plombs que le fil ſe dirige vers le pied du gnomon, c'eſt-à-dire, qu'il paſſe ſous la perpendiculaire du trou; pour s'aſſurer que ce fil eſt auſſi dans le méridien, on obſcurcira la chambre, l'on obſervera l'heure, la minute & la ſeconde où les deux bords de l'image du ſoleil arrivent au fil, & l'on en conclura le paſſage du centre du ſoleil à cette méridienne

Méridienne filaire.

filaire : les hauteurs correſpondantes priſes le même jour (922, 2578) apprendront ſi le midi vrai eſt d'accord avec celui que donne la méridienne ; & quand le fil ſera bien placé, il faudra rendre le plan de l'inſtrument parallèle à ce fil, pour être sûr qu'il eſt exactement dans le méridien.

Uſage des hauteurs.

2580. Les hauteurs correſpondantes ſont la meilleure façon de comparer une planète à une étoile fixe, & par-là de déterminer la poſition de la planète ; mais lorſqu'on ne peut abſolument comparer un aſtre avec des étoiles, dont la poſition ſoit connue, il reſte encore un moyen pour en déterminer l'aſcenſion droite ; il eſt moins exact & plus long à calculer ; mais il eſt ſouvent le ſeul qu'il ſoit poſſible d'employer. Ce moyen conſiſte à obſerver des hauteurs avec le quart-de-cercle ; chacune de ces hauteurs, jointe avec le temps vrai, détermine l'aſcenſion droite, ſi l'on ſuppoſe la déclinaiſon connue ; & ſi l'on prend deux hauteurs enſemble, elles déterminent à la fois l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de l'aſtre. On trouve dans le IVe volume des mémoires de Péterſbourg, pour 1729, diverſes ſolutions d'un problême encore plus général, données par Herman, Euler, Bernoulli, Mayer & Krafft ; *ayant trois hauteurs d'un aſtre, & les intervalles des temps, trouver la hauteur du pole, la déclinaiſon de l'aſtre & l'angle horaire*, ce qui donne l'aſcenſion droite de l'aſtre ; on la peut trouver auſſi par la trigonométrie en y employant de fauſſes poſitions, même dans les cas où la déclinaiſon ſeroit variable, en cherchant ſa variation par les obſervations faites d'un jour à l'autre ; cette méthode eſt utile pour les comètes (3008), & je voudrois que les voyageurs qui ſont revenus des pays lointains, ſans avoir déterminé leurs longitudes, euſſent fait ſeulement ſur la lune de pareilles obſervations, l'objet auroit été rempli. Mais le calcul en eſt trop long pour qu'on doive employer cette méthode quand on en peut choiſir d'autres ; ajoutons qu'elle ne peut donner l'aſcenſion droite & la déclinaiſon tout à la fois que dans la ſphère oblique, & que la préciſion qu'elle

peut

peut donner pour l'ascension droite est toujours aux dépens de celle qu'on pourroit desirer sur la déclinaison; mais en prenant deux hauteurs, dont l'une soit près du méridien, & l'autre près du premier vertical (949), on trouve avec le plus de précision qu'il soit possible, l'ascension droite & la déclinaison.

2581. Les déclinaisons des astres se déterminent directement par les hauteurs méridiennes, & ce sont les observations les plus fréquentes & les plus utiles pour cet objet; mais il faut apporter dans ces observations toutes les attentions dont nous avons parlé ci-devant (2576 & suiv.). Il faut y appliquer les corrections des art. 2572 & 2575, si cela est nécessaire; celle de l'erreur de l'instrument (2556); celles de la parallaxe & de la réfraction (Liv. IX & XII). On doit aussi avoir égard à l'épaisseur des fils (2536): si en observant la hauteur méridienne du bord d'une planète on s'est servi du bord supérieur du fil, on doit retrancher de la hauteur observée la demi-épaisseur du fil. Nous allons donner un exemple de toutes ces corrections.

Hauteurs méridiennes.

Corrections qu'il y faut faire.

2582. Le principal usage des hauteurs méridiennes consiste à trouver la vraie déclinaison d'un astre: voici un exemple dans lequel j'ai rassemblé toutes les corrections, expliquées chacune à leur place dans les livres précédens.

Usage des hauteurs méridiennes.

EXEMPLE. Le 22 Mars 1752, j'observai à Berlin la distance du bord supérieur du soleil au zénit 51° 20′ 36″, en faisant toucher le bord supérieur du fil au bord du soleil qui paroissoit en bas; il faut en ôter 18″ pour l'erreur du quart-de-cercle trouvée par le retournement (2556), ajouter 3″ pour la demi-épaisseur du fil, ajouter 1′ 22″ pour la réfraction, ôter 7″ pour la parallaxe du soleil, ajouter 16′ 5″ pour le demi-diamètre du soleil; & l'on a enfin pour la vraie distance du centre du soleil au zénit 51° 37′ 33″, qui retranchée de la distance du zénit à l'équateur ou de la hauteur du pole que j'ai trouvée de 52° 31′ 30″, en tenant compte de l'erreur des divisions, donne la vraie déclinaison du centre du

soleil pour le 22 Mars à midi, 0° 53′ 57″ (854).

Mesure des angles sur le terrein.

2583. Lorsqu'on emploie le quart-de-cercle à mesurer des angles sur le terrein (2643), on doit avoir quelques attentions particulières, qui sont expliquées dans les auteurs qui ont traité de la mesure de la terre, tels que M. Bouguer, M. de la Condamine, M. de Maupertuis, M. de Thury, le P. Boscovich, & le P. Liesganig.

Vérification de l'alidade.

La première attention consiste à diriger l'alidade ou lunette mobile, aussi bien que la lunette fixe, vers un même objet, pour reconnoître si elles sont bien parallèles, quand l'alidade est sur le commencement de la division; dans le cas où elles ne seroient pas parallèles, on examineroit avec le micromètre combien de minutes ou de secondes il y a de différence, & ce seroit la quantité constante qu'il faut ajouter à toutes les distances observées, si l'index de l'alidade s'est trouvé hors des divisions du limbe dans la vérification qu'on en a faite; soustraire, si l'index s'est trouvé au-dedans du commencement de la division du quart-de-cercle.

La seconde attention, est d'examiner si l'alidade tourne bien concentriquement aux divisions, & si elle ne sort point des divisions un peu plus dans un point que dans l'autre; M. Bouguer ayant trouvé dans son quart-de-cercle un semblable défaut, explique dans son livre la manière d'en tenir compte dans le calcul.

La troisième, est une attention nécessaire pour disposer promptement un quart-de-cercle dans le plan des deux objets dont on veut mesurer la distance; Tycho-Brahé les faisoit tourner sur un genou, comme dans la *fig.* 178, à la manière de nos télescopes & de nos graphomètres ordinaires; Flamsteed se servoit du mouvement parallatique (*fig.* 148): on peut aussi incliner le plan du quart-de-cercle par les vis du pied pour le mettre dans le plan des deux objets; mais le double genou (*fig.* 153), est le moyen le plus commode & le plus général pour mettre promptement le quart-de-cercle dans le plan des deux objets.

Fig. 153.

2584. On imagine une ligne droite qui passe par les deux astres ou par les deux objets dont on veut mesurer la distance, & qui aille rencontrer l'horizon; on dirige vers ce point de l'horizon la pièce horizontale du double genou, c'est-à-dire, la pièce *a b* (*fig.* 169); ou si l'on est maître d'incliner le pied de l'instrument, l'on dirige le double genou vers un point quelconque de cette ligne qui joint les deux objets; alors on fait incliner très-aisément à droite ou à gauche le plan du quart-de-cercle qui est parallèle à *a b* pour le mettre dans le plan des deux objets (M. Bouguer, *pag.* 77). Le P. Pezenas a donné une autre construction de genou, propre à mesurer les distances inclinées, (*Opt. de Smith, édition d'Avignon II,* 511).

Mettre le quart-de-cercle dans le plan des deux objets.

Fig. 169.

2585. La quatrième attention qu'exige la mesure des angles sur le terrein, est de réduire à l'horizon les distances des objets terrestres qui sont au-dessus ou au-dessous de l'horizon. Soit *S*, le zénit (*fig.* 213), *HO* l'horizon, *AB* la distance observée entre deux objets dont les hauteurs sont *AH* & *BO*; dans le triangle *ZAB*, l'on connoît les trois côtés, on calculera l'angle *Z* qui mesure l'arc *HO* de l'horizon; c'est la distance horizontale que l'on cherche, & c'est celle dont on est obligé de faire usage quand on détermine une distance par la trigonométrie, comme dans les opérations de la figure de la terre (2643).

Réduction des angles observés.

Fig. 213.

2586. Les angles observés sur le terrein ont ordinairement besoin d'être réduits au centre de la station où l'on observe : on se place à côté d'un signal, à une fenêtre de clocher, & il est nécessaire de trouver quel seroit l'angle observé, si l'on étoit au centre même du signal ou sur la pointe du clocher; cela n'exige que la résolution d'un triangle. M. l'Abbé de la Grive a fait imprimer en 1754, dans son Manuel de trigonométrie des tables de réductions qui sont très-commodes pour ces sortes d'opérations; on les trouve difficilement aujourd'hui, mais je les fournirois volontiers aux astronomes qui auroient à faire de ces grandes opérations.

2587. L'on ne doit obſerver les ſignaux, s'il eſt poſſible, que quand ils ſont dans l'ombre, & pointer à leur milieu, comme au point qui eſt le moins ſujet à changer par les accidens de lumière; c'eſt une attention importante. On en trouvera pluſieurs autres dans les livres de M. Bouguer, du P. Boſcovich, &c.

DES OBSERVATIONS QUE L'ON FAIT AU QUART-DE-CERCLE MURAL.

Planche XIX. Fig. 155.

2588. De tous les inſtrumens d'aſtronomie, le mural (*fig.* 155), eſt le plus commode, mais il eſt le plus difficile à faire & le plus diſpendieux. Les paſſages des aſtres par le méridien s'obſervent auſſi bien au mural qu'à la lunette méridienne (2387); mais il faut avoir obſervé la déviation ou l'erreur du mural à différentes hauteurs, par le moyen des hauteurs correſpondantes du ſoleil priſes en différens temps de l'année; car il eſt preſque impoſſible que le limbe d'un grand quart-de-cercle ſoit aſſez bien dreſſé pour qu'il puiſſe être, à 1″ ou 2″ près, dans le méridien à toutes les hauteurs : par exemple, l'erreur du mural de M. de la Hire étoit — 15″ à 18° de hauteur, elle étoit nulle à 52°, & + 16″ à 65° de hauteur, depuis 1683 juſqu'en 1686, ſuivant des calculs que M. de la Caille me communiqua en 1759; cela eſt très-néceſſaire à ſavoir pour faire uſage des obſervations qui ont été publiées dans l'hiſtoire céleſte de M. le Monnier en 1741; c'eſt ce qu'il faut ôter des paſſages obſervés, ou y ajouter.

Erreurs du mural de M. de la Hire.

2589. Flamſteed ayant fait faire en 1688 un arc mural de $6\frac{2}{3}$ pieds de rayon, ſe ſervit des hauteurs correſpondantes, à l'exemple de M. de la Hire, pour déterminer en 1690 les erreurs de ſon mural; à 60° de hauteur il falloit ajouter 33″ aux temps obſervés, pour avoir les véritables paſſages au méridien; mais il ne prenoit point de hauteurs correſpondantes d'étoiles, & il ſe ſervoit des diſtances obſervées avec ſon ſextant entre différentes étoiles, pour trouver les aſcen-

sions droites de celles qui passoient trop haut ou trop bas; ce fut par le moyen de ces ascensions droites qu'il détermina les erreurs de son mural, depuis le tropique du Cancer jusqu'à l'étoile polaire, mais cela est encore plus facile par les hauteurs correspondantes (921, 2578).

2590. Il est nécessaire de vérifier un mural au zénit & à l'horizon, aussi bien que tout autre instrument (2556), mais la méthode n'est pas tout-à-fait la même. Etant à Berlin en 1751, je fis élever sur les deux façades de l'observatoire deux grandes pierres, l'une au nord & l'autre au midi, sur lesquelles je plaçai alternativement le mural dont je voulois me servir, & par-là je me procurai la vérification par le retournement (2556); mais on n'a pas toujours d'aussi grandes facilités; le Roi qui daignoit prendre à mon travail un intérêt marqué, en avoit applani tous les obstacles.

Vérification au zénit.

Pour se procurer une semblable vérification, M. le Monnier a fait placer en 1753 à Paris, le même quart-de-cercle sur un grand bloc de marbre, & celui-ci tourne sur un boulet de canon, que M. Marris a fait tourner & doucir, aussi bien que la crapaudine, où la concavité dans laquelle il tourne & qui sert de pivot; mais en remédiant ainsi à un inconvénient, on perd le principal avantage d'un mural, celui d'être invariablement fixé dans le méridien.

Seconde Méthode.

2591. Flamsteed voulant trouver le commencement de la division, dans son arc mural (2327), conjointement avec Sharp, se servit d'un moyen fort analogue à celui que nous employons pour vérifier les instrumens mobiles : ayant disposé la lunette verticalement, il suspendit du centre sur l'index qui étoit porté par la lunette, un fil à-plomb, & il observa ainsi plusieurs jours de suite le passage de la belle étoile qui est à la tête du dragon; tandis que Sharp marquoit sur l'index de la lunette le point où battoit le fil à-plomb : il transporta ensuite le centre & la lunette de son mural sur un mur opposé, & il les ajusta convenablement

Troisième Méthode.

avec le fil à-plomb; la lunette ou la ſurface de l'index regardoit alors l'occident, au lieu de regarder l'orient, comme dans l'opération précédente, où la lunette étoit placée ſur l'inſtrument; il obſerva dans cette nouvelle poſition l'étoile près du zénit, tandis que Sharp marquoit ſur l'index le point du fil à-plomb; le milieu entre les deux points marqués ſur l'index dans les deux poſitions de l'inſtrument, étoit le véritable point où devoit battre le fil à-plomb, en ſuppoſant l'axe optique de la lunette exactement dirigé vers le zénit; ayant donc remis la lunette ſur l'inſtrument, il fit venir le fil à-plomb ſur ce point du milieu, & dans cet état il marqua ſur le limbe le point correſpondant, d'où devoient commencer les révolutions de la vis qui engrenoit dans la circonférence, & les diviſions qui étoient ſur le limbe (*Proleg. pag.* 110). Flamſteed continua de faire pendant les années ſuivantes cette même vérification, & avec d'autant plus de ſoin qu'il s'apperçut que l'erreur alloit en augmentant d'une année à l'autre, parce que la ſituation de ſon mural n'étoit pas aſſez fixe.

Vérification à l'horizon.

2592. On ne peut vérifier un mural à l'horizon par le renverſement (2552), l'opération ſeroit trop embarraſſante, & la flexion des barres ſeroit trop à craindre dans deux états auſſi différens que ceux des figures 203 & 204; mais on le vérifie très-bien en place par le moyen d'un excellent niveau (2399), de la manière ſuivante. La lunette du mural porte vers ſes deux
Fig. 155. extrémités en *L* & en *M* (*fig.* 155), deux taſſeaux dont les bords extérieurs forment une ligne exactement parallèle à la ligne de foi, ou à l'axe optique de la lunette, ce qui ſe peut vérifier par la lunette d'épreuve (2503); on place la lunette *LM* parallèlement au rayon *LB* de l'inſtrument en l'arrêtant ſur le premier point de la diviſion en *B*. Je ſuppoſe qu'on ait une grande règle
Fig. 154. fort épaiſſe (*fig.* 154), & garnie de deux pieds *Y*, *Z*, on poſe les pieds de cette règle ſur les deux taſſeaux *L* & *M* de la lunette, & le niveau ſur la règle, en-

ſuite retournant la règle & le niveau, on apperçoit facilement ſi la lunette eſt parfaitement horizontale, & les diviſions ſont connoître la quantité dont il s'en manque ou dont il a fallu incliner la lunette pour que la règle & le niveau retournés dans tous les ſens, euſſent toujours exactement la même ſituation.

On peut enſuite pour une plus grande vérification placer la lunette dans une ſituation verticale, y appliquer la règle *YZ*, tendre un fil à-plomb par les deux points qui ſont marqués ſur les deux pieds de la règle, & l'on reconnoît ſi la lunette, quand elle eſt ſur le dernier point de la diviſion, eſt exactement verticale; ce qui confirme la vérification précédente (2591). On voit par-là ſi l'arc total eſt exactement de 90°. Je ſuppoſe un niveau aſſez parfait pour que 1″ ou 2″ y ſoient ſenſibles, mais on en peut faire actuellement, en y donnant du ſoin (2399).

2593. M. Graham employoit le niveau d'une manière un peu différente pour la même vérification : la règle ou plutôt la planche (*fig.* 154), étant ſuppoſée un peu plus longue que le rayon, on tend ſur les deux pieds *YZ*, un fil d'argent très-délié, on approche la règle du quart-de-cercle, & on la ſuſpend de manière que le fil d'argent réponde exactement ſur le point de zéro & ſur un point très-fin marqué au centre du mural : dans cet état on trouve par le moyen du niveau ſi le bord ſupérieur de la règle eſt parfaitement horizontal, ou de combien il s'en faut; on ſuppoſe comme dans la première vérification que la ſurface des pieds *YZ*, eſt ſur une ligne exactement parallèle à la ſurface ſupérieure *AB*, où l'on met le niveau; mais il n'eſt pas bien difficile de ſe procurer deux ſurfaces parallèles. *Fig.* 154.

2594. Le parallélisme de la lunette par rapport au plan du mural peut ſe vérifier de pluſieurs manières. Lorſqu'on a la facilité de tourner un mural au nord & au midi, comme je l'avois à Berlin (2590), on reconnoît aiſément le parallélisme par les obſervations d'é- Parallélisme de la lunette.

toiles, de la manière suivante. Mon quart-de-cercle étoit depuis quelques mois du côté du midi, & j'avois reconnu par des hauteurs correspondantes qu'il étoit exactement dans le méridien vers 53° de hauteur; au mois de Juin 1752, je fis transporter le quart-de-cercle au nord, je le plaçai dans le méridien vers 53° de hauteur comme il l'étoit au midi; & cela par le moyen des étoiles circompolaires dont j'avois pris des hauteurs correspondantes la veille; j'observai le même jour des étoiles au zénit, & je vis qu'elles passoient 20″ plutôt qu'elles ne devoient passer en calculant d'après les passages observés la veille du côté du midi; cela me fit connoître que le haut de la lunette étoit de 10″ trop à l'orient au zénit, quoiqu'il fût dans le méridien vers 53° de hauteur; & comme le plan du quart-de-cercle étoit placé de la même manière & verticalement dans les deux positions, il ne s'agissoit que d'approcher du limbe le fil horaire du réticule qui étoit mobile par le moyen d'une vis; par-là je pouvois rendre parallèle au limbe, l'axe optique de la lunette qui auparavant faisoit un angle répondant à 10″ de temps au zénit, & qui décrivoit un cone au lieu de décrire le plan d'un grand cercle; ce changement du réticule exigeoit aussi un changement dans la situation du plan, mais la lunette devenue parallèle au plan ne pouvoit plus donner 10 secondes d'erreur dans un point, & zéro dans un autre.

2595. On peut aussi vérifier le parallélisme de la lunette d'un mural, par le moyen de la lunette d'épreuve (2503); on démontera l'alidade ou la lunette du mural; on appliquera la lunette d'épreuve sur le dos ou sur la partie de cette alidade qui est destinée à toucher le limbe & la platine du centre; on pointera les deux lunettes ainsi adossées, sur un objet éloigné, & si toutes deux répondent à la fois au même point, ou plutôt à deux points aussi éloignés l'un de l'autre que le sont les axes des deux lunettes, on sera sûr que l'axe optique de l'alidade est exactement parallèle à la surface

qui doit porter sur le limbe & sur la platine du centre, c'est-à-dire, qu'elle sera parallèle au plan de l'instrument, quand on l'aura remise en place. On pourroit aussi appliquer sur le même limbe successivement les deux lunettes, & voir si elles répondent exactement au même objet, ce qui prouveroit également le parallélisme. Après cela si l'on met l'instrument dans une situation bien verticale, on sera sûr que la lunette passe par le zénit, & l'on achevera de mettre le mural dans le méridien par des hauteurs correspondantes ou par les méthodes qui seront expliquées ci-après (2607).

DES OBSERVATIONS QUI SE FONT AUX GRANDS SECTEURS.

2596. On n'a emploié jusqu'ici les grands secteurs de 12 pieds de rayon que pour l'aberration, la nutation & la figure de la terre. Ces observations se réduisent à observer la distance d'une étoile au zénit à une seconde près; les attentions les plus importantes consistent à bien vérifier un secteur par le retournement (2556), à rendre la suspension bien libre (2386), & à bien connoître la valeur des parties du micromètre : mais il faut avoir égard à trois choses qui sont particulières à ces grands instrumens; la flexion des barres qui en composent la carcasse, la difficulté de les mettre dans le méridien, & la parallaxe des fils au foyer de la lunette ; nous allons dire quelques mots de ces trois objets.

Observations aux grands Secteurs.

2597. Une barre de fer de 8 pieds de long qui avoit 2 pouces 8 lignes de largeur par un bout, & 3 pouces 3 lignes par l'autre, avec 2 lignes $\frac{1}{2}$ d'épaisseur étant posée horizontalement de champ, c'est-à-dire, dans le sens où elle devoit se courber le moins, se courboit encore de 3 quarts de ligne (M. Bouguer, *pag.* 191); & si l'on augmente la longueur de la barre, la flexion croît comme la quatrième puissance de la longueur. Pour remédier le plus qu'il est possible à un

Flexion des barres.

inconvénient aussi considérable dans les grands instrumens, il est nécessaire d'employer les barres les plus larges, d'assujétir l'objectif très-fortement avec le centre, & le micromètre avec le limbe, afin que la flexion de l'instrument soit exactement égale à celle de la lunette; il faut aussi éviter de mettre de l'huile dans les vis, ce qui peut produire à la longue quelque jeu dans les assemblages : enfin il faut mouvoir ces instrumens avec précaution, pour empêcher qu'ils ne changent de forme par la flexion. (Voyez M. de la Condamine, *pag.* 143 *& suiv.*).

2598. Il est important que ces instrumens soient placés très-exactement dans le méridien, & cela non par le moyen des hauteurs correspondantes des astres & du temps de leurs passages, mais par le moyen d'une méridienne filaire (2579), sur laquelle on dirige le limbe dans le méridien; sans cela les hauteurs des étoiles qu'on observe fort près du zénit, pourroient être affectées très-considérablement par la moindre erreur dans le parallélisme de la lunette (2571).

Parallaxe des fils.

2599. Il est nécessaire que l'image de l'étoile qu'on observe se forme exactement sur le chassis du micromètre; sans cela elle est mal terminée, on distingue avec peine si le fil la coupe exactement en deux parties égales, & le moindre mouvement de l'œil fait qu'on apperçoit l'étoile au-dessus ou au-dessous du fil, par une espèce de PARALLAXE optique, dont il est très-important de se garantir.

Changement de foyer dans les lunettes.

Le foyer des grandes lunettes est sensiblement différent selon la constitution des yeux de l'observateur, & selon qu'on enfonce plus ou moins l'oculaire; la disposition même de l'atmosphère, & la lumière plus ou moins grande des astres que l'on observe, rend le foyer plus ou moins long; M. de la Condamine & M. Bouguer ont vu dans leur lunette de 12 pieds, le jeu de l'image, ou la parallaxe des fils aller à plus de 2′ 5″ dans certaines nuits, & devenir insensible d'autres fois. La respiration qui s'échappa une fois sur l'oculaire rendit

tout d'un coup la parallaxe des fils beaucoup moindre ; il paroît que dans ce cas la lunette étoit d'abord un peu trop longue, l'humidité de l'oculaire intercepta les rayons violets & bleus, qui ſe raſſembloient avant que d'arriver aux fils ; les rayons rouges, qui traverſent l'air & l'eau avec moins de réfraction que les autres, prévalurent, & le foyer devenant plus long, l'image ſe rapprocha du réticule, & diminua la parallaxe.

Pour y remédier, M. Bouguer (*pag.* 209), propoſe plusieurs moyens, principalement de faire en ſorte que l'aſtre paſſe toujours à peu de diſtance du centre de la lunette, d'employer un objectif légerement coloré de rouge ou de jaune; de reſtreindre beaucoup l'ouverture de l'objectif, & de le centrer exactement; les micromètres extérieurs dont j'ai parlé (2335), & qu'on emploie communément en Angleterre, ſont très-utiles pour diminuer les effets de cette parallaxe, en faiſant toujours paſſer l'aſtre ſur le centre de la lunette : mais le meilleur remède qu'on puiſſe y apporter, c'eſt de faire des lunettes achromatiques (2298); car comme elles n'ont point de couleurs, elles ont beaucoup moins de parallaxe. Moyen de s'en garantir.

DES OBSERVATIONS QUI SE FONT

A LA LUNETTE MÉRIDIENNE.

2600. Avant que l'on ſe ſerve d'une lunette méridienne (2387), ou inſtrument des paſſages, il faut s'aſſurer de l'exactitude de ſes différentes parties, & de leur ſituation reſpective ; pour y parvenir il y a 5 vérifications importantes. Nous allons les détailler ſucceſſivement.

Il faut d'abord faire enſorte que l'axe optique de la lunette paſſant par le fil vertical qui eſt au foyer commun des verres, ſoit exactement perpendiculaire à l'axe de la machine ; pour cet effet la lunette étant placée ſur ſes ſupports dans une ſituation à peu-près horizontale, on la dirige ſur une mire ou ſur un objet La lunette doit être à angles droits.

terreſtre bien terminé, & on la place de manière que le fil vertical du réticule coupe l'objet exactement en 2 parties égales; alors ſans toucher aux ſupports on enlève la lunette le plus doucement qu'il eſt poſſible, on la retourne de manière que le pivot qui étoit à droite ſe trouve à gauche, & l'on regarde le même objet; s'il ne ſe trouve plus coupé comme dans la ſituation précédente par le fil vertical du réticule, il faut faire faire la moitié du chemin par le fil vertical au moyen
Fig. 174. de la vis qui eſt vers l'oculaire *L* (*fig.* 174), & qui fait mouvoir le réticule au-dedans de la lunette, enſuite on corrigera le reſte de cette erreur par la vis *P* du ſupport; avec ces deux corrections, ſi on les a fait bien égales on tombera préciſément ſur le même objet dans les deux ſituations de la lunette, l'on ſera aſſuré que l'axe optique du réticule & des verres de la lunette eſt perpendiculaire à l'axe des pivots, & que la lunette décrit un grand cercle de la ſphère; au lieu que ſans cette vérification elle décriroit un petit cercle qui ne partageroit pas le ciel en deux parties égales, & qui ne pourroit former, ni le plan d'un vertical, ni celui d'un méridien. Pour faire avancer le fil de la lunette vers l'objet, comme nous venons de le dire, on ſe ſert d'une vis qui eſt placée vers l'oculaire *L* ſur le côté de la lunette & que l'on tourne avec une petite clef; cette vis conduit le chaſſis du réticule ſur lequel ſont tendus les fils, & l'oblige de ſe mouvoir de côté pour correſpondre à l'objet qui eſt dans le milieu de la lunette;
Fig. 163. à peu-près comme la vis *fg* (*fig.* 163), ſervoit à donner au chaſſis fixe du micromètre un petit mouvement de haut en bas.

2601. La raiſon de cette opération eſt évidente
Fig. 214. ſi l'on conſidère la *fig.* 214 : ſoit *A B* & *C D* deux lignes qui ſe coupent à angles droits : on voit aſſez qu'en retournant la ligne *A B* que nous conſidérons comme l'axe de la machine, la ligne *CD* qui lui eſt perpendiculaire ne changera point de ſituation; mais s'il y avoit une autre ligne *EF* inclinée du côté du pivot

A, lorſqu'on retourneroit les pivots, la ligne *FE* ſeroit auſſi retournée, elle ſe dirigeroit ſuivant *HG*, puiſque ſon inclinaiſon eſt du côté du pivot *A*, qui ſe trouveroit en *B*, c'eſt-à-dire, à droite par la nouvelle ſituation de l'axe. Ainſi il y auroit entre la première poſition *EF*, & la ſeconde poſition *GH*, une différence ou un angle *EKG* double de l'erreur *EKC*, qu'il y avoit à corriger dans la première ſituation; voilà pourquoi nous avons averti de faire ſeulement parcourir au réticule la moitié de l'eſpace *EG* que l'on appercevra entre les ſituations de l'objet dans les deux cas : cela ſuffira pour amener la lunette de la ſituation oblique *EF* à la ſituation perpendiculaire *CD*.

2602. Il faut auſſi faire enſorte que l'axe des pivots ſoit dans une ſituation bien horizontale : pour cela on ſe ſert d'un niveau à bulle d'air (2398), ou d'un ſimple fil à-plomb ; ce dernier moyen étant le plus ſimple, nous nous y arrêterons quant à préſent ; nous parlerons plus bas de l'uſage des niveaux à bulle d'air (2615). Placer l'axe horizontalement.

Si l'on peut marquer en-dehors ſur le tuyau de la lunnette une ligne de *C* en *L* (*fig.* 174), qui ſoit exactement perpendiculaire à l'axe des pivots, & qu'on mette cette ligne dans une poſition verticale au moyen du fil à-plomb ; on ſera sûr que l'axe des pivots ſera parfaitement horizontal ; or on peut faire l'un & l'autre à la fois par un ſimple renverſement. *Fig.* 174.

Il y a aux deux extrémités de la lunette de petits cylindres de cuivre qui ont une certaine ſaillie ; dans le centre de chacun eſt marqué un point, comme on le voit en *C* & en *L*, on place la lunette verticalement, & l'on ſuſpend avec de la cire un cheveu chargé d'un petit poids, ſur le point *C* qui eſt en haut ; on fait jouer la vis *V*, qui eſt à l'un des ſupports, juſqu'à ce que la lunette ſoit droite, & que le cheveu ſoit exactement ſur les deux points : alors on détache le fil, on retourne la lunette, enſorte que le point *C* qui étoit en haut ſe trouve en bas, & l'on ſuſpend de

nouveau le cheveu ſur le point ſupérieur; s'il ne tombe pas exactement ſur le point inférieur, comme dans la ſituation précédente, c'eſt une preuve que la ligne des deux points n'eſt pas perpendiculaire à la ligne des pivots ; on fera faire la moitié du chemin par la vis du ſupport, & l'autre moitié par le point lui-même, ſoit en en marquant un autre à côté, ſoit en repouſſant le cylindre d'une petite quantité. Pour cet effet, les trous dans leſquels paſſent les vis d'un de ces cylindres ſont ovales, & lui permettent un petit mouvement de droite à gauche lorſqu'on deſſerre les vis. Sur un axe de 30 pouces, avec une vis dont le filet a une demi-ligne, chaque tour change la lunette de 5′ au zénit.

2603. Quand on aura fait enſorte que la ligne des deux points ſoit parfaitement d'à-plomb dans les deux cas, on ſera sûr que l'axe eſt parfaitement horizontal; car ſi l'axe n'étoit pas perpendiculaire à cette ligne des

Fig. 214. deux points, il eſt aiſé de voir par la *fig.* 214, que dans ce cas la ligne des points prendroit une poſition *EF*; & dans l'autre cas une poſition *GH*; ainſi elle ne ſauroit être à-plomb dans le renverſement de la lunette après avoir été à-plomb dans la première poſition ; il n'y a que la ſeule ligne *CD* qui puiſſe être verticale dans les deux cas. Lorſqu'au moyen de la ligne *CD*, on a placé l'axe bien horizontalement, on eſt sûr que l'axe optique de la lunette qui lui eſt perpendiculaire (2600), décrit exactement un vertical. Lorſqu'on ſe ſervira du niveau à bulle d'air pour rendre l'axe parfaitement horizontal, on aura recours à l'article du niveau (2616).

Troiſième vérification.

2604. Quand on eſt aſſuré par les deux vérifications précédentes que la lunette méridienne en tournant ſur ſon axe décrit un grand cercle (2600), & que ce grand cercle eſt un vertical (2603), il faut faire enſorte que ce vertical ſoit le méridien même, c'eſt-à-dire, qu'il paſſe par le pole du monde. Si l'on a la liberté de faire tourner la lunette méridienne juſqu'au nord vers les

Par les étoiles circompolaires.

étoiles circompolaires, on ſe procure très-aiſément cette vérification ; on obſerve les paſſages d'une même étoile

au-deſſus & au-deſſous du pole, & ſi les intervalles de temps ſont égaux, c'eſt une preuve que la lunette paſſe exactement par le pole, & qu'elle tourne dans un cercle de déclinaiſon, ce qui forme la condition la plus importante de cette ſorte d'inſtrument; or l'on a vu que le cercle décrit par la lunette paſſe auſſi au zénit, donc ce cercle eſt véritablement le méridien.

2605. Si l'on n'a pas la facilité d'obſerver les étoiles circompolaires, on ſe ſervira ou des hauteurs correſpondantes ou des différences de paſſages entre des étoiles connues. En ſuppoſant les deux premières vérifications bien exactes; il ſuffira de mettre la lunette dans le méridien en un ſeul point, pour qu'elle y ſoit dans tous les autres; en effet puiſque la lunette eſt perpendiculaire à l'axe des pivots, & que cet axe eſt bien horizontal, la lunette eſt toujours dans le même plan vertical, & décrit un cercle qui paſſe par le zénit; ſi ce vertical concourt avec le méridien dans un ſeul point, ils ſeront d'accord dans toute la circonférence du ciel.

Il ſuffit donc de prendre des hauteurs correſpondantes du ſoleil (2578), dans un jour quelconque, pour déterminer l'inſtant du midi vrai; on obſervera le même jour avec la lunette méridienne les deux bords du ſoleil au fil du milieu, d'où l'on déduira le paſſage du centre du ſoleil; ſi c'eſt à une ſeconde près la même choſe que le midi vrai déduit des hauteurs correſpondantes, on ſera aſſuré que l'inſtrument eſt bien placé; je dis à 1″ près, car il ne faut pas eſpérer une préciſion plus grande que celle de 1″ de temps ſur 90°.

Par des hauteurs correſpondantes.

2606. On obſerve alors dans l'horizon ſur un mur ou ſur un clocher quelque marque diſtincte ſur laquelle on apperçoive le fil de la lunette; cet objet terreſtre placé dans le méridien ſert à reconnoître ſi la lunette ne s'eſt point dérangée, à la remettre dans le méridien en cas d'accident, à corriger, ſi l'on veut, à chaque obſervation les petites inégalités que la chaleur aura pu y cauſer (2609), ou du moins à en tenir compte dans les obſervations.

Par les différences de passages.

2607. Lorsqu'on est assuré que la lunette méridienne décrit un vertical, on peut, au moyen de deux étoiles dont la différence d'ascension droite est connue, trouver sa déviation dans tous les points. Soit *PZBDH* (*fig.* 215), le méridien; *P* le pole, *Z* le zénit, *ZCIO* le vertical que décrit la lunette, *HO* l'arc de sa déviation dans l'horizon, *BC* & *DF* les parallèles de deux étoiles fort éloignées l'une de l'autre en déclinaison, comme de 40 à 50°; *PCE* le cercle de déclinaison qui passe par le pole du monde & par l'étoile *C* au moment où elle est au fil de l'instrument; la seconde étoile arrivera au point *E* après un intervalle de temps qui est connu, parce qu'il est égal à la différence d'ascension droite des deux étoiles convertie en temps; ainsi l'on connoît l'instant où la seconde étoile devroit arriver au point *E*; on observera l'instant où elle arrivera en *F* au fil de l'instrument; la différence est le temps mesuré par l'arc *EF*; j'appelle *t* ce nombre de secondes de temps, d'où il est aisé de conclure la valeur de l'arc *HO* qui est $\frac{15 . t . \text{fin}. PD . \text{fin}. PB}{\text{fin}. BD . \text{fin}. PZ}$, en secondes de degrés. Pour l'avoir avec plus d'exactitude, il faut choisir des étoiles qui rendent *PB* fort petit & *PD* à peu-près de 90°. Connoissant la distance des objets sur lesquels tombe la lunette pointée dans l'horizon, & la grandeur de ces objets, il est aisé de savoir à combien de pouces on doit faire répondre la lunette à droite ou à gauche, pour changer son vertical de la quantité *HO* qu'on a trouvée par la formule précédente; on peut aussi par la mesure des pas de la vis *A* (*fig.* 173), ou *P* (*fig.* 174), savoir de combien il faut tourner cette vis pour faire avancer l'axe, & par conséquent la lunette, d'une certaine quantité: si l'on appelle *l* le nombre de pouces que contient l'axe de la machine, *u* le nombre de filets qu'il y a dans un pouce de la vis, *e* l'erreur *HO* en secondes de degrés, trouvée par la formule précédente, & qu'un tour de vis soit supposé divisé en 100 parties; on aura $\frac{elu}{2063}$ pour le nombre de

de centièmes dont il faut tourner la vis du ſupport pour mettre l'inſtrument dans le méridien.

2608. Dans l'uſage ordinaire de la lunette méridienne ſi le fil vertical auquel on obſerve les paſſages n'eſt pas exactement dans le méridien, & que les deux aſtres paſſent un peu plus haut l'un que l'autre, la différence des paſſages ne ſera pas la vraie différence d'aſcenſion droite. Soit *C fig.* 215 l'un des aſtres obſervés, *CF* la petite portion du vertical qui eſt dans la lunette; *EF* eſt la différence qu'il y a du vertical au cercle de déclinaiſon dans ce point-là. Dans le triangle ſphérique *ZPC* l'on a ſin. $C = \frac{\text{ſin. } P \text{ ſin. } PZ}{\text{ſin. } ZC}$ donc $EF = CF$ ſin. $C = \frac{CF \text{ ſin. } P \text{ ſin. } PZ}{\text{ſin. } ZC}$, & ſur l'équateur $= \frac{CF \text{ ſin. } P \text{ ſin. } PZ}{15 \text{ ſin. } ZC \text{ ſin. } PC}$; c'eſt le temps qu'il faut ôter du paſſage de l'aſtre qui eſt le plus bas, ſi c'eſt après lé paſſage au vrai méridien. Cette quantité eſt auſſi égale à la parallaxe d'aſcenſion droite qui auroit lieu en ſuppoſant *CF* égale à la parallaxe de hauteur (1645); mais cette correction doit s'appliquer indépendamment de celle de la parallaxe d'aſcenſion droite, qui pour la lune auroit également lieu dans ce cas-là. *Fig.* 215.

2609. Quoiqu'on ait mis la lunette exactement dans le méridien, par les méthodes précédentes, on n'eſt point aſſuré qu'elle y demeurera toujours; l'action du ſoleil & de la gelée ſur les murs des bâtimens fait changer la ſituation & la figure des édifices les plus ſolides; on en a vu une preuve bien ſenſible dans les expériences de M. Bouguer aux Invalides (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 262); les nuages en ſe briſant un jour laiſſèrent paſſer tout-à-coup quelques rayons du ſoleil; à l'inſtant même la lunette qui étoit ſuſpendue par une chaîne de $187^{p}\frac{1}{2}$ au dôme de l'égliſe, parut changer de direction; c'étoit à la vérité d'une quantité fort petite, mais auſſi ce n'étoit qu'un inſtant & dans un lieu d'une température extrêmement égale; les différences doivent être bien plus conſidérables dans d'autres circonſtances.

Changemens accidentels dans la ſituation.

2610. Lorfqu'on voit dans la fituation de la lunette un petit dérangement $HO = e$, qui ne vaut pas la peine de toucher aux fupports (2393), on peut, en fuivant la même formule, calculer l'erreur qui doit en réfulter fur la différence d'afcenfion droite obfervée à l'inftrument, c'eft-à-dire, la petite quantité $EF = t = \frac{e \text{ fin. } BD \text{ fin. } PZ}{15 \text{ fin. } PD \text{ fin. } PB}$. Je fuppofe que l'axe eft toujours exactement de niveau, c'eft-à-dire, que le dérangement ne tombe que fur la fituation de la lunette de droite à gauche, ou qu'au moins on a corrigé par le niveau celle qui a lieu de haut en bas.

Quatrième vérification.

2611. Un des fils de la lunette doit être exactement vertical, afin qu'on puiffe obferver indifféremment les paffages des aftres à la partie fupérieure, inférieure ou moyenne de la lunette; pour s'en affurer, on fufpendra à une certaine diftance fur un fond noir une ficelle blanchie avec de la craie, chargée d'un petit poids pour lui donner une fituation verticale; on regardera cette ficelle par la lunette, & l'on verra fi le fil la cache exactement dans tous fes points; fi le fil paroît être un peu oblique on defferrera les vis *H* & *K* qui ferrent les collets des porte-lunettes (*fig.* 174), & l'on tournera tant foit peu la lunette, après quoi l'on refferrera les vis; mais l'on examinera avec foin fi en les refferrant il n'en réfulte pas quelque dérangement fur les objets des vérifications précédentes (2600 *& fuiv.*); il conviendroit même de faire cette vérification avant toutes les autres, à raifon du dérangement que l'on peut caufer à la lunette dans cette opération; mais comme c'eft la moins effentielle, nous avons cru devoir la mettre après les autres.

Fig. 174.

Cinquième vérification.

2612. La dernière vérification que l'on doit faire dans une lunette méridienne, confifte à favoir fi les fils du réticule font bien au foyer de l'objectif pour les objets céleftes, car fans cela on ne diftingueroit pas, de nuit, le moment où une étoile paffe derrière le fil, & l'on continueroit de la voir, à peu-près comme fi le fil n'y étoit pas. Pour cela, on attendra au méridien une

étoile de la première grandeur dans le crépuscule du soir, on lui fera suivre le fil horizontal, on examinera si en élevant l'œil & en l'abaissant, l'étoile continue d'être exactement sur le fil, ensorte qu'il n'y ait aucune parallaxe; le fil doit paroître distinctement sur l'étoile, & ne pas diminuer de largeur dans la partie qui est sur l'étoile; dans ce cas on sera assuré que l'objectif est bien placé, sinon il aura besoin d'être retiré ou renfoncé d'une certaine quantité.

2613. Le principal usage de la lunette méridienne consiste à observer les différences d'ascension droite entre deux astres avec une grande facilité; on évite par son moyen la méthode pénible des hauteurs correspondantes, & l'on obtient la même précision, si la lunette décrit exactement le méridien ou du moins un cercle de déclinaison qui en soit fort proche, & dont on connoisse la déviation par des hauteurs correspondantes. Il suffit alors d'observer l'heure, la minute, la seconde, &, s'il est possible, le quart de seconde où chacun des deux astres passe au fil du milieu; on corrige les deux temps par la déviation qui convient à la hauteur de chacun des deux astres; la différence convertie en degrés, suivant la marche de l'horloge, donnera la différence d'ascension droite (2505). Usage de la lunette méridienne.

On se sert aussi de la lunette méridienne pour régler l'horloge des observations: si une étoile qui a passé au méridien à $8^h 53' 56''$, & qui devoit passer le lendemain à $8^h 50' 0''$, passe à $8^h 50' 2''$, c'est une preuve que l'horloge marque $2''$ de trop & qu'elle avance de $2''$ par jour. Si l'on se sert du soleil, je suppose que le 2 Janvier 1772, le soleil passe $26''$ plus tard à la lunette méridienne que le 1 Janvier, on trouve par le calcul de l'équation du temps (967) ou par le livre de la *Connoissance des temps* qu'il doit passer $28''$ plus tard, on en conclud que l'horloge marque $2''$ de moins, & par conséquent a retardé de $2''$ en 24 heures.

2614. On met dans le réticule d'une lunette méridienne deux fils verticaux aux deux côtés du fil horaire Réduction au fil du milieu.

qui eſt dans le milieu de la lunette, de ſorte que l'aſtre paſſant ſucceſſivement à ces trois fils parallèles, on puiſſe vérifier l'obſervation du milieu, & la ſuppléer ſi elle venoit à manquer. Pour réduire au centre les paſſages obſervés aux fils collatéraux, il faut ſavoir combien les aſtres doivent employer de temps à aller d'un fil à l'autre ſuivant leurs différens degrés de déclinaiſon; ſuppoſons qu'on trouve une minute de différence par le moyen d'une étoile qui eſt dans l'équateur, & qu'on veuille ſavoir combien employeront les étoiles qui ſont à 30° de déclinaiſon, on diviſera 60″ par le coſinus de 30°, & l'on aura 69″ 3, c'eſt le temps que ces étoiles employeront à aller d'un fil à l'autre. De même ſi l'on a obſervé qu'un aſtre à 20° de déclinaiſon employoit 64″ à aller d'un fil à l'autre, ou multipliera 64″ par le coſinus de 20°, & l'on aura 60″, temps qu'employent les étoiles ſituées dans l'équateur pour aller d'un fil à l'autre; tout cela eſt une ſuite de l'art. 892.

Du Niveau à bulle d'air.

2615. Le fil à-plomb eſt un moyen très-ſûr & très-exact de trouver la ligne du niveau ou la ligne horizontale (2602); cependant les niveaux à bulle d'air, quand ils ſont bien faits, ſont encore plus exacts; ils ont l'avantage d'être beaucoup plus commodes, parce qu'ils ſont à l'abri des oſcillations que cauſe dans le fil à-plomb la moindre agitation de l'air; auſſi voyons-nous qu'on les a appliqués quelquefois en Angleterre à de petits quarts-de-cercles pour tenir lieu du fil à-plomb, & Graham les a employés pour vérifier les grands quarts-de-cercles de 8 pieds qui ſont à l'obſervatoire de Gréenwich (2592).

Vérification du niveau & de l'axe des paſſages.

2616. Pour niveler promptement l'axe autour duquel tourne la lunette méridienne, on doit d'abord préſenter le niveau dans les deux ſens, & marquer l'endroit où tombe à chaque fois le centre de la bulle d'air;

le milieu de ces deux points eſt celui où elle doit tomber quand l'axe ſera horizontal ; il ne s'agit donc que de tourner la vis *V* du ſupport (*fig.* 174) pour élever le pivot juſqu'à ce que la bulle d'air vienne à ce point du milieu qu'on a marqué ſur le tube, après avoir retourné le niveau. *Fig.* 174.

Cela ſuppoſe que le niveau ſoit bien diſpoſé, & bien réglé ; car ſi la bouteille ou le tube du niveau n'eſt pas parallèle à ſes ſupports, on trouvera une erreur plus grande qu'auparavant en retournant le niveau ; & par-là on reconnoîtra que c'eſt le niveau, & non pas l'axe que l'on devoit faire varier le premier.

2617. Si je veux rectifier le niveau le premier, je fais venir la bulle dans le point qui tient le milieu entre les deux points où elle venoit dans le premier retournement, & cela en tournant la vis *C* du niveau (*fig.* 175), & le niveau ſe trouve réglé indépendamment de l'axe. Pour vérifier l'axe à ſon tour, je retourne le niveau une ſeconde fois, & marquant auſſi ſur le tube les deux points où vient la bulle dans le ſecond retournement, je fais venir la bulle au milieu de ces deux points, en tournant la vis *V* du ſupport (*fig.* 174). Par ce moyen l'on a, tout comme dans l'article précédent, la vérification réciproque & complète de l'axe & du niveau ; la raiſon de ces procédés peut ſe concevoir ſi l'on examine la *fig.* 214, dont on a vu l'explication (2601). Ce que nous avons dit au ſujet du niveau à bulle d'air doit s'entendre du niveau où il y auroit un fil à-plomb ; l'uſage en eſt le même. *Fig.* 175.

DES OBSERVATIONS FAITES
A LA LUNETTE PARALLATIQUE.

2618. L'uſage de cette machine (2400), conſiſte 1°. à trouver dans le ciel un aſtre que l'on n'apperçoit pas à la vue ſimple (2622) ; 2°. à ſuivre d'une manière facile & commode le mouvement diurne des aſtres ; 3°. à obſerver les différences d'aſcenſion droite Uſages de la Lunette parallatique.

& de déclinaison hors du méridien, avec le réticule qu'on y applique (2604).

Placer l'axe dans le méridien.

La première vérification d'une lunette parallatique consiste à mettre l'axe dans le plan du méridien. Pour cela on dirige la lunette vers une étoile qui soit du côté de l'orient 6 heures avant son passage au méridien; & l'on fait passer l'étoile au centre de la lunette. Lorsque l'étoile est à l'occident 6 heures après son passage au méridien, & 12 heures après la première observation, on tourne la lunette vers l'étoile, sans changer la position de l'axe ni la déclinaison de la lunette, & si l'étoile se trouve ne passer plus par le centre des fils, c'est une preuve que l'axe est un peu trop à l'orient ou à l'occident; on le tournera donc ou vers l'orient ou vers l'occident, ensorte que par le mouvement l'étoile soit rapprochée du centre de la lunette, de la moitié de la quantité dont elle en aura paru éloignée vers le nord ou vers le sud dans la seconde observation; on sera sûr alors que l'axe est exactement dans le méridien. Cette vérification est indépendante de la réfraction, & même de l'erreur qu'il peut y avoir dans l'inclinaison de l'axe; car cet axe pourroit être incliné trop ou trop peu, d'un demi-degré, sans que l'étoile cessât de passer à peu-près par le centre de la lunette à 90° du méridien, parce que le parallèle que décriroit la lunette autour d'un axe trop ou trop peu élevé, passe sensiblement par le même point que le vrai parallèle, pourvu que l'axe de la machine ne differe pas trop du véritable axe du monde; & si l'étoile est dans l'équateur la différence devient tout-à-fait nulle.

Placer l'axe à la hauteur du pole.

2619. Lorsque par cette première vérification l'on aura amené l'axe de la lunette parallatique dans le plan du méridien, il faudra examiner si l'axe est au degré d'inclinaison convenable à la hauteur du pole, c'est-à-dire, s'il fait avec l'horizon le même angle que l'axe de la terre; pour cela on dirigera le centre de la lunette vers une étoile, 6 heures avant son passage au méridien; & si le même astre passant au méridien six heures après,

ſe trouve paſſer encore par le centre de la lunette dont la déclinaiſon n'a point changé, c'eſt une preuve que l'axe eſt à ſon élévation convenable. Si l'étoile en paſſant au méridien paroît dans la lunette au-deſſus du centre, c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit véritablement au-deſſous, il faudra élever le ſommet de l'axe, c'eſt-à-dire, augmenter l'angle qu'il fait avec l'horizon juſqu'à ce que l'étoile ſe rapproche du centre de la lunette, de la moitié de la quantité dont elle en eſt éloignée à ſon paſſage au méridien : on ſe ſert pour cela de la vis *N* (*fig.* 176) qui eſt au bas de l'axe près du cercle équatorial *KCO*. Je néglige ici l'effet de la réfraction dont on pourroit cependant tenir compte en ſuivant les principes de l'article 2546. *Fig.* 176.

2620. Quand on eſt aſſuré de la ſituation de l'axe, il faut, au moyen d'un niveau *P*, d'un fil à-plomb *rR* & de deux lignes tracées ſur une table fixe ou ſur le pavé le long des règles *BK* & *DE*, s'aſſurer les moyens de replacer la machine dans la même poſition, lorſqu'elle aura été déplacée ou tranſportée d'un endroit à l'autre.

On s'aſſurera enſuite de la ſituation des deux alidades, dont l'une marque les heures, & l'autre les déclinaiſons. Pour vérifier l'alidade des heures, on obſervera le paſſage du ſoleil au fil horaire de la lunette, l'alidade étant placée ſur midi; par le moyen d'une horloge réglée, on verra ſi le ſoleil y a paſſé au moment du midi vrai ; dans le cas où il y auroit une différence, on lâchera les vis qui ſerrent l'alidade *CO* autour de l'axe de la machine; & comme elles paſſent dans des trous ovales, on fixera aiſément cette alidade ſur le point de midi, en faiſant paſſer le ſoleil au milieu de la lunette au moment du midi, qui ſera indiqué ſur l'horloge à ſecondes; on pourra faire cette opération à toute autre heure que midi, par exemple, à trois heures, pourvu que le ſoleil ſoit au milieu de la lunette à l'inſtant où l'horloge marque trois heures. Vérification des alidades.

2621. Pour vérifier l'alidade *IV* des déclinaiſons,

on dirigera la lunette vers une étoile qui ſoit au nord de l'équateur, & vers une autre qui ſoit au midi ; ſi l'alidade marque exactement la déclinaiſon de chacune, telle qu'on la connoît par les hauteurs méridiennes (2582) ou par les catalogues d'étoiles, on ſera sûr que l'alidade eſt bien placée ; ſi elle eſt mal placée, l'une des déclinaiſons paroîtra trop grande & l'autre trop petite ; alors on lâchera les vis qui tiennent l'alidade *IV* ou le Vernier des déclinaiſons attaché ſur la mâchoire *S* qui eſt au ſommet de l'axe, & l'on changera l'index de la quantité dont il a été trouvé en erreur par les deux étoiles obſervées.

Trouver un aſtre pendant le jour.

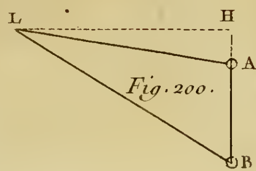
2622. Quand on veut obſerver un aſtre pendant le jour avec la lunette parallatique, c'eſt-à-dire, chercher un aſtre qu'on ne voit pas, ce qui eſt très-néceſſaire & très-fréquent ; on calcule ſon angle horaire (1008), on tourne l'axe & la lunette juſqu'à ce que l'alidade des heures *CO* marque ſur le cercle équatorial l'angle horaire de l'aſtre ou ſa diſtance actuelle au méridien ; on incline auſſi la lunette *LL* ſur ſon axe, enſorte que l'alidade *IV* marque ſur ſon demi-cercle la déclinaiſon de l'aſtre qu'on veut obſerver ; dans cet état, l'on verra l'aſtre cherché au milieu de la lunette, ſi toutes les vérifications précédentes ont été bien faites. Seulement dans les petites hauteurs la réfraction peut faire paroître l'aſtre un peu plus bas dans la lunette, mais cela n'empêchera pas qu'on ne le trouve aiſément, l'effet des réfractions étant ordinairement moindre que le champ de la lunette.

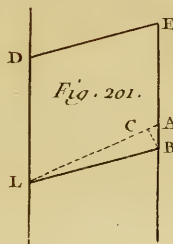
Obſervations journalières.

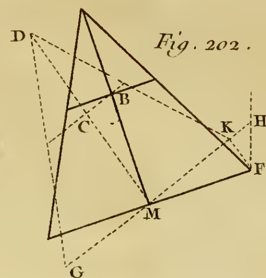
2623. Je terminerai ce traité des obſervations aſtronomiques par un expoſé ſuccinct des objets qui méritent le plus l'attention des aſtronomes. On trouve chaque année dans la *Connoiſſance des temps* le détail des choſes qui ſe préſentent à obſerver, mais il ne ſera pas inutile de rappeller ici en peu de mots tout ce que l'on peut faire journellement pour le progrès de l'aſtronomie.

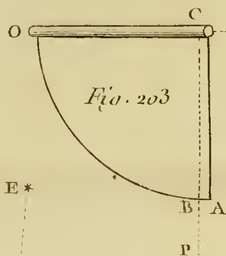
Les conjonctions de la lune aux étoiles & leurs occultations, arrivent preſque tous les jours, & fourniſſent des occaſions continuelles de déterminer les longitudes

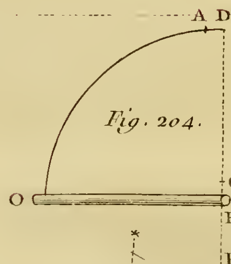
des


L
H
A
B
Fig. 200.


E
D
Fig. 201.
C
A
B
L

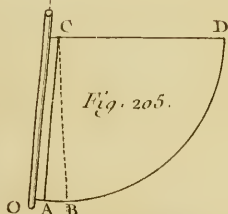

D
Fig. 202.
B
C
K
H
F
M
G

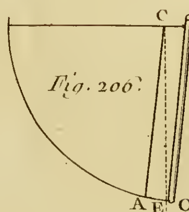

C
O
Fig. 203
B
A

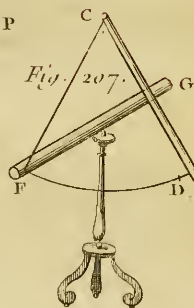

A D
Fig. 204.
C
O
E

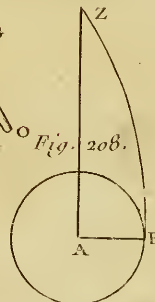

M

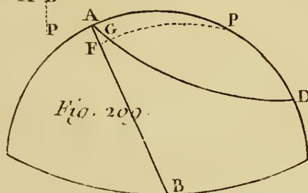

N

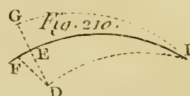

C
D
Fig. 205.
O
A
B

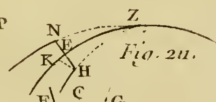

C
Fig. 206.
A
E
O

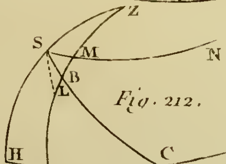

C
Fig. 207.
G
F
D
O

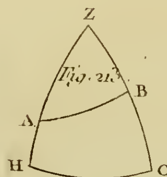

Z
Fig. 208.
A
B

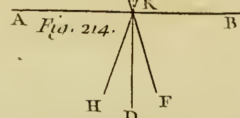

A
P
G
F
Fig. 209.
D
B

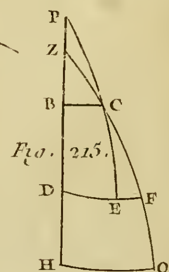

G
Fig. 210.
E
F
D
P


N
Z
E
K
H
Fig. 211.


Z
S
M
N
B
L
Fig. 212.
H
C


Z
Fig. 213.
B
A
H
O


E
C
G
K
A
Fig. 214.
B
H
D
F


P
Z
B
C
Fig. 215.
D
E
F
H
O

des lieux (1970), & de perfectionner les tables de la lune ; les paſſages de la lune au méridien doivent être également une obſervation journalière (3937).

Les éclipſes des ſatellites de Jupiter ſervent de même aux longitudes (3968) ; leur théorie a également beſoin d'être perfectionnée ; c'eſt ſur-tout dans les limites & dans les nœuds qu'ils doivent être obſervés (2942, 2964).

Les oppoſitions des planètes ſupérieures ; ce ſont les temps les plus favorables pour connoître leurs longitudes vues du ſoleil, pour déterminer leurs mouvemens, & rectifier leurs tables (1152, 1201).

Les conjonctions de Vénus produiſent le même effet pour la théorie de cette planète (1201).

Les plus grandes digreſſions de Vénus & de Mercure, fourniſſent les ſeuls moyens de déterminer le mouvement de l'aphélie & l'excentricité de l'orbite (1286, 1318).

Les paſſages des planètes par leurs nœuds, & par leurs limites fourniſſent un moyen de déterminer les nœuds & les inclinaiſons de leurs orbites (1332, 1356).

Les paſſages des planètes par leurs apſides, ſervent à déterminer leurs excentricités (1268, 1295).

Les conjonctions des planètes aux étoiles fixes, ſurtout celles de Mars en oppoſition, peuvent déterminer ſa parallaxe (1736), & les variations qu'on a attribuées à ſon atmoſphère (2272).

Les hauteurs ſolſticiales du ſoleil ſervent pour déterminer l'obliquité de l'écliptique & ſes variations (2726).

Les hauteurs méridiennes du ſoleil pour déterminer les réfractions (2215), & pour trouver le moment où il paſſe par les équinoxes (883), & les parallèles des principales étoiles.

Les différences d'aſcenſions droites entre le ſoleil & les étoiles fixes, quand il paſſe ſur leurs parallèles (872), pour déterminer les longitudes du ſoleil & celles des étoiles, pour former les catalogues (724), & rectifier les tables du ſoleil.

Les positions des étoiles fixes sont nécessaires pour avoir leurs mouvemens propres & leurs dérangemens (2747); pour étendre le catalogue des étoiles, encore très-incomplet, sur-tout par rapport aux étoiles du nord (726).

L'observation des nébuleuses dont le catalogue est encore incomplet (841), & qu'il est nécessaire de connoître quand on veut chercher des comètes (3002).

Les taches de la lune pour déterminer sa libration & la position de son équateur (3205), de même que celles du soleil pour en mieux connoître la rotation (3163).

L'anneau de Saturne, quand il est dans sa plus grande & dans sa moindre phase, pour connoître son inclinaison & ses nœuds (3230).

Les satellites de Saturne; les taches & les rotations des planètes qu'on a si peu & si rarement observées (3219 *& suiv.*).

Les périodes de lumière des étoiles changeantes de la Baleine & du Cygne, & de beaucoup d'autres étoiles que nous croyons sujettes aux mêmes variations (786 *& suiv.*).

Les comètes que l'on rencontreroit peut être bien souvent, si l'on prenoit la peine de les chercher (2510, 3002).

2624. Les personnes qui ne sont pas à portée d'avoir des instrumens de prix peuvent encore faire diverses observations utiles; les plus importantes exigent seulement qu'on ait l'heure avec exactitude, c'est-à-dire, une horloge à pendule, & un quart-de-cercle pour prendre des hauteurs correspondantes; mais ce quart-de cercle peut se faire en bois sans difficulté, comme sans art.

Il seroit avantageux que les occultations d'étoiles & les éclipses des satellites, si utiles aux longitudes, fussent ainsi observées assidument par les curieux qui habitent dans les pays méridionaux, où le beau temps fournit des occasions continuelles de contribuer au progrès de l'astronomie, tandis que les observatoires de Paris & de Gréenwich sont ensevelis une partie de l'année dans les brouillards ou dans les nuages.

LIVRE QUINZIEME.

DE LA GRANDEUR ET DE LA FIGURE DE LA TERRE.

2625. LA terre que nous habitons eſt de toutes les planètes celle qu'il nous importe le plus de connoître, car ſa grandeur abſolue doit ſervir d'échelle & de terme de comparaiſon pour toutes les autres grandeurs que nous avons à meſurer ; comme on l'a vu dans le traité des parallaxes (1746). Si nous avons différé juſqu ici à parler de la terre, c'eſt que la détermination exacte de ſa figure, telle qu'on a voulu l'avoir dans ces derniers temps, ſuppoſe la connoiſſance & l'uſage des meilleurs inſtrumens d'aſtronomie, dont le XIIIe. livre renferme la deſcription :

Nous avons déja indiqué la manière dont on s'y eſt pris autrefois, pour connoître la grandeur de la terre (38), ou celle d'un de ſes degrés; il ſuffit de ſavoir combien il y a de lieues, ou de toiſes entre le lieu *P* (*fig.* 216) qui voit une étoile *E* à ſon zénit, & le lieu *A* où la même étoile paroît éloignée du zénit d'un degré ; & d'où l'on voit le ſoleil à midi plus ou moins élevé d'un degré que dans le lieu *P* ; c'eſt ce que firent autrefois Eratoſthène & Poſidonius (40, 350, 359); mais avec peu d'exactitude. *Pl. XXX. Fig. 216.*

Sentiment des anciens ſur la grandeur de la terre.

2626. Le ſtade étoit, ſuivant Pline, de 625 pieds, (L. II. c. 23). Or le pied Romain antique étoit de 10P. 10lig. 9 (Voyez M. de la Condamine, *Mém. acad.* 1757, *pag.* 363, 410); donc le ſtade de Pline étoit de $94\frac{3}{4}$ toiſes. Or ſuivant Pline, le degré de la terre eſt de 700 ſtades ; donc ſi ce ſont des mêmes ſtades, on a 66 mille toiſes pour le degré, ſuivant l'opinion de Pline, au lieu de 57 mille que nous trouvons aujourd'hui (2651), enſorte que nos meſures font le diamètre de

la terre plus petit d'un ſeptième que les meſures des anciens, c'eſt-à-dire, d'Eratoſthène. Cependant comme la valeur des ſtades Grecs & Egyptiens eſt fort équivoque, on peut voir à ce ſujet le P. Riccioli, *Geographia reformata*, & les mémoires de l'académie des Inſcriptions, tom. XVIII. *pag.* 346, tom. XXIV. *pag.* 506, tom. XXVI. *pag.* 92, &c.

2627. Au lieu du ſtade Romain, l'on a cru qu'il falloit choiſir les ſtades Egyptiens pour faire cadrer les opérations des anciens avec les nôtres. Le nilomètre du caire ou le devakh qui ſert à meſurer la crue des eaux du Nil eſt marqué ſur une ancienne colonne de marbre, placée dans une iſle entre deux bras du Nil vis-à-vis du Caire; ce devakh eſt la meſure la plus authentique & la mieux conſervée qui nous reſte de l'antiquité. Suivant M. Greaves, la coudée de ce nilomètre à 1 pied, 824, meſure d'Angleterre; ſuivant M. le Roi, 20P. 544 meſure de Paris; d'où il ſuit que le ſtade de 600 pieds Egyptiens devoit avoir 114 toiſes, c'eſt celui que M. Fréret applique à la meſure d'Eratoſthène (350); il s'en ſuivroit que le degré, ſuivant les anciens, étoit de 79891 toiſes, au lieu de 56820 que nous trouvons actuellement pour la latitude d'Alexandrie, il eût été trop grand de $\frac{3}{7}$ de ſa véritable valeur.

2628. M. le Roy, de l'académie des Inſcriptions, dans un mémoire intitulé : *Recherches ſur les meſures Grecques, p.* 41 ([a]), choiſit comme la plus exacte une ancienne meſure de la terre, attribuée à Poſidonius qui donnoit 500 ſtades au degré, c'eſt celle qui fut adoptée par Marin-de-Tyr, & par Ptolomée; M. le Roy croit qu'elle étoit en ſtades Egyptiens, qu'il évalue à 684 $\frac{4}{7}$ pieds; ainſi les 500 ſtades feroient 57067 toiſes, & cette meſure du degré ſeroit d'une exactitude bien ſingulière. » Cependant (dit M. le Roy) ſuppoſer qu'Era-» toſthène ſe ſervît du ſtade Grec qui étoit de 569P, ce

([a]) Voyez auſſi *Les Ruines des plus beaux Monumens de la Grèce*, par M. le Roy, chez Muſier fils, 1770, 2 vol. in-folio.

» feroit fuppofer qu'il fe trompa groffiérement dans fa » mefure » examinons un inftant, fi cette derniere fuppofition n'eft pas extrêmement vraifemblable.

Le P. Riccioli (*Geog. ref. pag.* 144) eftime que cette opinion de 500 ftades pour le degré venoit de Pofidonius; il avoit trouvé par la hauteur de Canopus, que l'arc compris entre Rhodes & Alexandrie étoit la 48e. partie du cercle (40), il croyoit fur le rapport d'Eratofthène que la diftance de ces deux Villes étoit de 3750 ftades, il en conclud le degré de 500 ftades; mais pour faire voir combien il y avoit peu d'exactitude dans les données, & peu de certitude dans le réfultat, il n'y a qu'à confidérer deux chofes : la première, c'eft que la diftance de Rhodes à Alexandrie, qu'Eratofthènes trouva de 3750 ftades, avoit été jugée de 4 milles ou de 5000 par les navigateurs de ce temps là, & que cependant Eratofthène n'avoit pu la mefurer lui-même au travers de la mer; Cléomède en rapportant cette opinion d'Eratofthène (*Cyclicæ theoriæ*, *c.* 10) & Pline (v. 31), ne difent pas qu'il l'eût mefurée, ce qui en effet, étoit impoffible de fon temps; Strabon (L. II, *pag.* 125), dit bien qu'il l'avoit mefurée par le moyen du gnomon, mais on voit affez que Strabon confond la mefure de l'arc célefte avec celle de la longueur itinéraire; la première à la vérité pouvoit bien fe faire avec les gnomons, mais la feconde n'y avoit aucun rapport.

2629. La feconde obfervation qui prouve que cette mefure n'avoit aucune précifion, ni aucune certitude, c'eft que la diftance de Rhodes à Alexandrie que Pofidonius fuppofoit de $7° \frac{1}{2}$ en nombres ronds, n'eft tout au plus que de $5° \frac{1}{4}$, fuivant les obfervations de M. de Chazelles, puifque la latitude de Rhodes eft de 36° 28′ 30″, & celle d'Alexandrie 31° 11′ 28″ (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 172); ainfi il y avoit près d'un tiers d'erreur dans cette partie de la mefure. C'eft donc marquer, ce me femble, trop de confiance dans les anciennes opérations, que de chercher à déterminer la

valeur des anciennes mesures par les opinions des anciens sur la grandeur du degré.

2630. Eratosthène jugeoit le degré de 700 stades, mais cette mesure supposoit 5000 stades d'Alexandrie à Syene (350), & un intervalle entre ces deux villes de la cinquantième partie d'un cercle, ou de 7° 12′; or l'on étoit fort peu sûr de cette distance itinéraire de 5000 stades, jusqu'au temps ou Néron la fit mesurer par des arpenteurs; (Pline VI, 29), & à l'égard de l'arc céleste compris entre ces deux villes, il étoit certainement plus grand de près d'un demi-degré qu'Eratosthène ne le supposoit; ainsi l'on a bien pu être alors dans l'erreur sur la valeur du degré; & si l'opinion de Ptolomée (2629), se trouve cadrer avec nos mesures, c'est certainement par la compensation fortuite de deux erreurs considérables, dans les anciens, plutôt que par l'erreur que nous pouvons commettre dans la réduction de leurs stades. M. Picard observe que la grandeur du degré estimée par les anciens, a toujours été en diminuant; au temps d'Aristote, c'étoit 1111 stades, elle fut réduite à 700 par Eratosthène, à 666 par la première mesure de Posidonius, & à 500 par ceux qui suivirent; les Arabes diminuèrent encore cette évaluation.

2631. Suivant Abulfeda, dans ses *Prolègoménes*, la mesure qui fut faite par ordre d'Almamon dans les plaines de Sinjar (382), donna le degré de 56 milles $\frac{2}{3}$, que M. Picard évalue à 47188 toises.

2632. Ainsi, suivant les suppositions de M. Picard, la mesure d'Almamon, 56 milles $\frac{2}{3}$ valoit 47188 toises.

Celle de Fernel, 68096 pas Géométriques 56746
De Snellius, 28500 perches du Rhin... 55021
De Norwood, 367200 pieds Anglois... 57424
De Riccioli, 64363 pas de Bologne.... 62900

Fernel au commencement de sa Cosmothéorie, rapporte la mesure qu'il avoit faite lui-même en 1550, (454) & qui revient à 56746 toises $\frac{2}{3}$. La mesure de

Snellius (489), publiée en 1617, donne 55021 (*Eratosthènes Batavus*). Norwood en 1635 mesura le degré entre Londres & Yorck, & sa mesure se réduit à 57424 toises (*The Seaman's practice*), cette quantité approchoit fort du vrai, mais cela n'empêcha pas le P. Riccioli de supposer le degré de 64363 pas de Bologne, ou environ 62900 toises, (*Geog. ref. pag.* 169). Voy. aussi son *Almagestum II*, 585), où il rapporte les différens résultats des anciennes mesures de la terre.

2633. La mesure de Riccioli étoit trop grande de plus d'un dixième; & telle étoit l'incertitude qu'on avoit sur la grandeur de la terre lors de l'établissement de l'académie des Sciences. Toutes les parties de l'astronomie commencèrent alors à se perfectionner; M. Picard fut chargé de la mesure de la terre, & il trouva le degré de 57060 toises; nous le supposons aujourd'hui de 57072 toises vers 49° $\frac{1}{3}$ de latitude (2651), & l'incertitude ne va pas à plus de 10 toises, ou à la six millieme partie du total.

Le degré est de 57072 toises.

2634. Avant que d'expliquer la méthode exacte dont on se sert pour mesurer la longueur d'un degré, il faut dire uu mot de la mesure dont nous nous servirons, puisque c'est une chose de pure convention. Il seroit assurément fort utile aux nations de convenir d'une mesure universelle, & les savans devroient en donner l'exemple : la longueur du pendule simple, quantité invariable & facile à retrouver dans tous les temps, semble donnée par la nature pour servir de mesure dans tous les pays. Mouton, astronome de Lyon, proposoit pour mesure universelle un pied géométrique, *virgula geometrica*, dont un degré de la terre contenoit 600000, & pour en conserver la longueur à perpétuité, il remarquoit qu'un pendule de cette longueur faisoit 3959 $\frac{1}{5}$ vibrations en demi-heure. (*Observat. diametrorum* 1670, *pag.* 433). Picard, en 1671, proposa une idée semblable. M. Huygens qui avoit imaginé en 1656 l'application du pendule aux horloges, en parla de même, (*Horol. oscill.* 1673, part. I, *pag.* 7, part. IV, *pag.* 151.), & la

Projet d'une mesure universelle.

Société royale de Londres se proposoit de l'adopter. Amontons (*Mém. acad.* 1703, *pag.* 51), Bouguer, *pag.* 300) insistèrent là-dessus. M. du Fay avoit fait agréer au Ministère un projet de réglement que la mort de M. Orry & celle de M. du Fay ont suspendu. M. de la Condamine, (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 489), a écrit sur la même matière & formé le même vœu. M. de la Condamine fait voir que le pendule équinoxial ou équatorial qui est de 36 pouces 7 lig. $\frac{15}{100}$, mesure de Paris, en employant la toise qui a servi au Pérou (2638), devroit être adopté par préférence, comme étant une mesure plus naturelle & plus indépendante des prétentions diverses de chaque pays ; par ce moyen notre toise deviendroit plus longue de 14 lig. $\frac{3}{10}$; le degré de la terre sous la latitude de Paris, contiendroit 56143 toises astronomiques, au lieu de 57072 toises de Paris.

Toise de l'Académie des Sciences.

2635. En attendant la convention d'une mesure universelle, je m'en tiendrai à la toise de l'académie des Sciences, qui est celle du grand Châtelet de Paris ; cette toise est de toutes les mesures que l'on connoît, celle qui a été la mieux conservée, la plus examinée, la plus employée dans de grandes & importantes opérations, & j'y rapporterai toutes les autres ; c'est ce qu'a fait déja M. Cristiani, (*Delle misure d'ogni genere, in Brescia* 1760).

2636. Malgré les soins qu'on a pris pour conserver exactement la longueur de notre toise, il s'y est glissé de petites variations qui étoient presque inévitables ; mais que je vais expliquer avec assez de soin pour qu'il n'en puisse résulter aucune incertitude. En 1668 l'ancienne toise des Maçons fut réformée & accourcie de 5 lig. (*Mém. de l'acad.* depuis 1666, tom. VI, *pag.* 536), l'on eut soin pour lors de placer au pied de l'escalier du grand Châtelet de Paris, un *étalon* ou espèce de compas d'épaisseur, c'est-à-dire, une barre de fer terminée par deux éminences, deux redents ou talons, qui s'élèvent perpendiculairement à la toise, entre lesquels devoit entrer une toise juste ; on comprit dès-lors

que

que c'étoit la meilleure manière d'avoir une égalité parfaite entre toutes les toises qu'on présenteroit à cet étalon.

M. Auzout se servit de cette toise pour y comparer les mesures étrangères qu'il avoit prises sur les originaux dans ses différens voyages (*Ibid.* tom. VI, *pag.* 537). Picard dans sa mesure de la terre, publiée en 1671, art. IV. nous avertit que la toise dont il s'est servi dans ses opérations, & qu'il a choisie comme la mesure la plus certaine & la plus usitée en France, est celle du grand Châtelet de Paris, suivant l'original qui en a été nouvellement rétabli; mais, ajoute-t-il, de peur qu'il n'arrive à notre toise comme à toutes les mesures anciennes, dont il ne reste plus que le nom, nous l'attacherons à un original tiré de la Nature, & il parle à ce sujet de la longueur du pendule qu'il avoit trouvée de 36 pou. 8 lig. $\frac{1}{2}$, en y employant la même toise: enfin, il termine cet article en disant. « La longueur de la » toise de Paris & celle du pendule à secondes, telles » que nous les avons établies, seront soigneusement con- » servées dans le magnifique observatoire, que Sa Majesté » fait bâtir pour l'avancement de l'astronomie ». Cependant l'étalon du grand Châtelet, abandonné, pour ainsi dire, au public, a été usé & même faussé de manière que dès l'année 1735, il ne pouvoit plus désigner une mesure fixe & exacte, (*Mém.* 1757, *pag.* 354). La toise de M. Picard étoit perdue, la base même qu'il avoit mesurée entre Villejuive & Juvisy (2641), n'étoit plus déterminée comme autrefois, & l'une de ses extrémités étoit douteuse, ensorte qu'elle ne pouvoit servir à faire retrouver la longueur de cette toise. (*Méridienne de Paris, par M. Cassini de Thury*, 1744, *pag.* 37). Il est vrai que la longueur du pendule à secondes devoit suffire; Picard l'avoit trouvée de 36 pouces 8 lig. $\frac{1}{2}$; mais il avoit pu se glisser dans cette mesure une erreur d'une millième partie; on n'avoit pas pour lors en vue une précision si singulière, & il paroît en effet que la toise dont se servit M. Picard étoit plus petite que la nôtre d'environ

un millième, puiſque celle-ci a fait trouver la diſtance de Brie-Comte-Robert à Montlhéry, plus petite de 13 $\frac{1}{2}$ toiſes que ſuivant M. Picard (2649). M. le Gentil me dit en 1756 qu'il avoit vu une toiſe de M. Caſſini, qui étoit un peu plus longue que l'étalon du Châtelet ; l'étalon de Canivet, qui lui vient de Langlois ſon oncle, eſt auſſi un peu plus grand que la toiſe du Pérou. M. de la Caille avoit une toiſe de Langlois, dont il s'étoit ſervi au Cap, (*Mém.* 1751, *pag.* 433) ; mais elle ſe perdit en 1756, lorſqu'il l'apporta dans l'académie pour la comparer avec les autres toiſes.

Lorſqu'il fut queſtion d'un voyage en Amérique pour la meſure du degré (2668), M. de la Condamine fit faire avec grand ſoin deux toiſes de fer, par le ſieur Langlois, (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 499). M. Godin alla en vérifier une ſur l'étalon du Châtelet de Paris, (*Meſure des 3°, pag.* 75 *&* 76), auſſi exactement qu'on le pouvoit faire ſur un modèle défiguré par un frottement & une uſure de 65 ans : M. de la Condamine vit ces deux toiſes chez Langlois préſentées au même étalon ; elles furent comparées auſſi dans l'académie ; on y appliqua, à l'aide d'une loupe, un compas à verge garni de deux pointes, méthode à la vérité où il pourroit bien ſe gliſſer $\frac{1}{25}$ de ligne d'erreur ; elles furent auſſi ajuſtées l'une contre l'autre ſur une table, & les deux faces de chaque extrémité, ſoit au tact, ſoit à la loupe, parurent de la plus parfaite continuité.

Toiſe de M. de Mairan.

M. de Mairan avoit fait faire quelques mois auparavant, par Langlois, une toiſe pour ſervir à ſes expériences du pendule ſimple ; c'eſt une règle, dit-il, *toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou*, (*Mém. acad.* 1735, *pag.* 157). M. Camus & M. Bouguer aſſurèrent le 23 Juin 1756 à l'académie, le premier comme l'ayant vu, & le ſecond comme l'ayant oui dire cent fois à M. Godin que la toiſe de l'équateur, & celle du cercle polaire avoient été exactement comparées à celle de M. de Mairan, après avoir été faites toutes enſemble par Langlois, de même qu'une autre qui fut envoyée à

Londres. Cependant M. de la Condamine ne s'eſt point rappellé d'avoir vu comparer la toiſe de M. de Mairan avec celle du Pérou dans l'académie en 1735, ni même d'avoir oui dire à M. Godin qu'il les eût confrontées, mais il ſe rappelle très-bien que celle du Pérou fut comparée à celle qui devoit reſter à Paris.

M. de Maupertuis ayant eu beſoin de celle-ci quelque temps après pour le voyage du nord, emporta cette toiſe que M. de la Condamine avoit deſtinée à être dépoſée ; il ne reſtoit à Paris que celle de M. de Mairan que l'on ſuppoſoit exactement conforme aux deux autres, comme ayant été faites par le m-me artiſte toutes les trois.

2637. Cependant quand au bout de 20 ans l'on a réuni & comparé ces trois toiſes, en 1756, il s'eſt trouvé que la toiſe de l'équateur, étoit de $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{35}$ de ligne plus longue que celle du nord, & celle de M. de Mairan plus courte de $\frac{1}{15}$ de ligne, enſorte qu'il y a environ $\frac{8}{75}$, ou plus d'un dixième de ligne de différence, ſur 864 lig. entre la toi e de M. de Mairan & celle de l'équateur. Différence entre les toiſes.

Pour expliquer cette différence on obſerve que le vaiſſeau ſur lequel étoit la toiſe du cercle polaire, fit naufrage dans le golfe de Bothnie au retour du voyage ; la toiſe dut être rouillée, & l'on a lieu de croire qu'en la nettoyant on a pu la diminuer de quelque choſe ; cependant M. Camus ſoutint dans l'académie, le 3 Juillet 1756, que cette toiſe n'avoit ſouffert aucune altération ; mais il convint que l'étalon avoit été mis au feu ; que la toiſe n'y entroit plus, & qu'on avoit limé l'étalon, le 28 Juin 1756, pour y faire entrer la toiſe avant de s'en ſervir pour la meſure du 1 Juillet 1756 ; il y a donc toujours quelque lieu de croire que cette toiſe du nord a pu être égale dans le principe à celle de l'équateur.

La toiſe de M. de Mairan a été conſervée avec tout le ſoin & tout le ſcrupule imaginable, elle n'a certainement pas été diminuée ; il faut donc que dans le principe elle n'ait pas été rigoureuſement égale aux autres. Il n'y a pas apparence que la chaleur de la Zone Torride, ni

les secousses des voyages ayent rendu la toise de l'équateur plus longue qu'elle n'étoit ; elle a toujours été dans un étui très-solide, & les chaleurs à Quito ne sont point excessives. M. de la Condamine ayant su à son retour d'Amérique en 1745, que la toise qu'il avoit laissée en dépôt à Paris, avoit été portée au cercle polaire, & qu'elle avoit pu être altérée dans le voyage, engagea M. le Comte de Maurepas à faire demander celle de l'équateur, à M. Godin ; M. de Jussieu la renvoya sur le vaisseau le Condé, en 1748, dans son étui de bois, doublé de serge ; elle a resté plusieurs années en dépôt au Cabinet du Jardin Royal ; M. de la Condamine l'a retirée ensuite, & elle a été déposée à l'académie le 8 Août 1770 ; elle paroît dans toute son intégrité, & les vives arrêtes n'en sont pas le moins du monde altérées.

La coupe des entailles qui déterminent la longueur de la toise de l'équateur n'est pas exactement perpendiculaire à la longueur de la règle ; ces entailles rentrent un peu dans le fond où elles forment une toise plus courte ; mais c'est leur partie extérieure qu'on a choisie pour la véritable longueur de cette toise ; on a fait tous les étalons de manière que le commencement de ces arrêtes y entre à frottement, mais sans aucune violence. Il y a sur l'excédent de cette toise deux points dont on s'est toujours servi pour les opérations de l'équateur, mais ils sont exactement à la même distance.

En vertu d'une Déclaration du Roi du 16 Mai 1766, rendue par les soins de M. Trudaine de Montigny, M. de Montaran, Intendant du Commerce, & M. Tillet de l'académie des Sciences, ont fait construire par Canivet environ 80 toises semblables à celle de l'équateur, qui ont été envoyées, de même que l'aune de Paris & le poids de Marc, aux Procureurs généraux des Parlemens, de la part de M. le Contrôleur Général, ensorte que dans les principales villes du royaume, cette mesure existe dans toute son exactitude ; on l'a déposée au greffe du Châtelet, on l'a envoyée également en Guyane, en Corse, à Vienne où le P. Liesganig

l'a employée à ſes meſures du degré dans la Hongrie & l'Autriche ; le P. Beccaria s'en eſt ſervi pour ſon degré du Piémont. M. Maskelyne y a rapporté la meſure faite dans l'Amérique Angloiſe.

2638. Cette toiſe de l'équateur eſt ſur-tout conſacrée par l'uſage qu'en ont fait trois académiciens célèbres, dans la meſure des trois premiers degrés du méridien (2673) & de la longueur du pendule en divers pays (2699) ; n'ayant donc aucune raiſon d'y ſoupçonner de l'altération, l'original ayant été dépoſé à l'académie & copié plus de cent fois, je crois que c'eſt celle qui doit ſervir de règle, & j'y rapporterai toutes les autres meſures. Pour cela il faut ôter 7 toiſes du degré d'Italie qui fût réglé ſur la toiſe de M. de Mairan ; il faudroit ôter 3 toiſes de celui du nord, ſi l'on ſuppoſoit que la toiſe du cercle polaire ait différé de $\frac{1}{25}$ de ligne de celle de l'équateur, dans le temps même de la meſure du nord, ce qui n'eſt pas vraiſemblable ; mais il faut ôter 0,05 de la meſure du pendule faite par M. de Mairan, qui ſe réduit à 440 lig. 52 (2699), & 3 toiſes du degré conclud en 1756 de la meſure de la baſe de Villejuive (2651).

Toiſe qui ſert de règle.

M. de la Condamine dans ſon voyage d'Italie, dépoſa des modèles de toiſe à Rome & à Florence, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 352), mais ils ſont auſſi conformes à la toiſe de M. de Mairan, ainſi qu'une autre toiſe envoyée en Eſpagne.

Cette diverſité & cette incertitude dans nos meſures ne paroîtra pas ſurprenante à ceux qui connoîtront la difficulté de s'aſſurer de ſi petites quantités ; on a éprouvé les mêmes incertitudes en Angleterre où le modèle dépoſé à la Société Royale diffère de celui de M. Bird (*Philoſ. tranſ.* 1768, *pag.* 326), & plus encore de celui que M. Graham avoit comparé avec notre toiſe (*Mém. acad.* 1738, *pag.* 135).

A l'égard des autres pays, je n'en ai trouvé aucun où l'on eût pris, pour conſtater les meſures nationales, des précautions même approchantes des nôtres.

2639. Quoique la toise de Paris, dont nous venons de parler, soit une mesure connue aujourd'hui de tous les savans, il ne sera pas inutile d'y rapporter encore les principales mesures de l'Europe, dans la table suivante.

Table des principales Mesures de l'Europe, anciennes & modernes, réduites en toises, pieds, pouces, lignes & décimales de ligne, mesure de l'Académie Royale des Sciences & du grand Châtelet de Paris.

	toi.	pou.	lig.
Le mille Romain cité dans Pline.	757,5		
Le mille Rom. de Strab. suiv. M. Cassini, (*M. ac.* 1702).	766		
Le mille moderne de Rome, suiv. le P. Boscovich. .	764		
Le mille d'Italie, de 60 au degré.	958		
Le mille d'Angleterre.	830		
Le Li des Chinois ou la 193e partie du degré. . .	295		
Le stade des anciens Romains, de 625 pieds Romains.	94,693		
Le stade Egyptien, suivant M. Freret & M. le Roy, (*Ruines des Monumens de la Grèce*).	114,13		
Le pied des anciens Romains, (*Mém. acad.* 1757). . . .		10	10,90
Le pied Grec pris au Capitole, suivant M. Auzout. . . .		11	3,80
Le pied Grec, suivant M. le Roy.		11	4,56
Le pied Arabe, (*Anciens Mém. de l'acad.* Tom. VI, *pag.* 532).		9	10,72
Le pied d'Alexandrie, *Ibid.*		13	2,9
La coudée des Hébreux, selon Eisenschmid.		19	10,40
Le pied d'Angleterre, (*Philos. trans.* 1768, *pag.* 326). . .		11	3,1154
Le pied du Rhin, de Leyde & de Dannemarck, suiv. M. Lulofs.		11	7,183
Le pied de Bologne, suiv. M. Auzout; la 10e part. de la perche.		14	0,60
Le pied de Turin, suiv. le P. Beccaria.		18	11,70
Le *Braccio da panno* de Florence, suiv. le P. Ximenez. . .		21	6,454
Le pied de Venise, suiv. M. Cristiani, (*Delle misure*). . . .		12	10,0
Le pied de Padoue suiv. M. Cristiani.		15	9,9
Le pied de Vienne, en Autriche, suiv. le P. Hell.		11	8,117
La Vare de Castille, (*Mém. acad.* 1747).		30	11,0
Le Palme Romain moderne, suiv. le P. Boscovich.		8	3,033
Le Palme de Naples, suiv. M. Auzout.		9	8,15
Le pied de Suéde, (*Mém. acad.* 1714).		10	11,75
L'archine de Russie, suiv. les Manuscrits de M. de l'Isle. . .		26	6,30
Le pied royal de la Chine, *ing-cao-chi*, ou *ing-ts'ao-tchi.* (*Observat. astronomicæ Pekinifactæ*, Tom. I, *pag.* 363). . . .		11	9,9

Voyez le Traité des mesures itinéraires anciennes & modernes, par M. D'ANVILLE 1769, *in*-8°. CRISTIANI, *delle misure d'ogni genere* 1760. *Tables of antient coins, weights and measures.* ARBUTHNOT 1727 & 1754. On trouve dans ces divers ouvrages un grand nombre d'autres mesures rapportées à la nôtre, ou à celle d'Angleterre; le P. Riccioli, *Chronologia reformata*, en donne aussi une table, où il les compare avec le pieds de Bologne.

Enfin pour donner aux étrangers quelque idée de notre toise, j'obſerverai qu'elle contient 72 pouces ou 864 lig. que la planche XXX de ce livre a 7 pouces 5 lig. $\frac{1}{3}$ de hauteur dans le carré qui en fait la bordure, pris à droite, & 5 pouces 8 lig. $\frac{1}{2}$ de largeur en bas; la planche XXIX a 7 pouces 4 lig. $\frac{7}{10}$ de longueur, & 5 pouces 8 lig. de largeur en bas; la planche XXXI a 7 pouces 6 lig. $\frac{5}{6}$ de hauteur, & 5 pouces 9 lig. $\frac{1}{2}$ de largeur; la planche XXXII 7 pouces 4 lig. $\frac{5}{12}$ de longueur, & 5 pouces 8 lig. de largeur. Je ſuppoſe dans ces meſures un livre relié, dont le papier a été tiré mouillé & battu, c'eſt-à-dire, imprimé à l'ordinaire; mais on ne peut compter ſur une pareille indication qu'à une demi-ligne près, à cauſe des inconvéniens du papier (*1629*). La ligne qui eſt dans le livre de M. Criſtiani pour repréſenter un demi-pied, eſt trop grande d'un tiers de ligne.

2640. Lorſqu'on meſure une diſtance ou une baſe ſur terre entre deux objets éloignés & invariables, on ſe ſert d'une toiſe qui eſt ordinairement de fer; & comme cette toiſe eſt ſujette à ſe dilater par la chaleur, on trouve dans la diſtance meſurée lorſqu'il fait froid, un plus grand nombre de toiſes, que quand il fait chaud; il eſt donc eſſentiel quand on rapporte une ſemblable opération, de dire à quel degré de chaleur on l'a faite, pour faire connoître quelle devoit être alors la longueur de la toiſe qu'on a priſe pour meſure. Dilatation de la toiſe par la chaleur.

M. de la Condamine (*pag.* 78) a trouvé qu'une toiſe de fer s'allonge d'environ $\frac{1}{87}$ de ligne pour chaque degré du thermomètre de M. de Reaumur, ou plus exactement de 0 li, 0117; ou bien 0 t, 00001354, c'eſt-à-dire, une toiſe & un tiers ſur cent mille. Le Pere Boſcovich ſe ſert de ces expériences de M. de la Condamine, (Voyage aſtron. *pag.* 349); ſuivant les expériences de M. Berthoud faites dans une étuve où le thermomètre étoit monté de zéro à 27 degrés, ſur des verges de 3 pieds 2 pouces 5 lignes, de 5 lignes de large, & de 3 lignes d'épaiſſeur, le cuivre jaune s'eſt allongé de $\frac{121}{360}$ de ligne, le cuivre rouge de $\frac{107}{360}$, le

fer battu à froid de $\frac{73}{360}$, l'acier trempé & revenu bleu de $\frac{77}{360}$, le fer battu à froid & recuit de $\frac{75}{360}$, l'acier trempé & ensuite recuit $\frac{69}{360}$. (*Essai sur l'Horlogerie*, 1763, *Tom. II. pag.* 113). Cette dilatation étant connue, il est facile de réduire toutes les mesures à un même degré de chaleur; on a choisi la température moyenne qui est de 10 degrés sur le thermomètre de M. de Reaumur, $54\frac{1}{2}$ de Fahrenheit, 132 de M. de l'Isle, (129).

Mesure du degré par M. Picard.

2641. La première mesure qu'on ait faite avec précision pour connoître la grandeur de la terre, celle qui a été répétée & constatée avec le plus de soin, est la mesure du degré entre Paris & Amiens; je prendrai cette mesure pour exemple, en expliquant la méthode qui a fait trouver avec tant de précision la grandeur & la figure de la terre.

L'objet que se proposa M. Picard en 1669, fut de connoître le nombre de toises qu'il y avoit en ligne droite entre Paris & Amiens, & combien de minutes & de secondes il y avoit pour leur différence de latitude sur la circonférence du méridien de la terre. Ainsi il y a deux opérations principales dans ce travail, mesure géodésique en toises, mesure astronomique en degrés.

Mesure géodésique.

2642. A l'égard de la mesure géodésique, il seroit long & difficile de mesurer toise à toise, d'un bout à l'autre un espace de 25 lieues, quoique cela se soit fait en Amérique (*Philos. trans.* 1768). M. Picard préféra d'employer la trigonométrie, & se contenta de mesurer avec soin un espace de 5663 toises de long, du chemin de Villejuive à Juvisy, qui étoit déja pavé en droite ligne, & d'en conclure tout le reste par des triangles. Depuis ce temps là on a élevé à Villejuive & à Juvisy, deux pyramides qui sont exactement à 5717 toises l'une de l'autre, suivant la mesure que nous avons faite en 1756 (2650).

Base de 5717 toises.

Fig. 217.

2643. On voit dans la *fig.* 217, la disposition des premiers triangles de M. Picard; la distance de Villejuive

juive à Juvisy ayant été mesurée il se transporta aux deux extrémités de cette base pour mesurer les angles d'un triangle dont le sommet étoit le clocher de Brie-Comte-Robert. Etant placé à Juvisy avec un quart-de-cercle de 3 pieds de rayon qui portoit deux lunettes, l'une fixe & l'autre mobile (*fig.* 169), il dirigea l'une sur le moulin de Villejuive, où commençoit sa mesure, & l'autre sur le clocher de Brie; l'angle formé par les deux lunettes (2583), se trouva de 95° 6′ 55″; il se transporta pareillement à Villejuive & là pointant une des lunettes sur le pavillon de Juvisy, qui avoit servi de terme à sa base, & l'autre sur le clocher de Brie, il trouva l'angle de 54° 4′ 35″; de ces deux angles avec le côté compris, il étoit aisé de conclure par le calcul la distance de Villejuive à Brie 11012 toises, 5 pieds; pour vérifier l'observation, il ne négligea pas de mesurer encore immédiatement le troisième angle.

2644. Nous avons parlé ci-dessus (2583 & suiv.), des attentions qu'exigent ces mesures, & l'on peut consulter les divers ouvrages que nous avons cités, sur la manière de faire les réductions qu'exigent ces triangles, de les orienter, d'en estimer les erreurs, & d'en conclure la longueur d'une méridienne.

2645. La distance trouvée par la résolution du premier triangle servit de base au triangle suivant, dont le sommet étoit la fameuse tour de Montlhéry : ayant donc mesuré de même les angles de ce second triangle, 77° 25′ 50″ à Villejuive, & 47° 34′ à Brie, il fut en état de conclure la distance de Brie à Montlhéry 13121 toises $\frac{1}{2}$, il observa aussi la direction de ces triangles ou l'angle que formoit le premier côté avec la méridienne, au moyen des amplitudes du soleil (1040).

Distance qu'on en conclut.

2646. Ainsi le premier triangle formé par M. Picard sur la base de Villejuive, se terminoit au clocher de Brie-Comte-Robert; le second avoit pour base la distance de Villejuive à Brie-Comte-Robert, & se terminoit à la tour de Montlhéry; ce second triangle lui fit trouver la distance de Brie à Montlhéry 13121$\frac{1}{2}$

toises; c'est celle que nous trouvons actuellement de 13108 toises, parce que notre toise est plus longue d'un millieme que celle de M. Picard. Le troisième & le quatrième triangle furent formés sur cette base, & se terminoient vers le midi au haut du pavillon de Malvoisine, & vers le nord au haut de la tour de Montjay, d'où il tira les distances de Montlhéry à Malvoisine 8870 ½ toises, & de Montlhéry à Montjay 21658. Le cinquième triangle formé sur cette dernière base finissoit au haut du tertre de Mareuil; par cette suite de triangles M. Picard détermina la distance de Malvoisine à Mareuil 31897 toises; il vérifia aussi cette même distance par un simple triangle formé entre Malvoisine, Montlhéry & Mareuil, dont il mesura les trois angles immédiatement avec le même quart-de-cercle de trois pieds de rayon, (*Mesure de la terre par M. Picard, in-8°. pag. 36*).

Signaux par le moyen des feux.

2647. A l'occasion de ce grand triangle qui avoit 15 lieues de long, M. Picard fut obligé plusieurs fois de faire éclairer des feux à Mareuil, à Montlhéry & à Malvoisine, pour servir de signaux; un feu large de trois pieds, fait à Mareuil & vu de Malvoisine, paroissoit à la vue simple, environ comme une étoile de la troisième grandeur; il n'étoit vu réellement que sous un angle de $3'' \frac{1}{4}$, cependant même avec la lunette il faisoit l'effet d'un objet qui auroit eu 8″ de diamètre: cela prouve que les corps lumineux paroissent un peu plus grands qu'ils ne sont réellement (2787), & que les feux sont très-propres à servir de signaux pour les opérations géométriques à de grandes distances.

2648. M. Picard avec 8 autres triangles continua de la même façon jusqu'au clocher de Notre-Dame d'Amiens, qu'il trouva être plus septentrional de 78907 toises que le pavillon de Malvoisine, ce qui se réduisoit à 78850 entre les deux points d'observations; & comme la différence de latitude étoit de 1° 22′ 55″, il en conclut que 57057 toises devoient faire précisément un degré de changement en latitude; on n'a trouvé qu'en

viron 17 $\frac{1}{2}$ toifes de plus en répétant ces mefures avec de meilleurs inftrumens & des précautions encore plus grandes, (*Méridienne de l'Obfervatoire Royal de Paris vérifiée*, &c. 1744, *pag.* 50).

2649. La diftance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert que M. Picard avoit trouvée de 13121 toifes, n'a été trouvée que de 13108 toifes, par la vérification que l'académie en a faites en 1756, enforte que toutes les diftances de M. Picard étoient trop grandes, & cela d'environ une toife fur mille, foit que notre toife actuelle foit un peu plus grande que la fienne, foit qu'il n'eût pas mefuré avec affez de foin la bafe de Villejuive à Juvify, qui eft le fondement de toutes les autres diftances (Voy. M. de la Condamine, *pag.* 249). Dans la dernière mefure faite en 1756, on s'eft fervi du moulin de Fontenai pour le premier triangle formé fur la bafe de Villejuive. Vérification faite en 1756.

2650. La diftance des centres des deux pyramides érigées à Villejuive & à Juvify, eft de 5717 toifes, en employant la toife qui avoit fervi à mefurer en 1736 le degré de Laponie, dans le temps où le thermomètre eft à 11 ou 12 degrés au deffus de la congélation, c'eft-à-dire, un peu au-deffus de la température du printemps; jamais peut-être diftance n'a été mefurée tant de fois & avec des précautions auffi grandes; elle l'avoit été 5 fois de fuite (*Mérid. de Paris vérif. pag.* 35), en 1740 par M. Caffini & M. de la Caille; elle fut mefurée encore deux fois le premier Juillet & le 31 Août 1756, par huit autres académiciens (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 172); la dernière mefure à laquelle je coopérai moi-même, & dont le réfultat eft de 5717 toifes, donne pour la diftance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert 13108 toifes, ce qui ne diffère pas de deux pieds des mefures faites en 1740, par M. Caffini & M. de la Caille (*Mérid. de Paris vérif. pag.* 38).

Ayant prolongé ces mefures par une fuite de triangles jufqu'à Amiens, l'on a trouvé l'arc du méridien terreftre compris entre la face méridionale de l'obfer-

vatoîre de Paris, & la fleche de la Cathédrale d'Amiens; 60390 toises (*Mérid. vérif. pag.* 46 & 50).

Mesure Astronomique.

2651. En observant avec soin la distance au zénit, des mêmes étoiles à Paris & à Amiens avec un secteur semblable à celui que j'ai décrit (2380), on trouve 1° 1′ 13″1 de différence dans toutes les hauteurs entre deux points dont la distance réduite étoit 58233 toises. (*Degré du mérid. entre Paris & Amiens, par M. de Maupertuis*; *in*-8°. 1740; *Mérid. de Paris, pag.* 50); il ne reste donc plus qu'à faire la proportion suivante, 1° 1′ 13″ 1 est à 58233 toises, comme 1° 0′ 0″ est à un quatrième terme qu'on trouve de 57074 toises; c'est la longueur exacte du degré de la terre entre Paris & Amiens, (*Mérid. de Paris, pag.* 50 & 112. *Mém. acad.* 1758, *pag.* 243); c'est-à-dire, pour la latitude de 49° 23′, en employant la toise qui a servi en Laponie, & choisissant le temps où le thermomètre de M. de Réaumur est à 10 ou 12 degrés (2640). Ce degré se réduiroit à 57072 toises en adoptant la mesure de la base de Villejuive faite en 1756, & même à 57069 en le rapportant à la toise de l'équateur (2638).

Degré de Paris à Amiens, 57074 toises.

2652. La 25e partie de ce degré ou 2283 toises, est la quantité que nous avons coutume de prendre pour la lieue moyenne de France, (1394). Quand on a la valeur du degré, il est aisé, en multipliant par 360, d'avoir la circonférence entière qui sera de 9000 lieues, si l'on en compte 25 au degré. De même on trouvera le diamètre de 2865 lieues, par le rapport de la circonférence au diamètre (3322).

2653. Par les opérations de trigonométrie décrites ci-dessus (2643), on parvient à mesurer une étendue de 60 lieues à 20 toises près, en employant un quart-de-cercle de 3 pieds pour la mesure des angles; M. de la Condamine après une suite de 32 triangles qui mesuroient une distance de 80 lieues au Pérou, ne trouva qu'une toise de différence sur le dernier côté conclu des triangles qui précédoient, & mesuré ensuite immédiatement (*Mes. des 3 premiers degrés pag.* 87);

ce qui doit faire juger du degré d'exactitude dont ces mesures sont susceptibles, du moins quand elles sont conduites par des mains aussi habiles.

2654. C'est la rondeur ou la courbure de la terre qui produit la différence de niveau, ou le haussement du niveau apparent au-dessus du vrai, car le niveau apparent est sur une ligne droite perpendiculaire au fil à-plomb, ou tangente à la surface de la terre, mais le vrai niveau est sur un cercle qui se courbe comme la terre; quand on a observé deux objets dans la lunette horizontale ou sur la ligne des pinnules d'un niveau, le plus éloigné est nécessairement plus élevé par rapport à la surface de la terre, qui est le vrai niveau; la différence de niveau est égale à l'excès de la secante de l'arc de la terre compris entre les deux objets sur le rayon; cet excès est à peu-près égal au sinus verse de l'arc, ou a l'excès du rayon sur le cosinus du même arc, ainsi il est aisé de le trouver par le moyen des tables des sinus; on peut même facilement retenir que cette différence est d'*une aune pour une lieue* de distance ou de 44 pouces pour 2000 toises; mais elle croît comme les carrés des distances; pour 1000 toises, elle n'est que de 11 pouces, & pour 4000 toises, elle est de 14 pieds 8 pouces; on peut construire une table de cette différence, en disant le carré de 2000 toises est à 44 pouces, comme le carré d'une distance quelconque est au nombre de pouces qui y répondent pour la courbure de la terre. Il y a des tables de cette espèce, dans le traité du nivellement de M. Picard, dans la figure de la terre de M. Cassini, dans le manuel de trigonométrie par M. l'Abbé de la Grive, & ailleurs.

Abaissement du niveau vrai.

DE LA FIGURE DE LA TERRE ET DE SON APPLATISSEMENT.

2655. Le degré mesuré par M. Picard, entre Paris & Amiens, suffisoit pour connoître la grandeur de la

terre entière, en la ſuppoſant ſphérique; mais ſi la terre n'eſt pas ronde les 360 degrés doivent être différens entre eux (2661), & celui des environs de Paris ne ſera plus la 360e. partie de la circonférence de la terre; ce fut pour s'en aſſurer que l'académie des Sciences de Paris ſongea en 1683 à ſe procurer la meſure de pluſieurs degrés ſous différentes latitudes, pour voir ſi ces degrés étoient égaux, comme ils devoient l'être en ſuppoſant la terre ſphérique; nous verrons bientôt ce qui en réſulta.

2656. Je ne ſais pas à qui l'on dut la première conjecture qui donna naiſſance à toutes ces recherches; je trouve ſeulement que M. Picard, dans l'article IV de ſa meſure de la terre, publiée en 1671, parle d'une conjecture *qui avoit déja été propoſée dans l'aſſemblée, que ſuppoſé le mouvement de la terre, les poids devroient deſcendre avec moins de force ſous l'équateur que ſous les poles*, & M. Picard obſerve que delà il en réſulteroit une différence ſur les pendules qui battent les ſecondes (2699); il ajoute qu'on a fait à Londres, à Lyon & à Bologne en Italie quelques expériences, d'où il ſemble qu'on pourroit conclure que les pendules à ſecondes doivent être plus courts à meſure qu'on avance vers l'équateur, mais qu'on n'eſt pas ſuffiſamment informé de la juſteſſe de ces expériences pour en conclure quelque choſe; d'ailleurs, dit-il, on doit remarquer qu'à la Haye, où la hauteur du pole eſt plus grande qu'à Londres, la longueur du pendule exactement déterminée par le moyen des horloges a été trouvée la même qu'à Paris.

Première conjecture ſur la figure de la terre.

2657. On ne ſavoit donc encore rien de poſitif en 1671, ſur la figure de la terre & ſur la diminution du pendule ſous l'équateur; mais la même année M. Richer fut envoyé à Cayenne, & parmi les objets de ſon voyage nous voyons qu'il étoit chargé par l'académie d'obſerver la longueur du pendule à ſecondes; il partit de Paris par ordre du Roi, au mois d'Octobre 1671; il arriva à Cayenne le 22 Avril 1672. Dans le

chapitre X des obſervations qu'il fit imprimer à ſon retour, il donne un article exprès ſur la longueur du pendule, & il dit que c'eſt l'une des plus conſidérables obſervations qu'il ait faites. « La même meſure qui avoit » été marquée en Cayenne ſur une verge de fer ſuivant » la longueur qui s'étoit trouvée néceſſaire pour faire » un pendule à ſecondes de temps, ayant été apportée » en France, & comparée avec celle de Paris, leur » différence a été trouvée d'une ligne & un quart, » dont celle de Cayenne eſt moindre que celle de Paris, » laquelle eſt de 3 pieds 8 lignes $\frac{3}{5}$; cette obſervation » a été réitérée pendant dix mois entiers, où il ne s'eſt » point paſſé de ſemaine qu'elle n'ait été faite pluſieurs » fois avec beaucoup de ſoin. Les vibrations du pen- » dule ſimple dont on ſe ſervoit étoient fort petites, » elles duroient fort ſenſibles juſqu'à 52 minutes de » temps, & ont été comparées à celles d'une horloge » très-excellente dont les vibrations marquoient les ſe- » condes de temps ». (*Recueil d'obſervations faites en pluſieurs voyages*, *in-fol.* 1693); d'ailleurs le pendule de l'horloge de M. Richer qui battoit les ſecondes à Paris, retardoit à Cayenne de 2 minutes par jour; ce qui prouvoit que la peſanteur de la lentille étoit moindre à Cayenne, & que la lentille y deſcendoit vers la terre avec moins de vîteſſe (*Regiæ ſcient. academiæ hiſtoria* L. 1. Sect. 9. c. 3). On en verra la table ci-après (2699).

Accourciſſement du pendule ſous l'équateur.

2658. Telle fut la première expérience qui prouva démonſtrativement, par le moyen du pendule, que la terre tournoit ſur ſon axe; M. Huygens ſoupçonna dès-lors qu'en vertu de la force centrifuge qui rendoit la peſanteur des corps ſous l'équateur moindre qu'à Paris (3395), il pouvoit très-bien ſe faire que les parties de la terre y fuſſent auſſi plus relevées & plus éloignées du centre, ce qui devoit donner à la terre la figure d'un ſphéroïde applati vers les poles; le diſque de Jupiter, dont M. Caſſini avoit déja obſervé l'applatiſſement, même avant l'année 1666, étoit une grande

raison de croire aussi la terre applatie ; comme il le dit lui-même (*Mém.* 1701, *pag.* 180).

Ce que c'est qu'un degré dans le sphéroïde. *Fig.* 218.

2659. Voyons donc la manière dont les astronomes pouvoient s'assurer de cet applatissement, en mesurant les degrés de la terre sous différentes latitudes. Si la terre n'est pas ronde, la mesure de ses degrés doit se faire autrement que sur le globe. Soit *EPQO* (*fig.* 218) la circonférence applatie de la terre; *EDFQ* celle d'un cercle circonscrit, & qui a le même diamètre *ECQ* ; ayant pris un arc *DF* de ce cercle, qui soit $\frac{1}{360}$ de la circonférence entière, c'est-à-dire, un degré, l'angle *DCF* sera aussi d'un degré ; mais l'arc *GH* de la terre n'est point ce qu'on doit appeller un degré de la terre, quoiqu'il soit compris entre les lignes *DGC* & *FHC* qui font un angle d'un degré au centre de la terre.

Principe d'hydrostatique.

2660. Je supposerai d'abord comme un principe d'hydrostatique démontré par l'expérience & par le raisonnement que la pesanteur agit toujours perpendiculairement à la surface de la terre, quelle que soit sa figure. Les niveaux à bulle d'air, les niveaux d'eaux, les niveaux formés par un fil à-plomb, donnent toujours le même résultat dans les nivellemens, cela prouve que le fil à-plomb est exactement perpendiculaire à la surface de l'eau, qui marque la surface de la terre, & qui prend nécessairement la figure que la gravité donne à la terre. Les eaux de la mer ont toujours été nécessairement disposées perpendiculairement à la direction de la pesanteur; car du premier instant où elles auroient pu ne l'être pas, elles auroient coulé du côté où la pesanteur inclinoit ; elles seroient venu chercher l'équilibre, qui ne peut avoir lieu que quand la pesanteur est exactement perpendiculaire à la surface de l'eau, c'est-à-dire, n'a aucune action latérale.

Le fil à-plomb qui, dans nos instrumens, marque la ligne du zénit, & auquel nous rapportons les hauteurs des astres, est donc perpendiculaire à la surface de la terre; & si un observateur en *P* (*fig.* 219), par exemple, à Paris, voit une étoile, comme la Claire de Per-

Fig. 219.

sée

fée, paffer au méridien précifément au zénit, il la verra fur la ligne *BPZ*, qui eft perpendiculaire à la furface de la terre, & qui ne va point fe diriger au centre *C* de la terre, à moins que la terre ne foit parfaitement fphérique. Un autre obfervateur fitué en *A*, par exemple, à Amiens, voit une étoile fur un rayon *AS*, qui eft parallèle à *PZ* à caufe de la grande diftance des étoiles (2782); cette étoile paroît éloignée de fa verticale *XAB* d'un angle *SAX*. Si avec les inftrumens exacts qu'on emploie à ces obfervations (2380), on trouve que la Claire de Perfée paffe à un degré du zénit d'Amiens, il s'enfuit que l'angle *SAX* eft d'un degré, ainfi l'angle *PBA* qui eft égal à *SAX* fera auffi d'un degré; dans ce cas-là, nous dirons que l'arc *AP* de la terre, compris entre Paris & Amiens, eft un degré de la terre; d'où réfulte la définition fuivante. *Fig.* 219.

2661.) Le degré *du fphéroïde terreftre* (quelle que foit fa figure) *eft l'efpace qu'il faut parcourir fur la terre pour que la ligne verticale ait changé d'un degré.* Delà il fuit que les degrés que nous mefurons par obfervation, font des angles *B* qui n'ont point leur fommet au centre *C* de la terre, mais au point de concours des verticales *ZPB* & *XAB* perpendiculaires à la terre en *A* & en *P*, c'eft-à-dire, aux deux extrémités du degré. Cette manière de concevoir & de mefurer les degrés nous eft donnée par la nature même, à caufe du fil à-plomb qui s'emploie néceffairement dans les obfervations, & qui feul peut nous faire trouver les diftances des étoiles au zénit, & par conféquent les degrés de la terre. Définition du degré.

2662. Il fuit de cette définition que dans les endroits les plus aplatis de la terre les degrés doivent être les plus longs; en effet, plus un arc *PA* (*fig.* 220) aura de convexité ou de courbure, l'angle *F* étant toujours fuppofé d'un degré, plus cet arc *PA* fera court; fi au lieu de *PA* nous prenons l'arc *PD*, plus convexe & plus courbe que *PA*, *DG* étant parallèle à *AF*, & l'angle *PGD* d'un degré, auffi bien que *PFA*, Ils font plus longs dans les endroits plus aplatis. *Fig.* 220.

cet arc *PD* ſera plus court, quoiqu'il ait la même amplitude, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit auſſi d'un degré; ſa longueur en toiſes ſera plus petite que celle de *PA*. Dans une ellipſe & dans toutes les courbes qui lui reſſemblent, la courbure eſt la plus grande au ſommet du grand axe, & la moindre au ſommet du petit axe; donc ſi la terre eſt aplatie vers les poles, l'arc d'un degré aura plus de longueur, renfermera un plus grand nombre de toiſes à meſure qu'on approchera des poles où l'aplatiſſement eſt le plus grand : c'eſt d'après ces principes que nous démontrerons ci-après l'aplatiſſement de la terre (2672).

2663. Il ſuffiſoit donc de meſurer l'étendue d'un degré, à différentes diſtances des poles, pour juger ſi la terre étoit ronde : En conſéquence l'académie obtint en 1683 des ordres du Roi pour continuer la méridienne de Paris, au Nord & au Sud, depuis l'Océan juſqu'a la Méditerranée; M. Caſſini partit pour aller au Midi, accompagné de MM. Sedileau, Chazelles, Varin, Deshaies & Pernim; M. de la Hire alla au Nord de Paris avec MM. Potenot & le Fevre. L'ouvrage avançoit lorſqu'il fut ſuſpendu tout-à-coup par un évenement déplorable.

Mort du grand Colbert.

2664. Le grand Colbert, protecteur immortel des talens & des ſciences, ſous les auſpices duquel tous les projets de l'académie s'exécutoient, mourut le 6 Septembre 1683, à l'âge de 64 ans & 6 jours, après 22 ans d'un miniſtère glorieux. Cette perte, que déplorèrent tous ceux qui conſervoient quelque amour pour les ſciences, fut principalement reſſentie dans l'académie; les aſtronomes furent rappellés; & la guerre qui recommença en 1688, éloigna encore plus le goût des entrepriſes littéraires.

2665. M. Einſenſchſmid en comparant diverſes meſures, croyoit trouver un allongement de la terre; on diſputoit déja en 1696, dans l'académie, ſi la terre étoit aplatie ou allongée, Voyez l'*Hiſtoire de l'acad.* par M. Duhamel, ſous l'année 1696, Sec. VIII. c. 3. art. 16.

Mais en 1700 le Roi donna de nouveaux ordres pour la continuation de la méridienne, & M. Caffini partit au mois d'Aout 1700 pour aller du côté du midi, la reprendre où elle avoit été laiffée. (*Hiftoire acad.* 1700, *pag.* 121).

2666. En comparant les mefures faites au nord & au midi de Paris, on crut appercevoir que l'étendue des degrés étoit un peu plus grande vers le midi, ce qui a fait dire pendant quelques années que la terre pouvoit bien être allongée ; mais il me femble que ce n'étoit pas d'abord l'intention de M. Caffini, & de M. de Fontenelle, ils penfoient que cette augmentation étoit favorable aux hypothèfes communes, c'eft-à-dire, à celles de Newton & de Huygens, & qu'il s'enfuivoit un aplatiffement, à en juger par la première édition de l'hiftoire de l'académie, (*An.* 1701, *pag.* 96, *ligne dernière*), & par les *Mémoires*, *pag.* 181, *ligne* 2 ; la théorie de M. Huygens menoit à cette conféquence, & ce fut M. Robaix, Ingénieur, qui, le premier écrivit contre cette opinion, (*Journal Littéraire de l'année* 1717, *Tom.* IX, *pag.* 416).

Au refte, les inftrumens de ce temps-là n'avoient pas une précifion fuffifante pour conftater une auffi petite différence que celle des degrés de la France ; car cette augmentation qui d'abord avoit paru de 71 toifes, en allant vers le midi, fut réduite à 11 toifes par des mefures plus fcrupuleufes, (*Mém.* 1713) ; & M. Caffini à la page 241 de fon *Traité de la grandeur & de la figure de la Terre*, qui fait une fuite des mémoires de 1718, trouva l'augmentation, d'un degré à l'autre, de 31 toifes, le degré entre Paris & Amiens étant de 57021 toifes.

2667. Mais cette différence entre les degrés mefurés dans l'étendue de la France, étoit trop petite pour que l'on pût conftater d'une manière décifive la figure de la terre ; il eft vrai que la mefure du degré du parallèle entre Paris & S. Malo faite en 1733, & celle du degré entre Paris & Strafbourg faite en 1734, femblèrent indiquer auffi un fphéroïde allongé ; mais les

longitudes de S^{t}. Malo & de Strasbourg, ne pouvoient pas se déterminer par les méthodes ordinaires avec une précision assez grande pour donner une détermination certaine de la figure de la terre.

Projet formé par M. de la Condamine.

2668. Au milieu des dissertations que la mesure du parallèle de Paris occasionna en 1733 dans les assemblées de l'académie, M. de la Condamine représenta qu'on léveroit la difficulté de la façon la plus sûre, en mesurant un degré aux environs de l'équateur, par exemple à Cayenne, & il offrit de l'entreprendre lui-même. En 1734 M. Godin lut aussi un mémoire sur les avantages qu'on pourroit tirer d'un voyage à l'équateur, qu'il offroit d'entreprendre avec M. de Fouchy; M. de Maurepas fit agréer au Roi ce voyage, que M. Godin, M. de la Condamine, & M. de Fouchy devoient faire; mais la santé & les occupations de ce dernier le déterminèrent à remettre cette commission à M. Bouguer, qui étoit alors Hydrographe du Roi, au Havre de Grace; M. l'Abbé Bignon & M. de Réaumur le pressèrent de l'accepter, & on lui donna pour cet effet une place de pensionnaire astronome, qui vint à vaquer par la mort de M. Lieutaud. Les passeports d'Espagne arrivèrent en 1734, & les trois académiciens partirent au mois de Mai 1735 pour aller dans l'Amérique méridionale; ils choisirent les environs de Quito.

2669. Peu après ce départ, M. de Maupertuis ayant eu occasion de voir familièrement M. le Comte de Maurepas, lui représenta qu'on détermineroit avec une précision bien plus grande l'inégalité des degrés, & par conséquent la figure de la terre, si l'on alloit mesurer aussi un degré dans le nord, le plus loin qu'il seroit possible de l'équateur; l'académie reçut les ordres du Roi, & choisit pour ce voyage du nord MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, auxquels on joignit M. l'Abbé Outhier, actuellement correspondant de l'académie, & Chanoine de Bayeux, qui étoit très-accoutumé aux observations; ils partirent en 1736 pour la Suède, & ils arrivèrent à Torneo vers la fin de l'hiver.

2670. Cette entreprise fut exécutée avec autant de promptitude que de soin ; car l'année suivante & le 13 Novembre 1737, dans l'assemblée publique de l'académie des Sciences, M. de Maupertuis lut un Discours qui contenoit la relation & le résultat de ce voyage célèbre, comme il en avoit lu, 18 mois auparavant, le motif & le projet ; elle est imprimée dans son Livre qui a pour titre : *La figure de la Terre, &c.* 1738, 184 pag. *in*-8° : voici une idée de ces opérations.

2671. L'on commença le 6 Juillet 1736 par reconnoître les sommets des montagnes qui étoient le long du fleuve de Torneo, & y placer des signaux. C'étoit des cônes creux bâtis de plusieurs grands arbres, qui dépouillés de leur écorce rendoient ces signaux si blancs qu'on les pouvoit facilement observer de 10 à 12 lieues ; leur centre étoit toujours facile à retrouver, en cas d'accident, par des marques qu'on gravoit sur les rochers, ou par des piquets. On parvint de montagnes en montagnes & de signaux en signaux jusqu'à *Pello*, village habité par quelques Finnois, auprès duquel est *Kittis* la moins élevée, mais la plus septentrionale des montagnes qui ont servi à ce travail, où l'on mesura les angles le 6 Août. Ce fut ainsi qu'on forma une suite de dix triangles, dans laquelle se trouvoit *Horrilakero* qui en étoit comme le foyer ; c'est le lieu où aboutissoient les dix triangles placés sur un long heptagone dans la direction du méridien.

Mesure faite en Laponie.

2672. Vers le milieu de l'heptagone se trouvoit une base de 7407 toises qui fut mesurée sur la surface la plus plate qu'on pût imaginer, puisque c'étoit sur la glace du fleuve de Torneo ; on trouva par la méthode indiquée ci-dessus (2643), que la distance des deux observatoires qu'on avoit établis à Torneo & à Kittis, réduite au méridien, étoit de $55023\frac{1}{2}$ toises. On trouva ensuite par les distances des étoiles α & δ du dragon au zénit de chaque endroit, que l'amplitude de l'arc du méridien compris entre les parallèles de ces deux obser-

vatoires, étoit de 57′ 28″ ⅔, d'où il résulte que la longueur du degré du méridien qui coupe le cercle polaire, est de 57438 toises; il faut en ôter 16 toises, à cause de la réfraction que M. de Maupertuis avoit négligée. (M. Bouguer, *pag.* 290. M. de la Condamine, *pag.* 260), & l'on aura le degré de 57422 toises, plus grand de 350 toises que le degré de Paris (2651). Cette augmetation du degré entre 49° & 66° de latitude, forma une démonstration complette de l'aplatissement vers les poles (2662).

Degré sous le cercle polaire, 57422 toises.

2673. Les trois académiciens envoyés au Pérou (2668) trouvèrent plus de difficulté dans leur mesure, & y employèrent plus de temps; ce ne fut qu'en 1741 qu'elle fut terminée, mais elle renfermoit la mesure d'un arc de 176950 toises, dont l'amplitude fut trouvée de 3° 7′ 1″ entre les deux observatoires de Cotchesqui & de Tarqui; ainsi la longueur du degré étoit de 56775 toises; mais en le réduisant au niveau de la mer, M. de la Condamine conclut, après l'examen de toutes les observations faites par les trois académiciens, que le premier degré du mériden est de 56750 toises (*Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, &c. par M. DE LA CONDAMINE, à Paris, de l'Imprimerie Royale, 1751, *pag.* 229), ou 56753 suivant M. Bouguer, *pag.* 290 & 305.

Sous l'équateur, 56753 toises.

Différences des trois degrés.

2674. Ce premier degré du méridieen, supposé de 56753 toises est plus petit de 321 que celui de Paris à Amiens, 57074 & de 669 toises que le degré mesuré sous le cercle polaire 57422. Le détail des travaux immenses & des observations curieuses que ce voyage du Pérou a occasionnés, a formé la matière de l'ouvrage de M. de la Condamine que je viens de citer; du livre de M. Bouguer, qui a pour titre : *La figure de la Terre*, &c. à Paris, 1749, & de celui de MM. les Officiers Espagnols, Don Georges-Juan & Don Antonio d'Ulloa, imprimé en Espagnol, à Madrid, en 1749, 3 vol. *in*-4°, & traduit en François. On verra dans ces ouvrages que

la Physique s'est enrichie d'un grand nombre de connoissances nouvelles qu'on doit regarder comme les fruits de ce voyage.

2675. Deux degrés de la terre suffisent pour en déterminer toutes les dimensions, si l'on suppose que sa figure soit régulière, & elliptique, comme elle devroit l'être en vertu de la pesanteur naturelle dans un fluide homogène, (Newton, *Liv. III.* M. Clairaut, *Figure de la Terre*, 1743. M. d'Alembert, *Recherches*, &c. part. II, *pag.* 203). Je vais expliquer la manière dont M. de Maupertuis résout ce problême dans sa *Figure de la Terre*, & dans les *Mém. de l'acad.* pour 1735. Soit CLE le rayon de l'équateur (*fig.* 219), $ZPLB$ la verticale de Paris (2660), L leur point d'intersection; l'angle PLE est égal à la latitude de Paris, telle que la donnent les observations; en effet, nous ne jugeons de la latitude que par la différence de hauteur entre une étoile placée dans l'équateur, c'est-à-dire, sur la ligne CLE, & une autre étoile qui passe à notre zénit; du moins nos observations reviennent toutes à cela; or l'angle sous lequel on voit la distance de ces deux étoiles, est égal à l'angle ZLE; donc cet angle de la verticale avec le rayon de l'équateur est égal à la latitude du lieu P; nous supposerons cette définition dans toutes les explications suivantes. Définition de la latitude, *Fig.* 219.

2676. PROBLEME. *Connoissant deux degrés d'une ellipse, trouver ses dimensions.* Soit APB (*fig.* 221), l'ellipse du méridien, CA le rayon de l'équateur, CP le demi-axe, Ee un arc d'un degré, c'est-à-dire, un arc tel que les perpendiculaires EG, eG fassent un angle EGe d'un degré (2659); Ff un autre arc aussi d'un degré; EKA, FLA les latitudes des points E & F, EM l'ordonnée au point E; on a par la propriété de l'ellipse, $y = m\sqrt{1 - xx}$, la normale $EK = m\sqrt{1 - xx + mm\,xx}$ (3274), & le rayon de la développée *Fig.* 221.

Soit	CA	$= 1$
	CP	$= m$
	CM	$= x$
	EM	$= y$
Sin.	EKA	$= s$
Sin.	FLA	$= t$
	Ee	$= N$
	Ff	$= M$

$EG = \frac{1}{m}(1 - xx + mm\,xx)^{\frac{3}{2}}$ (3276). Il s'agit de ſubſtituer dans l'expreſſion de EG une valeur de xx où il n'y ait que le ſinus de la latitude, c'eſt-à-dire, de l'angle EKA.

Dans le triangle EKM, rectangle en M, le rayon eſt au ſinus de l'angle K, comme EK eſt à EM, c'eſt-à-dire, $1 : s :: m\sqrt{1 - xx + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, d'où l'on tire $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$; mettant cette valeur de xx dans l'expreſſion du rayon de la développée, l'on aura $EG = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Par la même raiſon $FH = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1 - tt + mmtt}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Les angles G & H étant chacun d'un degré, les ſecteurs EGe, FHf ſont ſemblables, ainſi les rayons ſont proportionnels aux arcs; donc $Ee : EG :: Ff : FH$, ainſi $N : M :: \left(\frac{1}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{1}{1 - tt + mmtt}\right)^{\frac{3}{2}}$; en diviſant les deux valeurs de EG & FH, par les quantités qui leur ſont communes. On réduira ces deux fractions en ſéries (3289), en élevant $1 - ss + mmss = 1 + (mm - 1)ss$, & $1 + (mm - 1)tt$ à la puiſſance $+\frac{3}{2}$, & l'on aura $N : M :: \frac{1}{1 + \frac{3}{2}(mm - 1)ss}$ eſt à $\frac{1}{1 + \frac{3}{2}(mm - 1)tt}$; donc $N + \frac{3}{2}N(mm - 1)ss = M + \frac{3}{2}M(mm - 1)tt$; $N - M = \frac{3}{2}M(mm - 1)tt - \frac{3}{2}N(mm - 1)ss = \frac{3}{2}N(1 - mm)ss - \frac{3}{2}M(1 - mm)tt$; donc enfin, $1 - mm = \frac{2(N - M)}{3(Ns^2 - Mt^2)}$. La différence des lignes CA & CP, qui ſont 1 & m, eſt la moitié de la différence de leurs carrés (3288), donc l'aplatiſſement $= \frac{N - M}{3(Ns^2 - Mt^2)}$. On peut négliger dans le dénominateur, qui doit être fort grand, en comparaiſon du numérateur, la différence entre N & M qui eſt très-petite, & ſuppoſer $M = N$, pour lors on aura l'aplattiſſement égal à $\frac{N - M}{3M(ss - tt)}$.

Formule de l'aplatiſſement

2677. Si l'un des degrès M ſe trouve ſous l'équateur

teur même, on aura $t = 0$, la latitude du point F étant nulle, donc on aura $\frac{N-M}{3Mss}$ pour l'aplatissement cherché; cette expression fait voir que dans l'hypothèse de la terre elliptique, les accroissemens des degrès sont à très-peu-près comme les carrés des sinus des latitudes, car $N-M$ est proportionnel à ss, dès que la fraction $\frac{N-M}{3Mss}$ est constante. Progrès des degrés.

Si l'un des degrés M étant situé sous l'équateur, l'autre degré N se trouve exactement au pole, l'on aura $\frac{N-M}{3M}$ pour l'aplatissement; ainsi la différence des diamètres n'est que le tiers de celle des degrés; par exemple, les deux degrés extrêmes différant entre eux de $\frac{1}{77}$, les diamètres de la terre ne différeront que de $\frac{1}{231}$.

2678. En substituant dans cette formule les degrés mesurés en France & au Pérou, M. de la Condamine trouve que l'aplatissement de la terre est de $\frac{1}{304}$; mais en y substituant le degré du Nord & celui du Pérou, il ne trouve que $\frac{1}{210}$. Cette différence de résultat fait croire que la terre n'a pas une figure réguliérement & parfaitement elliptique; ou qu'il y a dans les degrés mesurés quelque autre raison d'inégalité, sans quoi on auroit le même degré d'aplatissement, par ces deux différentes comparaisons; le P. Boscovich en a conclu que le degré du Nord étoit peut-être un peu trop grand. La terre n'est pas elliptique.

On peut voir aussi la manière dont on trouve le rapport des diamètres de la terre par la mesure des degrés, dans les *Elements of navigation by John Robertson*, *pag.* 597, d'après les formules du Docteur *Letherland*; c'est la méthode, dont M. Maskelyne s'est servi, dans les transactions philosophiques de 1768, *pag.* 328. Il y a aussi une méthode du P. Boscovich, qui est fort élégante, (*Voyage astron. pag.* 472).

2679. Quand on a trouvé le degré d'aplatissement, il est facile de calculer l'angle de la verticale (1708). Angles des verticales.

Supposons le demi-petit axe $= 1$, le demi-grand axe $= 1 + \beta$, son carré sera $1 + 2\beta$ (3288), à cause de
Fig. 221. la petitesse de β; soit l'abscisse CM (*fig.* 221) $= x$ la sous-normale MK sera $= x \cdot \frac{1}{1+2\beta}$ (3274) $= x(1 - 2\beta)$ (3288); donc $CK = 2\beta x = 2\beta$ cos. latit. La petite perpendiculaire KD abaissée sur $CE = CK$. sin. KCD $= CK$ sin. latit. $= 2\beta$ cos. lat. sin. lat. $= \beta$ sin. 2 lat. (3625), & le sinus de l'angle KED, $= \frac{DK}{DE}$ ou $\frac{DK}{CE}$ $= \beta$ sin. 2 lat. Nous supposons ED sensiblement égal au demi-petit axe, car il n'en diffère que d'une quantité qui n'introduiroit rien de sensible dans cette formule. C'est ainsi que l'on peut calculer la seconde colonne de la table LXXXIV.

Rayons de l'ellipse.

2680. On démontre par les mêmes principes que dans l'hypothèse de la terre elliptique, les excès des rayons de la terre sur le petit axe sont comme les carrés des sinus des latitudes; par exemple, que OA (*fig.*
Fig. 218. 218) est à KM, comme le carré du sinus total est au carré du sinus de l'arc EL, en supposant toujours les différences des degrés extrêmement petites. En effet, par la propriété de l'ellipse (3256) $OA : KL :: CA : BL$ ou $\beta : KL :: 1 :$ sin. lat.; donc $KL = \beta$ sin. lat., mais à cause des triangles semblables BKC, MKL, on a $KL : KM :: CK : BK$ ou β sin. lat. : $KM :: 1 :$ sin. lat. Donc $KM = \beta$ sin. lat.^{2}, c'est-à-dire, que la différence entre le rayon de l'équateur, & le rayon CK pour une latitude donnée, est égal à l'aplatissement multiplié par le carré du sinus de la latitude. On a donc $CK = 1 + \beta - \beta$ sin^2 lat. ou $CK - 1 = \beta - \beta$ sin^2 lat. $= \beta$ cos^2 lat. (parce que $1 -$ sin$^2 =$ cos^2); donc l'excès de CK sur CO est comme le carré du cosinus de la latitude. C'est sur ce principe que sont calculés les nombres de la troisième colonne, dans la table LXXXIV. Je me suis servi des deux propositions précédentes, pour démontrer les formules de parallaxes, que M. de Maupertuis n'avoit pas rendu assez évidentes, comme

l'avoit remarqué M. Pingré, en y suppléant par une autre méthode (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 362).

Connoissant les rayons de l'ellipse, & les angles qu'ils font avec les verticales, ou les normales il est aisé de trouver les longueurs de celles-ci (1691). On verra bientôt une autre méthode (2690).

2681. En admettant cette supposition de la terre elliptique, j'ai voulu examiner quel changement il faudroit faire aux trois degrés du Pérou, de la France & du Nord, pour qu'ils s'accordassent à donner le même degré d'aplatissement, (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 110), j'ai trouvé qu'il faudroit ôter 26 toises du degré mesuré sous l'équateur; ôter 77 du degré de Laponie, & ajouter 77 au degré de France; par ce moyen on auroit $\frac{1}{232}$ pour le degré d'aplatissement, à peu-près comme on le trouve par la théorie de l'attraction, en supposant que la terre soit homogène. On verra ci-après que le P. Boscovich en corrigeant ainsi les degrés mesurés, trouvoit l'aplatissement encore moindre (2692).

2682. Mais comme ces corrections passent les bornes des erreurs qu'on a droit de supposer dans les mesures des degrés, il paroît en résulter que la terre n'a pas une figure elliptique, ou que son hétérogénéité intérieure est considérable; c'est ce que prouve aussi la longueur du pendule observé en différens pays de la terre (2699); car la diminution de pesanteur en allant vers le midi, s'est toujours trouvée plus grande qu'elle ne seroit si la terre étoit elliptique & homogène, & l'aplatissement paroît être aussi plus considérable. Voy. cependant l'art. 2692.

2683. Je passe donc à une hypothèse purement astronomique, introduite par M. Bouguer, pour expliquer l'aplatissement, & pour représenter les trois degrés dont j'ai parlé jusqu'ici; mais je vais tâcher de l'expliquer d'une manière plus élémentaire & plus détaillée que l'auteur même ne l'avoit fait.

Le degré de France mesuré sous la latitude de $49^\circ\frac{2}{3}$ surpasse le degré de l'équateur de 321 toises, & celui Hypothèse de Bouguer.

du cercle polaire ſurpaſſe le degré de l'équateur, de 669 ou 675t (2674); ces excès de 321 & 669 toiſes devroient être comme les carrés des ſinus des latitudes; c'eſt-à-dire, comme les carrés des ſinus de 49° $\frac{2}{5}$ & 66° $\frac{1}{3}$, ſi la terre étoit elliptique (2677); mais ils ſont à peu-près comme les carrés carrés, ou commes les 4es puiſſances des ſinus des latitudes. En étendant cette hypothèſe à tous les autres degrés de la terre, il en réſulte une courbe dont nous allons chercher la nature pour pouvoir calculer ſes rayons & les angles des verticales avec les rayons (2690).

2684. Il faut d'abord trouver le dernier degré de latitude, en faiſant cette proportion : la quatrième puiſſance du ſinus de 66° $\frac{1}{3}$ eſt à celle du ſinus total, c'eſt-à-dire, à l'unité comme l'excès 675 toiſes eſt à l'excès du dernier degré ſur le premier; M. Bouguer trouve par-là que le dernier degré de latitude, ou celui qui a lieu ſous le pole, eſt de 57712 toiſes, plus grand de 959 toiſes que le premier degré.

Dernier degré de latitude.

Connoiſſant l'excès du dernier degré, 959 toiſes, on trouvera l'excès d'un degré quelconque; par exemple, pour Paris, en diſant : la quatrième puiſſance du rayon, qui eſt toujours 1, eſt à 959, comme la quatrième puiſſance du ſinus de la latitude de Paris eſt à l'excès du degré meſuré vers Paris ſur le premier degré. Cette proportion ſe réduit évidemment à multiplier 959 toiſes par la quatrième puiſſance du ſinus de la latitude donnée pour avoir l'excès du degré.

Trouver le le rayon de chaque degré.

2685. Lorſqu'on a l'étendue d'un degré, il eſt aiſé de trouver la longueur du rayon qui répond à ce degré; car on ſait que le rayon équivaut à un arc d'environ 57 degrés : ſi donc on multiplie par 57 la longueur d'un degré, on aura la longueur du rayon; pour plus de facilité, on ajoute le logarithme conſtant 1,7581226 à celui d'un degré en toiſes, & l'on a le logarithme du rayon. L'on ſuppoſe dans cette opération qu'un degré de la terre eſt toujours un arc de cercle; mais quelle que ſoit la figure de la terre, elle diffère

si peu du cercle, que l'on peut, sans aucune erreur sensible, supposer qu'un arc d'un degré est confondu avec l'arc du cercle qui auroit la même courbure & le même rayon. Si l'on avoit là-dessus le moindre scrupule, on pourroit, au lieu d'un degré, se servir de la longueur d'une minute, & l'on trouveroit le même résultat.

2686. Soit *C* le centre de la terre (*fig.* 222); *PEM* la circonférence d'un méridien de la terre, *E* le point qui est sous l'équateur, *P* le pole, *Eq* le degré mesuré sous l'équateur, dont le rayon *ED* est de 3251707 toises; *Mm* le dernier degré de latitude, dont le rayon *MG* est de 3306654 toises (2685); un autre degré de la terre mesuré au point *B*, a pour rayon une ligne *BI*, & la suite de tous les rayons détermine ainsi une ligne courbe *DIG*, qu'on nomme la *développée* de la courbe *EM* du méridien, parce que si l'on plie dans sa circonférence un fil *EDIG*, & qu'on le développe ensuite, son extrémité *E* décrira, par ce développement, la courbe du méridien *EBM* (3276). Ainsi la longueur de la développée *DIG* est égale à la différence des rayons osculateurs *ED* & *MG*, du premier & du dernier degré; c'est-à-dire, 54947 toises, & un arc quelconque de la développée, tel que *DI*, est égal à la différence des rayons *ED* & *BI*. Pour en déduire les dimensions du méridien *PEM*, on tirera la ligne *hI* parallèle à *EC*, & une autre ordonnée infiniment proche de *hI*; on aura dans le petit triangle *fIg* l'angle *g* égal à l'angle *EKB*, qui est la latitude du point *B* de la terre, donc $If = Ig$. sin. lat. & $gf = Ig$ cos. latit.

Calcul de la courbe du méridien. *Fig.* 222.

2687. Nous avons dit que la différence des rayons osculateurs *ED* & *MG*, ou la longueur de la développée *DIG* est égale à 54947 toises, ou 57 fois l'excès 959 du dernier degré sur le premier; l'on aura de même la longueur *DI* de la développée sous une latitude quelconque, en multipliant *DIG* par la quatrième puissance du sinus de la latitude (2684); ainsi pre-

Fig. 222. nant la longueur DIG pour unité, nommant s le finus de la latitude d'un point quelconque B de la terre, & $\sqrt{1-ss}$ fon cofinus, u l'arc DI de la développée, nous aurons $u=s^4$; prenant la différentielle de cette expreffion (3294), l'on a $du=4s^3\,ds$, c'eft la valeur du petit arc gI; donc $If=Ig$. fin. latit. $=4s^4\,ds$ & $gf=4s^3\sqrt{1-ss}\,ds$, les intégrales de ces deux quantités donneront les lignes Dh & hI. Or l'intégrale de $4s^4ds$ eft $\frac{4}{5}s^5$, c'eft la valeur de l'abfciffe Dh; & fi l'on fait $s=1$, c'eft-à-dire, au finus total, on aura l'abfciffe entière DQ ou $CG=\frac{4}{5}$ de la developpée.

La valeur de l'ordonnée Ih ou l'intégrale de fg qui eft $4s^3\sqrt{1-ss}\,ds$, eft $+\frac{4}{5}(1-ss)^2\sqrt{1-ss}-\frac{4}{3}(1-ss)\sqrt{1-ss}+\frac{8}{15}$, en complettant l'intégrale (3306), & fi l'on fait $s=1$, on aura GQ ou $DC=\frac{8}{15}$; ces deux valeurs de DQ & GQ nous feront trouver celles de KH, KC, CH, & celles des deux diamètres de la terre.

2688. La tangente KH eft égale à $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss$, ce qui fe démontre ainfi : dans le triangle HIZ on a cette proportion : le finus de l'angle IHZ (égal au cofinus de la latitude, ou $\sqrt{1-ss}$), eft au rayon comme IZ $(=QG-hI)$ eft à HI, c'eft-à-dire, $\sqrt{1-ss}:1::-\frac{4}{5}(1-ss)^2\sqrt{1-ss}+\frac{4}{3}(1-ss)\sqrt{1-ss}:\frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss-\frac{4}{5}s^4$, c'eft la valeur de HI. Pour trouver l'autre partie IK de la tangente, on fera cette proportion : le finus de IKk eft au rayon, comme Ik, (ou Dh) eft à KI, c'eft-à-dire, $s:1::\frac{4}{5}s^5:\frac{4}{5}s^4$; c'eft la valeur de KI qui ajoutée avec IH, que nous venons de trouver, donne la valeur totale de $KH=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss$, la développée entière DIG étant toujours prife pour unité (2687), ce qui fait 29305 toifes $+$ 14653. ss. Lorfque s fera $=1$, la partie KI deviendra égale à GC, & fera $\frac{4}{5}$ de la développée; donc $GC=\frac{4}{5}GID$ $=43958$ toifes.

2689. La courbe *DIG* étant développée en commençant par le point *D*, décrira une courbe *DON*, dans laquelle on voit que les parties coupées *DE*, *OB*, *NM* font toutes égales au rayon *ED* du premier degré; la partie $KO = IO - KI = ID - KI = s^4 - \frac{4}{5} s^4 = \frac{1}{5} s^4$; ainsi pour avoir *OK*, l'on multipliera la cinquième partie de la développée *GID* par la quatrième puissance du sinus de la latitude. Fig. 222.

La ligne *HB* ou la verticale comprise entre la surface de la terre *B*, & le point où cette verticale va couper l'axe, est égale à $BO + OK + KH$; ainsi elle est égale à la somme du rayon du premier degré de latitude, des $\frac{8}{15}$ de la développée entière, de $\frac{1}{5}$ de la développée multipliée par la quatrième puissance du sin. lat. & de $\frac{4}{15}$ de la développée multipliée par le carré du sinus de la latitude, ou ce qui revient au même à 3281012 toises, + 10989 multiplié par la quatrième puissance du sinus, plus 14653 multiplié par le carré du sinus de la latitude.

Longueur de la verticale.

Par le moyen de la tangente *KH*, on trouvera facilement la partie *CH*; car dans le triangle rectangle *KHC*, l'angle *K* est la latitude (2675), donc *CH* = *KH*. sin. lat. De même dans le triangle *HBR*, on a *HR* = *BH* sin. lat. On en retranchera *CH*, & il restera *CR*; on cherchera aussi *BR* = *BH* cos. lat. On cherchera l'hypothénuse *CB*, qui est le rayon de la terre, & l'angle *CBR* qui retranché de la latitude du lieu *B* (égal à l'angle *RBH*) donnera le petit angle *CBH* de la verticale & du rayon de la terre.

Trouver les rayons de la terre.

2690. Exemple. Pour avoir la verticale *BH* sous la latitude de Paris, qui est à 48° 50′, on trouve d'un côté 3529 toises, de l'autre 8304 toises à ajouter avec 3281012, & l'on a pour la verticale *BH* 3292845; d'où l'on tire *HR* = 2478847, & *BR* dont il suffit d'avoir le logarithme 6,3359632. La tangente *KH* = 29305 + 8322 = 37627, étant multipliée par le sinus de la latitude, donne *CH* = 28325 que l'on retranchera de *HR*, & l'on aura *CR* = 2450522; si l'on ôte de son loga-

Les angles des verticales & des rayons.

rithme celui de *BR*, on aura celui de la tangente de *CBR*; cet angle se trouvera de 48° 30′ 24″, plus petit que la latitude 48° 50′ de 19′ 36″; c'est la valeur de l'angle *CBH* que forme la verticale avec le rayon pour Paris; enfin *CR* divisée par le sinus de l'angle *CBR*, donnera le rayon *CB* pour Paris 3271581 toises.

C'est par cette méthode que j'ai calculé la table suivante (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 108) pour avoir les parallaxes de la lune dans le sphéroïde applati (1684, 1705, 1708), lorsque je calculois les observations faites à Berlin. On y voit la grandeur absolue de la terre, & le degré d'aplatissement qui résulte des trois degrés que nous avons employés, & de l'hypothèse que nous avons suivie (2683). Le rayon de l'équateur ou la somme de *ED* & de *DC* est 3281012 toises, le demi-axe ou la différence entre *GC*, & le rayon *GM* du dernier degré est de 3262688 toises; la différence 18325 toises est l'aplatissement de la terre, de 8 lieues communes de France, ou un cent-soixante-dix-neuvième du rayon de l'équateur, au lieu de $\frac{1}{230}$ que donne la théorie de l'attraction quand on supose la terre homogène. Ce degré d'aplatissement de $\frac{1}{179}$ est celui que j'ai employé dans mes calculs de la parallaxe (1705), $= \frac{1}{178}$ de l'axe de la terre.

Aplatissement.

Degrés de Latitude.	Angle du rayon avec la verticale.	Rayons de la terre, tels que *CB*, en toises.	Angles dans le sphéroïde elliptique.
0°	0′ 0″	3281012	0′ 0″
10	5 20	3280572	6 36
20	10 27	3279263	12 26
30	14 58	3277155	16 44
40	18 17	3274377	19 4
50	19 37	3271202	19 4
60	18 22	3268017	16 44
70	14 18	3265252	12 26
80	7 50	3263396	6 36
90	0 0	3262688	0 0

2691.

2691. Nous n'avons employé dans les calculs précédens, que trois degrés, celui du Pérou, celui du nord & celui de Paris à Amiens : il y a encore d'autres degrés mesurés avec soin ; savoir au midi de la France par M. de Thury & M. de la Caille ; au Cap de Bonne-Espérance par M. de la Caille seul ; en Italie, entre Rome & Rimini par le P. Boscovich, & le P. Maire, Jésuites ; en Autriche & en Hongrie par le P. Liesganig ; en Piémont par le P. Beccaria ; dans l'Amérique septentrionale par des astronomes Anglois, en Pensylvanie : on en verra les quantités dans la table suivante ; j'observerai seulement que l'étalon de Langlois sur lequel fut faite la toise de M. de la Caille (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 433), (& qui probablement est le même que celui que le sieur Canivet, neveu de Langlois, a acheté à son inventaire) est encore plus long que la toise du Pérou, d'environ $\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{20}$ de lig. sans doute qu'il a été usé par le frottement qu'exigeoit entre ses mains l'usage d'un pareil instrument ; au contraire la toise du P. Boscovich étoit conforme à celle de M. de Mairan (2636).

TABLE des dix degrés qui ont été mesurés géométriquement, par divers Astronomes.

Latit. moy. des degrés mesurés.	Valeur des degrés en toises.	Auteurs d'où les mesures sont tirées, & qui en ont donnés les détails.
0° 0′	56753	M. Bouguer & M. de la Condamine (2673).
33 18 A	57037	M. de la Caille, *Mém. acad.* 1751, *p.* 435.
39 12	56888	MM. Mason & Dixon, *Phil. trans.* 1768, *p.* 326.
43 0 S	56979	Le P. Boscovich, *de Litter. exped.* 1755.
44 44	57069	Le P. Beccaria, en Piémont 1768.
45 0	57028	*Mérid. vér. Mém. acad.* 1758, *p.* 244.
45 57	56881	Le P. Liesg. en Hong. *Dimens. grad.* 1770, *p.* 256.
49 23	57069	De Paris à Amiens (2651).
66 20	57422	Sous le cercle polaire (2672).
48 43	57086	Le P. Liesganig, en Autriche, *p.* 214.

2692. Le P. Boſcovich dans ſes notes ſur le Poëme Latin de M. Stay, examina de quelle manière on pourroit combiner les cinq degrés dont on avoit la meſure pour en tirer l'ellipticité de la terre par une eſpèce de milieu, & il ſe propoſoit de trouver les corrections à faire aux réſultats des meſures, de manière que la ſomme des corrections poſitives fût égale à celle des négatives; que les différences des degrés fuſſent proportionnelles aux différences des ſinus verſes des doubles latitudes (*3626*); enfin que la ſomme des corrections poſitives ou négatives fût la plus petite de toutes celles que l'on peut avoir en obſervant les deux premières conditions; & il trouvoit $\frac{1}{248}$ pour la différence des axes. (*Tom. II, pag.* 424).

Mais employant enſuite les degrés meſurés par le P. Liesganig avec les 8 autres que l'on avoit, le P. Boſcovich a trouvé pour l'ellipticité de la terre $\frac{1}{311}$, & ſi l'on omettoit le ſeul degré de Laponie, qui diffère ſenſiblement des autres, ſur-tout du degré de l'Amérique ſeptentrionale, & de celui de Boheme, on auroit, ſelon cet auteur $\frac{1}{341}$. Ces deux fractions ne s'éloignent pas beaucoup de $\frac{1}{335}$ que le P. Boſcovich trouve par la théorie, en faiſant varier les denſités d'une manière aſſez naturelle (*Voyage aſtronomique & géographique*, édition de 1770, *pag.* 512 & dernière).

2693. D'après les dimenſions de la terre qui ſont dans la table de l'article *2690*, on peut avoir une idée de ſa ſurface, de ſa ſolidité & de ſon poids; ſuppoſons, pour ſimplifier le calcul, que l'on décrive un ſphéroïde ſur les deux diamètres de la terre, dont l'un eſt de *656*2024 toiſes ou de 2874 $\frac{2}{5}$ lieues, l'autre de *6525376* toiſes ou 2858 $\frac{2}{5}$ lieues, ſon volume ou ſa ſolidité ſera $\frac{2}{3}\, c\, a^2\, b$ (3331) ou 1236*6*044000 lieues cubes.

Groſſeur ou volume de la terre.

Si l'on ſuppoſe un globe de même volume ou groſſeur, il faudra que ſon rayon ſoit de 1434,544 lieues, & ſa ſurface ſera 25860560 lieues carrées. Mais ſi l'on veut avoir la ſurface du ſphéroïde ſans recourir à la ſuppoſition d'une ſphère équivalente, il faudra employer

la formule $2pab + \frac{pae^2}{3b} - \frac{e^4pa}{20b^3} + \frac{e^6pa}{56b^5}$ (art. 3330), & l'on trouvera le premier terme 25809715 lieues, les autres ſont + 48456 — 82 + 0,3, le total ſera 25858089 lieues carrées, ſurface totale d'un ſpéroïde elliptique décrit ſur les deux axes employés ci-deſſus. Surface.

Pour avoir une idée de la maſſe ou du poids total de la terre, ſuppoſons qu'elle ſoit compoſée intérieurement d'une matière à peu-près analogue à l'argile, dont le pied cube pèſe environ 140 livres; la toiſe cube peſera 30240, la lieue cube 359775200000000 & le poids de la terre entière ſera 4448994000000000000000000 livres, ce nombre étant compoſé de 25 chiffres. Si l'on vouloit pouſſer le calcul juſques à avoir le nombre des grains de ſable dont cette maſſe eſt compoſée, chaque grain de ſable ſenſible ne peut avoir moins d'un vingtième de ligne, d'où j'ai conclu qu'il devoit y avoir en tout 759121200000000000000000000000000 grains de ſable, ce nombre étant compoſé de 33 chiffres. Ce que pèſe la terre.

2694. Les degrés meſurés ne ſuffiſant pas pour trouver tous les autres, ſans le ſecours d'une hypothèſe, M. Bouguer a fait une table de tous les degrés de latitude & de longitude en ſuivant ſon hypothèſe (2683), je l'ai rapportée dans mon Expoſition du calcul aſtronomique, *p.* 197. Il y en a d'autres dans le Manuel de Trigonométrie, de M. l'Abbé de la Grive, imprimé en 1754, qui ſont faites ſur différentes hypothèſes.

2695. On a remarqué dans les accroiſſemens de ces degrés, en allant de l'équateur vers les poles quelques irrégularités qui viennent peut-être des circonſtances locales, plus que de l'irrégularité de la terre : on trouve, par exemple, que le degré meſuré en Italie eſt plus petit, & que celui du Cap eſt plus grand qu'il ne devroit être ſuivant la loi établie par les trois degrés, meſurés ſous l'équateur, en France & au cercle polaire; mais une partie de ces différences peut venir de l'attraction latérale des montagnes ſur le fil à-plomb. Par des obſervations que M. Bouguer & M. de la Condamine firent Irrégularités des degrés.

avec grand ſoin en 1737, près de la montagne de Chimboraço au Pérou, le fil à-plomb étoit détourné de 8″ par la maſſe de cette montagne ; les hauteurs des étoiles priſes avec un quart-de-cercle de deux pieds & demi, du côté du midi, paroiſſoient toutes plus grandes, & les hauteurs priſes du côté du nord paroiſſoient plus petites quand on obſervoit tout près de la montagne du côté du midi, que quand on en étoit éloigné, à même latitude ; ce qui prouvoit que le poids du fil à-plomb étoit attiré au midi, & indiquoit une ligne verticale & un zénit trop près des étoiles méridionales (M. Bouguer, *pag.* 389).

Attraction des montagnes.

Cette montagne qui a 3217 toiſes de hauteur, eſt environ 7400 millions de fois plus petite que la terre ; mais quand on eſt placé à 1800 toiſes de ſon centre de gravité, c'eſt-à-dire, 1900 fois plus près de lui que du centre de la terre, ſon attraction doit être environ $\frac{1}{2000}$ de celle de la terre ; cette quantité auroit dû produire une différence 13 fois plus conſidérable que celle qu'on a obſervée, ſi la montagne n'eût pas été un volcan creuſé par l'action des feux ſouterreins ; (M. Bouguer, *pag.* 389). Peut-être que la montagne elle-même n'a été ſoulevée que par de ſemblables exploſions.

2696. Le P. Beccaria a trouvé en Piémont une différence encore plus grande : entre Turin & Andra l'arc meſuré s'eſt trouvé de 26″ plus petit qu'en France ſur une égale longueur, & le degré qu'on en auroit voulu conclure auroit été trop grand de 900 toiſes ; mais Andra eſt ſituée ſur le penchant de *Monte Barone*, qui va toujours en s'élevant ſur une longueur de plus de ſept lieues juſqu'au ſommet de *Monte Roſa*, que le P. Beccaria regarde comme la plus haute montagne de l'Europe.

Le P. Boſcovich ayant trouvé le degré du méridien en Italie de 56979 toiſes, tandis qu'il auroit dû être de 57110, en le réglant ſur ceux du nord & du Pérou (2683), a penſé que les termes de ſa meſure étant placés, l'un au nord & l'autre au midi de la grande chaîne des montagnes de l'Appennin, les obſervations faites par le moyen du fil à-plomb, avoient dû être troublées par l'at-

traction de cette maſſe de montagnes, & donner un moindre nombre de toiſes pour chaque degré.

M. Cavendish croit que le degré qui a été meſuré dans l'Amérique ſeptentrionale pourroit bien avoir été diminué de 60 ou 100 toiſes par le défaut d'attraction du côté de la mer, & que les degrés meſurés en Italie & au Cap de Bonne-Eſpérance pourroient être ſenſiblement affectés de la même cauſe, (*Philoſ. tranſ.* 1768, *pag.* 328). Le P. Boſcovich penſe qu'on pourroit s'en aſſurer en faiſant des expériences à S[t] Malo lorſque la mer eſt très-baſſe, & lorſqu'enſuite une élévation de 100 pieds, par l'effet des grandes marées, rend ſon attraction conſidérablement plus forte.

2697. M. de la Caille penſoit auſſi qu'à Perpignan le voiſinage des Pyrénées avoit pu faire dévier le fil à-plomb vers le ſud; faire paroître le zénit plus au nord qu'il ne l'eſt réellement, & rendre plus petits les arcs compris entre Perpignan & les autres villes de France; auſſi voyons-nous que M. de la Caille abandonne, pour ainſi dire, les obſervations céleſtes faites à Perpignan pour conclure la longueur du degré, dont le milieu paſſe à 45° de latitude 57028 toiſes (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 244).

2698. Juſqu'ici nous n'avons parlé que des degrés du méridien ou des degrés de latitude; il y a cependant des cas où l'on a beſoin des degrés de longitude ou des degrés des petits cercles parallèles à l'équateur. Si la circonférence de la terre *PEM* (*fig.* 222), eſt ſuppoſée ſphérique, le rayon *BR* du parallèle qui paſſe par le point *B*, eſt le coſinus de la latitude *EB*, les degrés de longitude ſont donc aux degrés de latitude, comme le rayon eſt au coſinus de la latitude; ainſi le degré de latitude étant à Paris 57074 toiſes, ſi l'on multiplie cette quantité par le coſinus de 48° 50′ 14″, l'on aura 37566 toiſes, pour l'étendue de chaque degré du parallèle de Paris.

Des degrés de longitude.

Fig. 222.

Mais la terre étant aplatie on trouve par cette règle des degrés de longitude qui ſont toujours trop petits,

car *BI* eſt le rayon du degré de latitude en *B* (2686); mais *BH* eſt celui qu'il faudroit prendre pour que la proportion précédente eût lieu, & qu'elle fit trouver la véritable grandeur de *BR*. On a vu ci-devant la manière de trouver la verticale entière *BH* (2680, 2689); cette ligne diviſée par 57 (2685) donne le deg. du grand cercle de la terre qui eſt perpendiculaire au méridien en *B*, & ce deg. multiplié par le coſ. de la lat. donne le deg. du parallèle ſur le ſphéroïde aplati, (*M. Bouguer, pag.* 316). ainſi l'on trouveroit pour Paris que le deg. du grand cercle perpendiculaire au méridien, eſt de 57471 toiſes, plus grand de 397 que le deg. du méridien; & le deg. du parallèle eſt 37833, plus grand de 265 toiſes, qu'il ne ſeroit ſur la terre ſphérique.

Meſure des degrés de longitude.

Delà on voit combien la meſure des degrés de longitude pourroit ſervir à déterminer l'aplatiſſement de la terre (*Mém. acad.* 1733, *pag.* 162); mais pour déterminer l'amplitude des arcs des parallèles en minutes & ſecondes avec aſſez d'exactitude, il faut de très-grandes diſtances, & une très-grande préciſion dans la différence des méridiens : on y emploie ſur-tout des feux pour ſervir de ſignaux (*Mérid. vérif. pag.* 98, 105; *Mém. acad.* 1735, *pag.* 1).

M. de la Condamine dans ſon voyage d'Italie remarqua qu'on pourroit placer ſur un des ſommets de l'Appennin, un ſignal d'où l'on verroit la mer Adriatique à l'orient, & celle de Toſcane à l'occident, & même les montagnes d'Iſtrie & de Croatie d'un côté, & de l'autre celles de Gènes, ce qui formeroit une diſtance de plus de 5° en longitude, qu'on pourroit meſurer avec aſſez de préciſion (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 398).

De la longueur du Pendule.

2699. Les différens pays de la terre étant plus ou moins éloignés du centre de la terre, la force de la peſanteur doit y être différente, & nous verrons dans

la ſuite quelle eſt la différence (3588). Les oſcillations d'un pendule qui eſt animé par la peſanteur doivent ſe faire plus vîte ſous le pole que ſous l'équateur; il faut donc pour lors allonger un pendule pour lui faire battre les ſecondes. L'obſervation a conſtaté cette vérité, depuis le voyage fait à Cayenne en 1672 (2657), & l'on a obſervé ſous l'équateur & en Laponie, une différence de deux lignes & demie dans la longueur du pendule. Voici une table des longueurs du pendule ſimple obſervées juſqu'à préſent, dont on pourroit remplir les points intermédiaires, en ſuppoſant que les allongemens ſoient comme les carrés des ſinus des latitudes, ainſi que l'a fait M. de Maupertuis, (*Figure de la terre*, *pag.* 181).

Sous l'équateur à 2434 toiſ. de haut. (M. Boug. *Fig. de la T.p.*342).	36p	6l70
Sous l'équateur à 1466 toiſes, par le même.	36	6,83
Sous l'équateur au niveau de la mer, par le même. . . .	36	7,07
A Portobelo, latit. 9° 34', par le même.	36	7,16
Au petit Goave, dans l'Iſle St. Domingue, 18° 27', par le même.	36	7,33
Au Cap de Bonne-Eſpérance 33° 55' (*Mém. acad.* 1751, *p.* 438).	36	8 07
A Genève 46° 12', par M. Mallet, avec le pendule invariable. .	36	8,17
A Paris 48° 50' (*Mém. ac.* 1735), par M. de Mairan. V. art. 2638.	36	8,52
Par M. Bouguer, après les réductions faites.	36	8,67
A Leyde 52° 9', par M. Lulofs.	36	8,71
A Pétersbourg 59° 56', par M. Mallet.	36	8,97
A Pello 66° 48' (M. de Maupertuis, *Fig. de la Terre*, *pag.* 180). .	36	9,17
A Ponoi, en Laponie 67° 4', par M. Mallet.	36	9,17

Les obſervations du pendule ont beſoin de diverſes corrections relativement à la chaleur qui dilate les inſtrumens, à la réſiſtance de l'air, & à la hauteur au-deſſus du niveau de la mer; M. Bouguer trouve avec ces corrections que le pendule ſous l'équateur, doit être de 36 pou. 7 lig. 21, & pour Paris 36 pou. 8 lig. 67. (*Figure de la terre*, *pag.* 342).

Le pendule invariable dont s'eſt ſervi M. Mallet, eſt celui dont M. de la Condamine s'étoit ſervi au Pérou, (*Mém. acad.* 1745, *pag.* 476). J'ai trouvé qu'il faiſoit à Paris en 24 heures de temps moyen 98891 oſcillations, M. Mallet en a trouvé 98852 à Genève, 98941 à Péteſbourg, 98964 à Ponoi; & ſuppoſant le pendule pour Paris 36 pou. 8 lig. 52, il en a conclu les trois autres

par le rapport des carrés des nombres d'oscillations (3371).

La manière de déterminer la longueur du pendule simple avec la plus grande précision, & d'y faire toutes les corrections nécessaires, a été donnée par M. de Mairan, dans les *Mém. de* 1735, *pag.* 153.

M. de la Condamine, M. Bouguer & M. Godin donnèrent aussi des Mémoires sur cette matière, dans le même volume; enfin, on peut voir le livre de M. Bouguer, *pag.* 330. A l'égard des pendules composés, on peut voir le mémoire que j'ai donné à la suite du Traité d'Horlogerie de M. Lepaute.

On voit par la comparaison des 3 premières observations, que la pesanteur diminue quand on s'élève sur les montagnes du Chili; on a prétendu que le contraire avoit été observé dans les Alpes en 1768; mais M. Bouguer avoit déja montré que cela même pouvoit avoir lieu, si les montagnes avoient une densité beaucoup plus considérable que le total du globe. *Ibid. pag.* 362. On trouvera des applications de ces expériences du pendule, art. 3372, 3373 & 3421.



LIVRE SEIZIEME.

DE LA PRÉCESSION, ET DE LA PARALLAXE annuelle des étoiles fixes, des changemens de l'obliquité de l'écliptique, & du déplacement particulier de différentes étoiles.

LES ÉTOILES fixes sont les termes de comparaison auxquels les astronomes rapportent sans cesse les mouvemens planétaires; ainsi les situations des étoiles sont le fondement essentiel de toutes les recherches des astronomes; & la connoissance de leurs mouvemens, vrais ou apparens, influe sur tout le reste de l'astronomie.

2700. On doit considérer six espèces de mouvemens dans les étoiles fixes, la précession, l'aberration, la nutation, le changement général de latitude, les changemens particuliers à différentes étoiles, & la parallaxe annuelle que plusieurs astronomes y ont soupçonnée; nous réserverons l'aberration & la nutation pour le livre suivant, comme ayant été trouvées ensemble, & fort récemment; nous parlerons ici des quatre autres mouvemens. Six mouvemens dans les étoiles.

2701. LA PRÉCESSION est ce changement annuel d'environ $50'' \frac{1}{3}$ par année (917), observé dans les longitudes de toutes les étoiles fixes. Le mouvement général de la précession se fait le long de l'écliptique, & autour de ses poles, ensorte que les latitudes des étoiles fixes n'en sont point affectées; car tandis que nous voyons toutes les longitudes des étoiles fixes plus grandes en 1750 de $26° \frac{1}{2}$ qu'elles n'étoient au temps d'Hipparque (915), nous n'appercevons qu'à peine un petit changement dans les latitudes des étoiles fixes, changement qui tient à d'autres causes (2739).

Par un effet de ce mouvement en longitude, toutes les étoiles changent d'aſcenſion droite & de déclinaiſon, mais ce changement n'eſt pas le même pour différentes étoiles ; nous allons donc commencer par la recherche de la préceſſion en aſcenſion droite & en déclinaiſon, qui eſt d'un uſage continuel & indiſpenſable dans l'aſtronomie.

Il eſt facile quand on connoît la longitude & la latitude d'un aſtre, de trouver par la trigonométrie ſphérique l'aſcenſion droite & la déclinaiſon (*906*) ; & par conſéquent d'avoir le changement de l'une quand on connoît le changement de l'autre ; mais il eſt beaucoup plus facile de trouver la préceſſion pour un petit eſpace de temps, par la conſidération des arcs ſuppoſés comme infiniment petits ; c'eſt ce que nous allons exécuter par deux méthodes différentes.

Fig. 224. 2702. Suppoſons que *ENT* (*fig.* 224) ſoit l'équateur, *EQ* l'écliptique, *ED* le changement du point équinoxial le long de l'écliptique, ou la préceſſion en longitude, *DG* un petit arc perpendiculaire ſur *EG* ; l'équateur *ET* prendra la ſituation *DVT*, enſorte qu'il tournera, pour ainſi dire, autour d'un point *T* ſitué dans le colure des ſolſtices à 90° du point *E* ; car puiſque l'obliquité de l'écliptique ne change pas, c'eſt-à-dire, que l'angle *GED* eſt égal à l'angle *VDQ*, c'eſt une preuve que le petit arc *GE* eſt parallèle au petit arc *DF*, & que tous deux ſont perpendiculaires ſur *DG*, ce qui n'arrive qu'à 90° de l'interſection *T* des deux cercles, ou du pole de l'arc *GD* ; ainſi les longitudes qui ſe comptoient du point *E* le long de l'écliptique *EDQ*, ſe compteront du point *D*, & feront toutes changées d'une quantité *ED*, qui eſt la préceſſion de $50'' \frac{1}{3}$ par année. De même les aſcenſions droites qui ſe comptoient du point *E* le long de l'équateur *EGNT*, ſe compteront du point *D*, & feront toutes changées de la quantité *EG*, parce que *TG* étant égal à *TD*, on a *GE* pour la différence entre *TE* & *TD*. Ainſi la préceſſion en aſcenſion droite commune à tous

les aſtres ſera égale à *EG*, ou *ED* coſ. *E* (3611), c'eſt-à-dire, à la préceſſion en longitude multipliée par le coſinus de l'obliquité de l'écliptique. Si l'on appelle *P* la préceſſion en longitude qui eſt de 50″ par année, & *O* l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′, l'on aura *la préceſſion moyenne en aſcenſion droite, ou la première partie de la préceſſion en aſcenſion droite* = P coſ *O*. (Voy. encore l'art. 2706).

2703. Il y a un autre changement dans la préceſſion en aſcenſion droite qui varie pour les différentes étoiles, parce qu'il dépend de leur ſituation. Soit *A* un aſtre quelconque, *AB* ſa déclinaiſon lorſque l'équateur étoit en *ET*; *AC* ſa déclinaiſon lorſque l'équateur eſt en *DT*, la différence entre *TB* & *TC* ou entre *GB* & *DC* qui eſt égale au petit arc *BK* de l'équateur, marque un autre changement d'aſcenſion droite dans l'étoile *A*, puiſqu'au lieu de répondre au point *B*, elle répond au point *C* qui en diffère de la quantité *BK*, changement qui eſt indépendant du changement *GE* que nous avons évalué ci-devant. De même *KC* indique la différence entre la déclinaiſon *AB* & la déclinaiſon *AC*; c'eſt-à-dire, la préceſſion en déclinaiſon, qui dérive de la préceſſion en longitude, *ED*.

Préceſſion en aſcenſion droite.

La différence *KB* vient de ce que les petits arcs *KB*, *CH*, ne ſont pas parallèles entre eux; ces arcs ſont convergens vers le point d'interſection *T*, & cela d'autant plus que le coſinus de l'arc *T* augmente; car dans le triangle *CKT* ſuppoſé rectangle en *C*, la trigonométrie ſphérique nous apprend que le ſinus de l'angle *K*, eſt comme le ſinus de ſon côté oppoſé *TC* (3665), donc le ſinus de cet angle change comme ſin. *TC*; mais les petites augmentations des ſinus ſont comme les coſinus (3307), donc la variation de l'angle *C* eſt comme le coſinus de *TC* ou le ſinus de l'aſcenſion droite *DC*; ainſi le petit angle *T*, meſuré par *GD*, étant égal à *P* ſin. *O* (3611), la convergence ou l'angle des arcs *BK*, *CH*, où de leurs tangentes, eſt *P* ſin. *O* ſin. aſc. dr. C'eſt auſſi l'angle des arcs *AB* & *AK* ou de

leurs tangentes en K & en B ; mais l'angle que font ces deux tangentes, à leur point de concours a pour rayons les tangentes elles-mêmes des arcs AB, AK; tandis que l'arc compris BK a pour rayon le ſinus total, ou le rayon de la ſphère, donc le rayon eſt à la tangente de la déclinaiſon AB, comme l'angle des deux tangentes eſt à l'arc BK ; ainſi il faut multiplier l'angle des tangentes en B & en K, que nous avons trouvé ci-devant, par la tangente de la déclinaiſon AB, pour avoir l'arc KB. Donc, *cette ſeconde partie* BK *de la préceſſion en aſcenſion droite ſera* P. ſin. O. ſin. aſcenſ. dr. tang. déclinaiſon. On en verra bientôt une autre démonſtration (2706).

Seconde partie de la préceſſion en aſcenſion droite.

2704. La préceſſion en déclinaiſon CK eſt à GD, ou P ſin. O, comme ſin. TG eſt à ſin. TK, ou coſ. DC (892), donc $CK = P$ ſin. O. coſ. EK; donc la préceſſion en déclinaiſon eſt égale à P. ſin. O. coſ. aſcenſ. droite.

2705. Je vais actuellement chercher les mêmes quantités par la conſidération des poles de l'écliptique & de l'équateur, parce que c'eſt la manière dont M. Euler, & d'autres géomètres ont coutume de traiter les mouvemens des cercles de la ſphère, & qu'elle eſt plus commode en certains cas. Soit P (*fig.* 223) le pole de l'équateur, E le pole de l'écliptique, S une étoile, PSI le cercle de déclinaiſon, ESL le cercle de latitude, HI une portion de l'équateur, KL une portion de l'écliptique, FS un petit arc parallèle à l'équateur, DS parallèle à l'écliptique; je ſuppoſe l'arc KL ou l'angle KEL égal à la préceſſion en longitude, & l'arc HI ou l'angle HPI égal à la préceſſion en aſcenſion droite; ce ſont les quantités dont il faut trouver le rapport, c'eſt-à-dire, que par le moyen de KL il faut avoir HI.

Fig. 223.

L'angle DSF eſt égal à l'angle de poſition PSE; car l'angle PSF eſt droit, auſſi bien que l'angle ESD; ſi l'on retranche l'angle commun ESF, il reſte $PSE = DSI$. Le petit triangle DSF étant ſenſiblement

rectiligne, si l'on appelle 1 le sinus total, on aura $\frac{DS}{SF} = \frac{1}{\text{cos. } PSE}$, (3611). Puisque EL est un quart-de-cercle, on a $\frac{KL}{DS} = \frac{1}{\text{sin. } ES}$ (892), & $\frac{SF}{HI} = \frac{\text{sin. } PS}{1}$. La fraction $\frac{KL}{HI}$ peut être aussi exprimée de la sorte $\frac{KL.DS.SF}{DS.SF.HI}$, car DS & SF se détruisent; substituant dans cette expression les valeurs que l'on vient de trouver, on aura $\frac{\text{sin. } PS}{\text{sin. } ES.\text{ cos. } PSE}$; mais $\frac{1}{\text{cos. } PSE} = \frac{\text{tang. } PSE}{\text{sin. } PSE}$, ainsi l'expression revient à $\frac{\text{tang. } PSE.\text{ sin. } PS}{\text{sin. } ES.\text{ sin. } PSE}$; mais par la trigonométrie sphérique (3690), sin. ES. sin. PSE = sin. PE. sin. EPS donc $\frac{KL}{HI} = \frac{\text{tang. } PSE.\text{ sin. } PS}{\text{sin. } PE.\text{ sin } EPS}$. Fig. 223.

2706. Il faut dans cette expression faire évanouir *tang.* PSE, puisqu'on peut exprimer l'angle S par l'angle P & par les côtés PS, PE, au moyen de l'ascension droite & de la déclinaison de l'étoile, avec l'obliquité de l'écliptique, qui sont les données de ce problême. Ayant abaissé un arc perpendiculaire EX, on a, tang. $S = \frac{\text{tang. } P.\text{ sin. } PX}{\text{sin. } SX}$ (3693); mais sin. SX = sin. $(PS - PX)$ = sin. PS. cos. PX — sin. PX. cos. PS (3619), donc $\frac{\text{sin. } SX}{\text{sin. } PX} = \frac{\text{sin. } PS}{\text{tang. } PX}$ — cos. PS; mais $\frac{1}{\text{tang. } PX} = \frac{1}{\text{cos. } P.\text{ tang. } PE}$ (3668), donc $\frac{\text{sin. } SX}{\text{sin. } PX} = \frac{\text{sin. } PS}{\text{cos. } P.\text{ tang. } PE}$ — cos. $PS = \frac{\text{sin. } PS - \text{cos. } PS.\text{ cos. } P.\text{ tang. } PE}{\text{cos. } P.\text{ tang. } PE}$; donc $\frac{\text{sin. } PX}{\text{sin. } SX}$ tang. P, c'est-à-dire, tangente $S = \frac{\text{cos. } P.\text{ tang. } P.\text{ tang. } PE}{\text{sin. } PS. - \text{cos. } PS.\text{ cos. } P.\text{ tang. } PE}$; substituant pour tang. P. cos. P sa valeur sin. P, & divisant tout par tang. PE, on a enfin $\frac{\text{sin. } P}{\text{sin. } PS.\text{ cot. } PE. - \text{cos. } P.\text{cos. } PS}$, c'est la valeur de tang. S; cette expression sera employée dans plusieurs endroits de ce livre (3722 & suiv. 3826); si l'on met cette valeur dans l'expression de $\frac{KL}{HI}$, qui est $\frac{\text{tang. } PSE.\text{ sin. } PS}{\text{sin. } PE.\text{ sin. } EPS}$ (2705), elle deviendra . . . . .

Fig. 223.

$\frac{\text{fin. } P.\text{ fin. } PS.}{\text{fin.} PE.\text{ cot. } PE.\text{ fin. } P.\text{ fin. } PS - \text{fin.} PE.\text{ fin. } P.\text{ cof. } P.\text{ cof. } PS}$, divifant le numérateur & le dénominateur par fin. P fin. PS, & mettant cof. PE à la place de fin. PE. cot. PE, on aura $\frac{KL}{HI} = \frac{1}{\text{cof. } PE. - \text{fin. } PE.\text{ cof. } P.\text{ cot. } PS}$; mais l'angle P eft le complément de l'afcenfion droite, donc la préceffion en afcenfion droite HI eft égale à la préceffion en longitude multipliée par (cof. $23° \frac{1}{2}$ — fin. $23° \frac{1}{2}$. fin. afc. dr. tang. déclin.).

Préceffion en afcenfion droite.

Autre démonftration.

2707. On peut démontrer autrement la même formule en concevant que l'étoile eft fixe en S, & confidérant le pole de l'équateur qui fe meut autour du pole E de l'écliptique, fur le petit arc Pp d'un parallèle à l'écliptique; car toutes les fois que l'interfection de deux cercles change de place par le mouvement d'un des cercles, l'inclinaifon reftant la même, il s'enfuit que le pole du cercle mobile décrit auffi un arc de cercle autour du pole du cercle immobile (1353). Suppofons un grand cercle PpR perpendiculaire à EP, c'eft-à-dire, le colure des équinoxes, qui eft confondu avec le parallèle à l'écliptique fur le petit efpace Pp, & un arc perpendiculaire SR; l'étoile S change de longitude par deux raifons; la première, c'eft que le colure des folftices PEA paffe en pEB, & va répondre fur l'équateur en un autre point B, enforte que $BA = BEA$. fin. EA (892), c'eft-à-dire, égal à la préceffion en longitude multipliée par le cofinus de l'obliquité de l'écliptique; c'eft une quantité conftante qui affecte toutes les étoiles, puifque toutes les afcenfions droites fe rapportent au colure des folftices PEA ou PEB, ou au colure des équinoxes qui en eft toujours à 90°. C'eft la première partie de la préceffion en afcenfion droite (2702, 2706).

Mais il y a une feconde caufe de changement dans les afcenfions droites de différentes étoiles, elle vient de ce que l'angle SPR fe change en un angle SpR; or dans le triangle SPR, dont l'angle R eft conftant,

ainſi que le côté SR, tant qu'on n'a égard qu'au changement Pp, & que le point S reſte toujours le même, le changement de l'angle P ou $dSPR = Pp.$ ſin. $P.$ cot. PS (3764); mais $Pp = PEp.$ ſin. $23° \frac{1}{2}$ (892), & l'angle SPR eſt égal à l'aſcenſion droite de l'étoile; donc ce changement de l'aſcenſion droite $= PEp$ ſin. $23° \frac{1}{2}$. cot. PS. ſin. aſc. droite; c'eſt-à-dire, à la préceſſion en longitude, multipliée par le ſinus de l'obliquité de l'écliptique, par le ſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile & par la tangente de ſa déclinaiſon, comme dans l'art. 2703. Fig. 223.

2708. Si l'on appelle L la préceſſion en longitude, on aura la préceſſion en aſcenſion droite compoſée de deux parties; l'une $L.$ coſ. $23° \frac{1}{2}$, l'autre $= L.$ ſin. $23° \frac{1}{2}$ ſin. aſc. dr. tang. décl. Si l'on appelle M la première partie $L.$ coſ. $23° \frac{1}{2}$ de l'expreſſion précédente, & qu'à la place de L on mette dans la ſeconde $\frac{M}{\text{coſ. } 23° \frac{1}{2}}$, on aura pour cette ſeconde partie $M.$ tang. $23° \frac{1}{2}$. ſin. aſc. dr. tang. décl. Ainſi la première partie de la préceſſion en aſcenſion droite ſera conſtante, & la ſeconde ſera égale au produit de la première par la tangente de $23° \frac{1}{2}$, par le ſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile, & par la tangente de ſa déclinaiſon. Je ſuppoſe la préceſſion en longitude L pour dix ans, égale à $8' \, 23'' \, 36$, en la multipliant par coſinus $23° \frac{1}{2}$, on a $7' \, 4'' \, 4$ qui eſt la première partie M de la préceſſion en aſcenſion droite, commune à toutes les étoiles. Si l'on multiplie cette première partie par tang. obl. éclip. par ſin. aſc. dr. & par tang. déclin. on a la ſeconde partie en forme d'équation, qu'on peut appliquer à chaque étoile; j'en ai donné une table à la ſuite de celles de M. Halley, *pag.* 176; & je m'en ſuis ſervi pour la préceſſion de toutes les étoiles qui ſont dans le catalogue, vers la fin des tables de cet ouvrage.

Préceſſion en aſcenſion droite.

2709. On ſuppoſe dans la figure 223 l'étoile S dans les ſix derniers ſignes d'aſcenſion droite, puiſque le point S eſt plus près du pole de l'écliptique que l'équa-

Fig. 223. teur, ainsi la quantité — cos. P de la formule (2706) devient positive quand l'ascension droite est moindre que six signes; l'équation devra donc être ajoutée dans les six premiers signes d'ascension droite; mais dans les six autres, le sinus devenant négatif, elle doit être retranchée. On observera aussi que pour les étoiles dont la déclinaison est australe, la tangente de la déclinaison doit devenir négative & changer les signes des équations (3606).

2710. La précession en déclinaison, est exprimée par DF; or dans le triangle DFS on a $\frac{DF}{DS}$ = sin. S (3613), & au lieu de DS substituant KL. sin. ES (892), on a $DF = KL$. sin. ES. sin. S; mais sin ES. sin. S = sin. PE. sin. P (3690); donc $DF = KL$. sin. PE. sin. P; donc la *précession en déclinaison est égale à la précession en longitude multipliée par le sinus de l'obliquité de l'écliptique & par le cosinus de l'ascension droite de l'étoile*, c'est-à-dire, L. sin. $23° \frac{1}{2}$. cos. asc. dr. & mettant pour L comme ci-devant $\frac{M}{\text{cos. } 23° \frac{1}{2}}$, la précession en déclinaison devient M. tang. $23° \frac{1}{2}$ cos. asc. droite; c'est ainsi que j'ai formé la table que j'ai ajoutée à celles de M. Halley, *pag.* 177; de même que les précessions en déclinaison du catalogue des étoiles.

Précession en déclinaison.

2711. On peut avec une même table trouver la seconde partie de la précession en ascension droite pour 45° de déclinaison, & la précession en déclinaison; car une même table peut exprimer M. tang. $23° \frac{1}{2}$. sin. asc. droite, tang. déclinaison (2708), si tang. déclin. = 1, & exprimer M tan. $23° \frac{1}{2}$. cos. asc. dr. (2710), pourvu qu'il y ait des argumens qui soient renversés, c'est-à-dire, différens de trois signes; ainsi la partie M tan. $23° \frac{1}{2}$ sin. asc. droite, qui répondra à 1^s d'argument sera la même chose que M tang. $23° \frac{1}{2}$ cos. asc. droite pour 4^s d'argument; on peut donc réunir à côté d'un même nombre les argumens 1^s & 4^s; lorsqu'on employera 1^s, on aura la précession en ascension droite (pour 45° de

de déclinaiſon) ; lorſqu'on employera 4^s, on aura la préceſſion en déclinaiſon ; la première devra être multipliée par la tangente de la déclinaiſon pour avoir la ſeconde partie ou équation de la préceſſion en aſcenſion droite, (2708). Tel eſt l'artifice que M. l'Abbé de la Caille a employé dans l'ouvrage intitulé : *Aſtronomiæ fundamenta*, *pag.* 9, table XIV ; mais dont je ne ferai point uſage ici, puiſque les tables que j'ai faites en tiennent lieu.

2712. Les étoiles qui ont l'angle de poſition égal à 90 degrés, c'eſt-à-dire, dont le cercle de déclinaiſon & le cercle de latitude ſe coupent à angles droits, ont la ſeconde partie de la préceſſion en aſcenſion droite détruite par la première, enſorte que la préceſſion en aſcenſion droite eſt nulle ; tous ces points ſont ſur la courbe que forme l'interſection d'un cône oblique dont les deux côtés paſſent par les poles de l'écliptique & de l'équateur, & dont la baſe eſt tangente à la ſphère ſur un des poles, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à un des côtés du cône : voici une table qui montre pour chaque longitude par quel degré de latitude paſſe cette courbe ; elle détermine les étoiles qui ont la plus grande parallaxe en déclinaiſon, & au-dedans, elle renferme celles dont la préceſſion eſt négative, c'eſt-à-dire, décroiſſante pendant que la longitude augmente.

Longit.	Latitude.	
0	90°	0′
10	85	41
20	81	34
30	77	44
50	71	36
70	67	47
90	66	32

2713. La préceſſion en aſcenſion droite & en déclinaiſon, trouvée par les expreſſions précédentes, eſt ſenſiblement uniforme pendant un eſpace de dix ans ; mais dans les dix années ſuivantes, il peut y avoir une demi-ſeconde de plus ou de moins (*Expoſ. du calcul aſtron. pag.* 92), par exemple, la préceſſion en déclinaiſon pour *Antares*, entre 1745 & 1755 eſt 1′ 29″ 3 ; mais de 1755 à 1765, elle n'eſt que de 1′ 28″ 7 ; Inégalité de la préceſſion en aſcenſion droite.

cette inégalité même se pourroit facilement réduire en tables.

Lorsqu'on voudra avoir la précession en ascension droite pour un long espace de temps, il faudra calculer la longitude, & ensuite l'ascension droite qui lui répond, ou bien calculer le mouvement de 10 en 10 ans par les formules précédentes, en changeant à chaque fois l'ascension droite & la déclinaison (2750).

Changement de l'angle de position. *Fig.* 223.

2714. La précession apporte aussi un changement à l'angle de position (1045); car l'angle *EDP* (*fig.* 223), est plus ou moins grand que l'angle *EδP*; sa variation est égale à l'angle *DES* multiplié par le sinus de *PE*, & le cosinus de l'angle *P*, le tout divisé par le sinus de *PS* (3086). Ainsi le changement annuel de l'angle de position est $\frac{50'' \text{ sin. } 23° \text{ sin. asc. dr.}}{\text{cos. déclin.}}$. Il est de 20″ 05 pour les étoiles situées dans l'équateur, & en même temps près du colure des solstices; mais les étoiles situées sur le colure des équinoxes, dont l'ascension droite est 0° ou 180°, n'ont aucun changement dans leur angle de position. Cet angle va en augmentant dans le premier & le troisième quart d'ascension droite; j'en ai donné une table (*Tom. I, pag.* 488).

DIMINUTION DE L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.

2715. Les formules précédentes (2708) suffiroient pour trouver le changement des étoiles en ascension droite & en déclinaison, s'il étoit exactement vrai que la latitude fût invariable, & que tout le changement vînt du mouvement de l'équateur & de celui des points équinoxiaux le long de l'écliptique. Hipparque, Ptolomée, & tous les astronomes qui suivirent jusqu'au temps de Tycho, supposèrent en effet que les latitudes des étoiles fixes étoient constantes, & que leur mouvement de précession se faisoit parallélement à l'écliptique; mais

Tycho ayant obſervé avec plus de ſoin que perſonne, les poſitions d'une multitude d'étoiles, apperçut que les étoiles voiſines des ſolſtices avoient changé de latitude; en effet, on voit que toutes les latitudes méridionales des étoiles ſituées vers trois ſignes de longitude, ſont devenues plus petites, & les latitudes boréales plus grandes, au moins d'un tiers de degré (Tycho, *Progymn. pag.* 233).

Toutes les étoiles changent de latitudes.

2716. J'ai fait voir en calculant plus exactement les obſervations primitives rapportées dans l'Almageſte de Ptolomée, & qui ſervirent autrefois à déterminer les latitudes des étoiles fixes, qu'en effet les points de l'écliptique ſitués vers le ſolſtice d'été, ſe ſont rapprochés de l'équateur & des étoiles méridionales (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 347). On verra bientôt la cauſe de ce mouvement (2728); en voici encore d'autres preuves tirées des obſervations multipliées qu'on a faites de l'obliquité de l'écliptique.

2717. Ptolomée nous dit expreſſément (*Almag. I.* 9), qu'il a trouvé pendant pluſieurs années, la diſtance des tropiques de 47 degrés avec deux tiers d'une portion majeure (ou d'un degré), & trois quarts d'une portion mineure (ou d'une minute), c'eſt-à-dire, 47° 40′ 45″ dont la moitié eſt 23° 50′ 22″; ainſi, ajoute-t-il, c'eſt à peu-près la même partie qu'a trouvé Eratoſthène, & dont Hipparque s'eſt ſervi, car la diſtance des points ſolſticiaux, eſt, ſelon eux, $\frac{9}{83}$ de la circonférence du méridien.

Preuve tirée de Ptolomée, & des anciens.

2718. Ptolomée dit ailleurs que la hauteur du gnomon étant de 60 parties, la longueur de l'ombre à Marſeille étoit de 20 parties & $\frac{50}{60}$. On attribue à Pythæas cette déterminaiſon que rapporte Ptolomée. Voy. Strabon, L. II. Gaſſendi, *Tom. IV*, *pag.* 523, *in vita Peir. & epiſt. ad Vendel. de prop. gnom. ad ſolſtitium.* M. de Louville, *Hiſt. acad.* 1716, *pag.* 48. *Acta erudit. jul.* 1719. *Veidler*, *hiſt. aſtron. pag.* 120. Quoi qu'il en ſoit, ces deux témoignages s'accordent à donner l'obliquité de l'écliptique 200 ans avant J. C. de 23° 51′ ou 52′.

Le P. Riccioli s'efforce de prouver que l'obliquité de l'écliptique n'étoit cependant que de 23° ½ dans ce temps-là (*Astr. ref. pag.* 19. *Georg. ref. l.* 7. *c.* 28); mais on ne sauroit avoir actuellement de preuves assez démonstratives pour contredire quatre témoignages ou quatre observations anciennes, faites par Eratosthène, Hipparque, Pythæas & Ptolomée; cette observation étoit d'ailleurs facile à faire, on ne doit pas présumer que Ptolomée s'y soit trompé pendant plusieurs années.

Il est vrai qu'en consultant Pappus d'Alexandrie (*Collec. l. VI, prop.* 35, Riccioli, *Astron. refor. pag.* 20), qui vivoit 200 ans après Ptolomée, on trouve à-peu-près l'obliquité de l'écliptique telle qu'elle est aujourd'hui, mais c'est en admettant l'interprétation de Commandinus, à laquelle Vendelinus n'a pas cru devoir déférer, d'ailleurs Pappus n'étoit pas autant observateur qu'Eratosthène, Hipparque & Ptolomée, & son but n'étoit pas de donner une détermination astronomique de l'obliquité de l'écliptique.

Des Chinois. 2719. Dès l'an 106 avant J. C. les astronomes Chinois donnent comme un principe connu que l'obliquité de l'écliptique est de 24° Chinois, qui font 23° 39′ 18″ (P. Gaubil II. 114), cette quantité est moins considérable que celle des Grecs, mais elle prouve cependant aussi une diminution dans l'obliquité de l'écliptique.

Des Arabes. 2720. Albategnius qui vivoit vers l'an 880 (*De sci. stell. c.* 4, *pag.* 14. *edit.* 1645), dit qu'il a observé avec le plus grand soin la plus grande distance du soleil au zénit dans le meridien, à Aracte, de 59° 36′, & la plus petite de 12° 26′, d'où il conclut la distance des tropiques 47° 10′, la hauteur du pole d'Aracte 36°, & l'obliquité de l'écliptique 23° 35′. Cette observation fut faite avec une alidade très-longue & très-bien vérifiée; il faut encore y ajouter 40″ pour l'effet de la réfraction moins la parallaxe, & l'on aura 23° 35′ ⅔, pour l'obliquité de l'écliptique vers l'an 900 (385), ce qui suppose une diminution de 7′ 20″, ou de 50″ par

ſiècle ; & quoique cette diminution ne ſoit pas ſi conſidérable que celle qu'on déduit des obſervations de Ptolomée, cependant il eſt toujours évident que le témoignage d'Albategnius s'oppoſe à l'interprétation du P. Riccioli, & au ſyſtême de ceux qui croyent l'obliquité conſtante ; mais le P. Riccioli croit qu'Albategnius a pu fort bien ſe tromper de 5 minutes.

2721. Par les obſervations de Co-cheou-King, on trouve pour 1278, 23° 32′ 12″ (418).

Par celles de Waltherus faites à Nuremberg, M. de la Caille trouve pour l'an 1490, 23° 29′ 47″ (*Mém. ac.* 1757, *pag.* 114). De Waltherus.

2722. Suivant Tycho-Brahé (*Progymn. pag.* 17, 28, *epiſt. pag.* 10), l'obliquité de l'écliptique en 1587, étoit de 23° 31′ 30″; le P. Riccioli la réduit à 23° 30′ 24″ en corrigeant la réfraction & la parallaxe. Le 12 Juin 1590, Tycho donna l'attention la plus particulière aux obſervations ſolſticiales ; la hauteur méridienne du ſoleil fut priſe quatre fois, les inſtrumens avoient été exactement vérifiés avant l'obſervation, *ad amuſſim corrigebantur*, on fut occupé depuis cinq heures du matin juſqu'à 8 heures du ſoir à obſerver les déclinaiſons du ſoleil ; & s'il y a des obſervations ſolſticiales qui ayent été faites avec attention, & qui méritent confiance, ce ſont celles de 1590 ; en calculant ces obſervations, je trouve 23° 29′ 52″; celles des autres années donnent un peu moins, mais toutes cependant indiquent une diminution depuis Tycho juſqu'à nous. De Tycho.

2723. Le P. Riccioli lui-même ſe détermine pour 23° 30′ 20″, *ob recentiſſimas & majoribus inſtrumentis peractas obſervationes.* (*Aſtron. reform. pag.* 121 ; il rapporte cette détermination à l'année 1646 ; il ajoute ſeulement qu'on pourroit y changer 10″ ſans riſque ; ce qui prouve qu'il ne penſoit pas à une incertitude de 2′ : Boulliaud dans le même temps trouvoit à Paris, l'obliquité de l'écliptique de 23° 32′ (*Aſtron. philolaica*, *pag.* 229). Par pluſieurs obſervations d'Hévélius faites depuis 1652 juſqu'en 1671, je trouve 23° 29′ 10″. De Riccioli & Boulliaud.

Par les observations du dernier siècle.

2724. M. Caſſini le fils, par les obſervations de Richer faites à Cayenne en 1672, trouva l'obliquité de 23° 28′ 54″ (*Elém. d'aſtron. pag.* 112), & par celles de M. Caſſini ſon pere, faites au gnomon de S. Pétrone, 23° 29′ 0″; c'eſt ainſi qu'il l'employa lui-même dans ſes tables. Nous voyons auſſi que Flamſteed en 1689 & 1690, trouva par des obſervations répétées l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′ 56″ (*Proleg. pag.* 114), il en faut ôter 8″ (2861), & l'on aura l'obliquité moyenne pour 1690, 23° 28′ 48″, quantité plus grande de 30″ que celle de tous les obſervateurs modernes.

Il eſt vrai que dans le même endroit Flamſteed examine des obſervations de Waltherus, de Tycho, de Riccioli, d'Hévelius, de Mouton, de Richer, de la Hire & de Margraf; & il trouve toujours le même réſultat par les plus voiſines, comme par les plus éloignées; mais le ſyſtême qu'avoit embraſſé Flamſteeſt, lui faiſoit peut-être donner la préférence aux obſervations qui lui étoient favorables.

Par celles de ce ſiècle.

2725. M. Bianchini en 1703, trouva l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 35″, (*de gnomone Clementino*). M. Horrebow par les obſervations de Romer, faites en 1709, trouve l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 47″ (*Atrium aſtronomiæ, pag.* 33); c'eſt la même à 1″ près, que celle que M. de la Caille a trouvée en ſuppoſant une diminution de 44″ par ſiècle.

Obliquité en 1750, 23° 28′ 19″.

2726. L'obliquité de l'écliptique a été déterminée par M. de la Caille de 23° 28′ 19″ pour le commencement de 1750. J'ai appris que M. Bradley avoit trouvé la même quantité avec le grand quart-de-cercle mural de 8 pieds de rayon, qui eſt à l'obſervatoire Royal de Greenwich. M. de la Condamine par ſes obſervations faites à Quito en 1736 & 1737, avec un ſecteur de 12 pieds, la trouva de 23° 28′ 24″; cette quantité réduite à l'obliquité moyenne de 1750, donne 8″ ſeulement de plus que n'ont trouvé M. de la Caille & M. Bradley. M. de Thury, dans un Mémoire lu à l'académie ſur l'obliquité de l'écliptique (*Février* 1764),

conclut de ses observations que l'obliquité apparente de l'écliptique en 1743, étoit de 23° 28′ 35″, quantité qui ne diffère que d'une seconde du résultat des observations de M. le Monnier, & qui surpasse seulement de 7″ celui de M. de la Caille. Si l'on admettoit l'observation du Pérou, avec celles de M. de Thury & de M. le Monnier, on concilieroit peut-être la suite des autres observations mieux qu'en adoptant, comme je l'ai fait, la détermination de M. Bradley & de M. de la Caille.

2727. Par le moyen de l'obliquité moyenne pour 1750, M. de la Caille avoit cherché l'obliquité de l'écliptique pour chaque année, en ôtant la diminution annuelle à raison de 44″ par siècle, & ajoutoit l'inégalité périodique (2861); mais l'augmentation m'a semblé devoir être plus considérable; j'ai donc refait cette table, comme on le verra dans les tables du soleil qui sont jointes à cet ouvrage, & les nombres qui y sont s'accordent assez bien avec les déterminations précédentes, & avec la théorie (2746). Il est donc prouvé par les observations de l'obliquité de l'écliptique faites dans tous les temps, aussi bien que par les latitudes des étoiles rapportées dans Ptolomée, que l'écliptique se rapproche de l'équateur; il s'agit actuellement d'en donner une explication physique, & conforme aux principes de l'attraction.

M. Euler est le premier qui ait fait voir que l'attraction des planètes sur la terre devoit produire cet effet, (*Inégalités de Saturne*, *pag.* 79. *Mémoires de Berlin*, *T. X.* 1754). J'en ai donné fort au long les démonstrations & les calculs (*Mémoires* de 1758, *pag.* 252 & 339, 1761, *pag.* 399; j'en donnerai ici les principes avec les résultats.

Explication physique de la diminution de l'obliquité de l'écliptique, & du changement de latitude des étoiles.

2728. Toutes les fois que deux planètes tournent autour du même centre, dans le même sens, mais dans des plans différens, chacune de ces planètes fait rétrograder le nœud de l'autre planète (3516); nous avons déja expliqué ce mouvement (1348), à l'occasion des planètes qui agissent les unes sur les autres; voyons ce qui doit avoir lieu sur la terre en conséquence de ce déplacement, & prenons pour exemple l'attraction de Vénus sur la terre. Soit *EDQ* l'équateur, (*fig.* 224), *EGN* l'écliptique, *NVQ* l'orbite de Vénus; ensorte que la terre avance de *E* en *N* le long de l'écliptique, & Vénus de *Q* en *N* dans son orbite; l'attraction de Vénus sur le globe de la terre fait que le point *N* rétrograde en *V*, c'est-à-dire, que le nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus avance dans un sens contraire au mouvement de la terre, & cette quantité est de $12'' \frac{1}{3}$ par an (2737), en supposant la masse de Vénus égale à celle de la terre (2158).

Effets de l'attraction de Vénus. *Fig.* 224.

L'écliptique changera donc de situation, & passera de *EN* en *DV*, sans que l'inclinaison en soit affectée, c'est-à-dire, de telle sorte que l'angle *V* soit encore égal à l'angle *N*, mais que la rétrogradation *NV* du nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus, soit de 12″ par an. Or l'équateur *EQ* ne change point de situation par l'effet dont il s'agit, parce que la rotation de la terre est indépendante de son mouvement annuel, & que l'attraction des planètes n'est pas sensible sur l'axe de notre spéroïde; ainsi l'écliptique *EN* au lieu de couper l'équateur au point *E*, le coupera en *D* l'année suivante, le point équinoxial *E* avancera de la quantité *ED*, le long de l'équateur, & ce déplacement de l'écliptique produira avec le temps des changemens dans les

Trouver le changement des points équinoxiaux.

les longitudes & les latitudes de toutes les étoiles, & dans les inclinaifons des orbites planétaires.

2729. Dans un triangle ENQ, dont les angles Q & N font conftans, & dont le côté NQ varie de 12″, le changement ED qui en réfulte fur l'autre côté EQ, eft égal à $\frac{12'' \text{ fin. } N. \text{ cof. } EN.}{\text{fin. } E}$ (3842). Si l'on abaiffe une perpendiculaire DG fur l'écliptique EGN, la petite quantité EG fera $= ED$. cof. E; donc multipliant la valeur précédente de ED par cof. E, l'on aura 12″ fin. N. cof. EN. cotang. E pour la quantité EG, dont le point équinoxial a changé par l'action de Vénus, le long de l'écliptique. Quant au changement que reçoit, par fon autre extrémité V, l'arc de l'écliptique DV, il eft inutile d'y avoir égard, il n'affecte que la longitude du nœud V de Vénus fur l'écliptique, mais il ne change rien aux longitudes des autres aftres qui fe comptent du point équinoxial E ou D; (Voyez encore 2735).

2730. Sans le fecours des formules différentielles on trouveroit auffi la quantité EG, en réfolvant féparément les triangles fphériques QEN, QDV; on connoît l'angle E & l'angle N avec le côté EN, on trouveroit EQ, & diminuant QN de 12″ pour avoir QV, on trouveroit QD, & par conféquent la quantité ED. On verra ci-après une autre méthode appliquée à des exemples (2743).

2731. Nous pouvons encore trouver le même réfultat en confidérant les poles des trois cercles dont nous venons d'examiner les circonférences. Soit E (*fig.* 225), le pole de l'écliptique, P le pole de l'équateur ou le pole du monde, V le pole de l'orbite de Vénus; le mouvement de l'écliptique fur l'orbite de Vénus produit un mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de l'orbe de Vénus (1353), & j'ai fait voir qu'il revient au même de dire que l'écliptique rétrograde de 12″ fur l'orbite de Vénus, ou que le pole de l'écliptique rétrograde autour du pole de l'orbite d'une quantité

Autre méthode.

Fig. 225.

Fig. 225. *EM* qui vaut 12″, ſur la circonférence du petit cercle *EMN*, dont le rayon *EV* eſt la diſtance des poles de l'écliptique & de l'orbite de Vénus.

2732. Dans le triangle ſphérique *PVE* l'on a deux côtés *PV* & *VE* conſtans, tandis que tout le reſte varie par le mouvement du pole *E* dans la circonférence *EMN*; delà il ſuit (3087) que la variation de l'angle *P* ou le petit angle $EPM = \frac{MX}{\text{ſin.}\ PE} = \frac{EM\ \text{ſin.}\ XEM}{\text{ſin.}\ PE} = \frac{12''\ \text{ſin.}\ EV\ \text{ſin.}\ XEM}{\text{ſin.}\ PE}$ $= \frac{12''\ \text{ſin.}\ EV\ \text{coſ.}\ PEV}{\text{ſin.}\ PE}$; mais dans le triangle *PBE* la variation de *P* eſt à celle de *E*, comme le rayon eſt au coſinus de *PE* (3753), donc la variation de l'angle *PEB* qui eſt la même que celle de l'angle $PEV = 12''$ ſin. *EV* coſ. *PEV* cotang. *PE*; ce qui revient au même que la formule précédente (2729); car $EM = 12''$, *EV* eſt égal à l'inclinaiſon de l'orbe de Vénus, *PE* eſt égal à l'obliquité de l'écliptique, & l'angle *PEV* égal à la longitude du nœud de Vénus, puiſque c'eſt l'angle formé au pole de l'écliptique *E* entre le colure des ſolſtices *EP* qui eſt à 90° des équinoxes, & le cercle *EV* qui paſſe par les poles de l'orbe de Vénus, & qui eſt à 90° de ſon nœud. Ce changement de l'angle *PEB* eſt la quantité dont le colure des ſolſtices *EP* change de place en prenant la ſituation nouvelle *MP*, & par conſéquent le changement du colure des équinoxes, qui eſt toujours à angles droits avec celui des ſolſtices; c'eſt donc auſſi la quantité dont le point équinoxial s'éloigne de la ligne immobile *EMBC*; car ce point équinoxial étant toujours à l'extrémité d'un arc de 90° perpendiculaire à *EP*, & dont la poſition change autant que la poſition du colure *PE*, toutes les longitudes céleſtes qui ſe comptent depuis le colure des équinoxes changeront de cette quantité, qui ſera par conſéquent une partie de la préceſſion des équinoxes.

Changement de l'obliquité de l'écliptique.

2733. On trouveroit auſſi dans le triangle *PEV* la variation du côté *PE* égale à 12″ ſin. *VE* ſin. *PEV*; c'eſt la quantité dont l'obliquité de l'écliptique *PE* varie

chaque année par l'action de Vénus ; si l'on substitue à la place de *VE* sa valeur 3° 23′, & à la place de l'angle *E*, 74° 24′, longitude du nœud de Vénus en 1750, on trouvera 0″ 7, ce qui fait 7″ en dix ans, dont l'obliquité de l'écliptique diminue par l'action seule de Vénus.

2734. En faisant la même substitution dans l'autre formule (2732), qui exprime le changement de l'angle *E*, l'on aura 12″ sin. 3° cos. 74° cot. $23° \frac{1}{2}$ = 0″ 45 pour la quantité dont l'angle *E* (*fig.* 225), ou le point *D* (*fig.* 224), varient chaque année par l'action de Vénus, c'est-à-dire, que le changement de la précession de l'équinoxe est de 45″ par siècle, ou de $4'' \frac{1}{2}$ en dix ans par l'action seule de Vénus. Nous verrons bientôt une autre manière de trouver les mêmes résultats (2743). De la précession.

2735. Nous pouvons aussi calculer par les mêmes principes, la quantité dont les longitudes & les latitudes des étoiles fixes varient par ce déplacement de l'écliptique. Nous avons démontré (2703, 2708), que le pole de l'équateur tournant autour du pole de l'écliptique, l'inégalité des positions des astres le long de l'équateur étoit égale à *L* sin. 23° sin. asc. dr. tang. déclin. c'est-à-dire, qu'en général l'inégalité des positions comptées sur le cercle tournant est égale au mouvement du pole tournant, multiplié par le sinus de la distance des deux poles ; par le sinus de la distance de l'étoile au nœud des deux cercles, mesurée le long du cercle tournant, & par la tangente de la distance au cercle tournant. Si nous appliquons ce théorême au mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de Vénus, nous aurons pour le changement de longitude qui en résulte chaque année sur une étoile, 12″ multipliées par le sinus de l'inclinaiison de Vénus, par le sinus de la distance de l'étoile au nœud de Vénus, mesurée le long de l'écliptique, & par la tangente de la latitude de l'étoile. Changement de la longitude d'une étoile quelconque.

Je ne considère point ici la première partie de la formule (2702), c'est-à-dire, *L* cos. $23° \frac{1}{2}$, parce qu'elle exprime dans le cas dont il s'agit ici, un mouvement commun à tout le ciel, aux étoiles & aux points équi-

noxiaux, enforte que la diſtance d'une étoile à l'équinoxe, ou ſa longitude, n'en eſt point affectée ; auſſi les longitudes des étoiles ne ſont-elles que très-peu changées par ce mouvement de l'écliptique.

2736. Le changement de déclinaiſon des étoiles, L ſin. 23° coſ. aſc. dr. (2710), nous apprend que quand le pole de l'équateur tourne autour du pole de l'écliptique, le changement qu'éprouve la diſtance d'une étoile à l'équateur ou au pole tournant, eſt égal au mouvement de ce pole, multiplié par le ſinus de la diſtance des deux poles, & par le coſinus de la diſtance d'une étoile à l'interſection des deux cercles, meſurée le long du cercle tournant. Cette expreſſion, tranſportée au cas dont il s'agit, fait voir que ſi le pole de l'écliptique tourne autour du pole de l'orbe de Vénus, le changement qu'éprouve la diſtance d'une étoile à l'écliptique, ou ſa latitude, eſt égale au mouvement de l'écliptique multiplié par le ſinus de l'inclinaiſon de l'orbite de Vénus, & par le coſinus de la diſtance de l'étoile au nœud de Vénus meſurée le long de l'écliptique.

Changement de la latitude.

Nommons D la diſtance d'une étoile au nœud aſcendant d'une planète, ou la longitude de l'étoile moins celle du nœud de la planète ; I l'inclinaiſon de l'orbite de la planète, L la latitude de l'étoile, M le mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de la planète, ou le changement NV (*fig.* 224) du nœud de la planète le long de ſon orbite ; on aura M ſin. I ſin. D tang. L pour le changement de l'étoile en longitude, & M ſin. I coſ. D pour le changement en latitude ; ces formules ſont les mêmes que celles qui ont été démontrées pour la préceſſion (2703, 2710).

Fig. 224.

Mouvement de l'écliptique ſur chaque orbite.

2737. La formule du mouvement des nœuds (3522) donne le mouvement annuel de l'écliptique ſur l'orbite de chaque planète, comme dans la table ci-jointe ; c'eſt ce mouvement annuel que j'appelle M dans les formules précédentes.

PLANETES.	Déplacement de l'écliptiq.
Saturne,	0″378
Jupiter,	6,924
Mars,	0,094
Vénus,	12,306
Mercure,	0,047

La quantité D, ou la diſtance d'une étoile au nœud d'une planète eſt variable à cauſe du mouvement des nœuds de chaque planète (1347), & celui des étoiles en longitude (917); mais à cauſe de la lenteur de ces mouvemens & de la petiteſſe des quantités que nous avons à déterminer, on peut ſuppoſer la diſtance D invariable dans l'eſpace d'un ſiècle. On prendra le lieu du du nœud de chaque planète pour 1750. (1347), on le retranchera de la longitude d'une étoile en 1750 pour avoir D; on prendra l'inclinaiſon (1376), égale à I, la valeur de M eſt marquée dans la table précédente, ainſi il ne manquera rien pour évaluer les deux formules.

Par exemple, l'action de Jupiter donne $6'' 924 = M$, ſon inclinaiſon eſt $1° 19' = I$; donc M ſin. $I = 0'' 159$, ſon nœud eſt à $3^s 8°$ de longitude, donc le changement de latitude M ſin. I coſ. $D = 0'' 159$, coſ. (longit. — $3^s 8°$).

2738. On peut donner à cette expreſſion une forme plus commode, en conſidérant que le coſinus de la différence de deux arcs eſt égal au produit des coſinus ajouté avec celui des ſinus (3620); or le coſinus de $3^s 8°$ eſt égal à celui de $82°$, pris négativement; on aura donc $0'' 159$ coſ. (longit. — $3^s 8°$) = — $0'' 159$ coſ. $82°$ coſ. long. + $0'' 159$ ſin. $82°$ ſin. long. = $0'' 157$ ſin. longit. — $0'' 022$ coſ. longit.

2739. En employant de même les nœuds & les inclinaiſons de chacune des autres planètes, dans l'évaluation de cette formule, M ſin. I coſ. D, & multipliant par 100 le mouvement annuel, on a le mouvement ſéculaire des étoiles en latitude, par l'action de chaque planète, de la manière ſuivante :

Quantité du mouvement en latitude.

Saturne,	$1'' 54$	ſin. longit.	— $0'' 60$	coſ. long. étoile.
Jupiter,	15,75		— 2,21	
Mars,	0,23		+ 0,20	
Vénus,	70,19		+ 19,60	
Mercure,	0,40		+ 0,40	
TOTAL	+ $1' 28'' 11$	ſin. longit.	+ $17'' 39$	coſ. longit.

Remarque sur les sinus.

C'est le mouvement en latitude pour ce siècle-ci. On doit se souvenir dans l'application de ces formules, que les sinus changent de signes après 180°, que les cosinus changent entre 90° & 270° (3604), & que les signes changent aussi quand les latitudes des étoiles sont méridionales.

2740. Exemple. Sirius a 3^s 10° 38′ de longitude; multipliant 88″ 11 par le sinus de 79° 22′, on a 1′ 26″ 60, & multipliant 17″ 39 par le cosinus de 79° 22′, on trouve 3″ 21; la différence est 1′ 23″ 39, diminution séculaire de la latitude de Sirius dans ce siècle-ci. Il est nécessaire de connoître aussi ces mêmes quantités pour des siècles plus éloignés, & pour cela on doit à la place de 3^s 8° employer le nœud de Jupiter, calculé pour différens siècles, au moyen du mouvement annuel (1347); c'est par-là que j'ai trouvé pour le changement de latitude dans le premier siècle de notre Ere, 1′ 20″ 5. sin. longit. + 41″ 8. cos. long. Cette quantité est différente de celle qu'on vient de trouver pour ce siècle-ci; mais en prenant un milieu entre les deux quantités, on aura, à très-peu-près le changement séculaire des étoiles en latitude, depuis le temps de Ptolomée jusqu'au nôtre (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 408).

Mouvement 17 siècle plutôt.

2741. Les mêmes nombres serviront à trouver le mouvement séculaire de la longitude des étoiles fixes, *M.* sin. *I.* sin. *D.* tang. *L* (2736), car il suffit de changer les mots de *sinus* & de *cosinus de la longitude*, & de multiplier le tout par la tangente de la latitude de l'étoile.

Mouvement en longitude.

(— 1′ 28″ 1. cos. long. + 17″ 4. sin. long.) tang. latit. entre 1700 & 1800.

(— 1′ 20″ 5. cos. long. + 41″ 8. sin. long.) tang. latit. pour le 1er siècle.

On doit faire attention que la tangente de la latitude change de signe quand l'étoile est au midi; ainsi les deux quantités précédentes qui sont — & + deviendront + & — pour les étoiles dont la latitude est méridionale. Il faut aussi observer les changemens de signes

des cosinus & des sinus (3604); ainsi pour Sirius, dont la longitude est $3^s\ 10^\circ\ 38'$ & la latitude $39^\circ\ 33'$ méridionale, on aura $-1'\ 28''$ cos. long. $= +16''\ 26$, parce que le cosinus de $3^s\ 10^\circ$ change de signe, & $+17''\ 4$ sin. long. $= +17''\ 09$, la somme est $+33''\ 35$, qui multipliée par la tangente de $39^\circ\ 33'$ qui est négative, donne $-29''\ 19$, c'est-à-dire, que la longitude de Sirius diminue de $29''$ dans ce siècle-ci par l'attraction des planètes sur la terre, indépendamment de la cause générale de la précession (2701).

2742. Le mouvement en longitude, & le mouvement en latitude que je viens de déterminer par les formules précédentes, sont d'accord avec les observations, comme on le voit en comparant les positions qui sont dans le catalogue de Ptolomée, avec celles qu'on observe aujourd'hui : on voit, par exemple, que la première étoile de la constellation du Cocher qui dans Ptolomée est à 30° de latitude, se trouve à $30^\circ\ 49'$ dans le catalogue de Flamsteed; au contraire la quatorzième étoile des Gémeaux qui est au midi de l'écliptique, a dans Ptolomée $1^\circ\ 30'$, & seulement $0^\circ\ 56'$ dans Flamsteed. Il en est de même de la latitude de presque toutes les étoiles, (*Mèm. acad.* 1758, *pag.* 342). Les différences de longitude ont également changé d'une manière conforme à cette théorie. Entre la 27e. étoile de la grande Ourse, & la 10e. du Dragon dont la latitude est $81^\circ\ 48'$, on trouve aujourd'hui une différence de longitude moindre de $1^\circ\ 21'$, qu'elle n'est dans le catalogue de Ptolomée, parce qu'une des étoiles a augmenté de longitude, tandis que l'autre a diminué. Ces différences ne peuvent être sensibles que pour les étoiles qui ont une très-grande latitude; on voit que la formule est multipliée par la tangente de la latitude, ce qui la rend plus petite quand la latitude est au-dessous de 45°, & plus grande quand la latitude de l'étoile surpasse 45°.

Tout cela est d'accord avec les observations.

2743. Dans la formule générale de la précession des équinoxes, il y avoit une partie L. cos. $23^\circ \frac{1}{2}$ com- Fig. 225.

mune à tout le ciel ; elle feroit ici égale à *M*. cof. *EV*, cette partie indique feulement que la ligne *EV* eft plus avancée que la ligne *MV*, de la quantité *M*. cof. *EV*, c'eft le mouvement du nœud de la planète ou du pole *E*, rapporté fur l'écliptique. Si l'on tire un arc de cercle *EMBC* perpendiculaire à *EV*, & fenfiblement confondu avec le petit arc *EM*, ce fera le cercle de latitude qui paffe par le nœud de l'orbite de Vénus. Le changement de longitude d'une étoile *S*, trouvé par les formules précédentes (2741), eft la différence entre l'angle *SEC*, & l'angle *SMC* ; c'eft la variation de l'angle *E* dans le triangle *SCE*, dont le côté *SC* & l'angle *C* font conftans ; cette variation = *EM*. fin. *E*. cotang. *ES*. (3764) ; mais ce changement de longitude de l'étoile *S* par rapport à la ligne *EMC*, eft indépendant de celui de *PE*, ou du colure des folftices qui paffe de la fituation *PE* dans la fituation *PM* ; l'angle *PEB*, fe changeant en un angle *PMB* ; c'eft la variation de l'angle *E* dans le triangle fphérique *PBE*, dont *PB* & l'angle *B* font conftans ; ainfi cette quantité eft *EM*. fin. *PEB*. cot. *EP* ; elle eft commune à tous les aftres (2732).

2744. On peut trouver le changement de l'angle *PEB*, ou le changement de longitude commun à tous les points du ciel, de la même manière qu'on trouveroit la variation en longitude d'une étoile qui feroit en *P* ; c'eft-à-dire, que dans les formules des deux articles précédens, on peut confidérer le pole de l'équateur comme une étoile dont la longitude feroit de 90° ; & la latitude 66° 32′, & trouver par les mêmes formules (2740), combien il change par rapport au pole mobile de l'écliptique, foit en longitude, foit en latitude ; on aura 1′ 28″, pour la variation féculaire de l'obliquité de l'écliptique.

Obliquité diminuée de 1′ 28″ par fiècle.

Préceffion augmentée de 40″.

Le changement en longitude fe trouve par-là de 17″ tang. 66° = 40″ 1 ; c'eft l'inégalité de la préceffion des équinoxes que l'action des planètes produit pendant ce fiècle-ci, en déplaçant l'écliptique ou l'orbite de la terre,

&

& cela eſt d'accord avec la formule de l'art. 2729 ; ſi donc la préceſſion obſervée eſt de 1° 23′ 50″ entre 1700 & 1800 (917); il y a 40″ pour l'action de toutes les planètes, & 1° 23′ 10″ ou 49″ 9 par année pour l'action du ſoleil & de la lune ſur l'équateur terreſtre, qui eſt la cauſe principale de la préceſſion des équinoxes (3561). On trouvera de même pour le premier ſiècle de notre Ere que la préceſſion augmentoit de 1′ 26″ 3, & diſtribuant cette augmentation ſur les 18 ſiècles, on a pour la préceſſion totale 1° 24′ 36″ 3 depuis l'an 0 juſqu'à l'année 100 de J. C. : en conſéquence il eſt aiſé de calculer une table pour les 18 ſiècles.

2745. La période entière de la préceſſion des équinoxes, la grande année ou le retour des étoiles aux mêmes longitudes, en ſuppoſant la préceſſion moyenne de 1° 23′ 10″ par ſiècle eſt de 25972 années Juliennes ; mais on voit par ce qui précède que les attractions des planètes diverſifiées de tant de façons différentes, rendent cette période fort inégale, & fort incertaine. Grande année.

2746. On trouvera de même que l'obliquité de l'écliptique diminuoit de 1′ 20″ 5 dans le premier ſiècle ; ainſi prenant un milieu, dans l'eſpace de 1900 ans, ou depuis Hipparque juſqu'à nous, on voit que la préceſſion des équinoxes a augmenté de 21′ par l'attraction des planètes, & que l'obliquité de l'écliptique a diminué de $26' \frac{1}{3}$, ce qui donne 23° 55′ pour l'obliquité au temps d'Hipparque. Ces calculs ſuppoſent la maſſe de Vénus égale à celle de la terre, & celle de la terre telle que Newton l'a trouvée (3405). La conformité de cette théorie avec les obſervations d'Hipparque, eſt un nouveau degré de confirmation, ſoit pour les obſervations qui prouvent la diminution de l'obliquité de l'écliptique, ſoit pour la théorie précédente, qui fait voir la cauſe de cette diminution ; c'eſt d'après ces réſultats que j'ai mis à la fin du catalogue des étoiles, la table des variations des étoiles en longitude & en latitude pour un ſiècle, calculée par M. de Chaligny. Obliquité de 23° 55′ pour le tems d'Hipparque.

DU MOUVEMENT PARTICULIER DE QUELQUES ÉTOILES.

2747. Les mouvemens généraux que nous venons d'expliquer affectent toutes les étoiles; mais il y en a quelques-unes qui forment exception à ces règles, & qui ont eu un mouvement propre, un dérangement physique dont on ignore la cause, & qu'on tache de déterminer par observation.

Les étoiles sont immobiles.

On peut dire cependant qu'en général les étoiles sont immobiles, & il n'y en a qu'un petit nombre auxquelles on ait apperçu de semblables dérangemens. Ce qui prouve assez l'immobilité des étoiles, ce sont les allignemens observés autrefois & qu'on retrouve constamment les mêmes (Ptolomée, *Alm. l. VII, c.* 1. Tycho, *Progym. t. I, pag.* 234), Riccioli rapporte plus de 25 exemples d'étoiles, qui prises 3 à 3 paroissent exactement en ligne droite (*Astron. ref. pag.* 203), telles sont la Chèvre avec le pied précédent du Cocher & Aldebaran, les deux têtes des Gémeaux avec le cou de l'Hydre; le bassin austral de la Balance avec Arcturus & la moyenne de la queue de la grande Ourse; les deux étoiles boréales de la tête du Bélier & la Luisante au genou de Persée; celles qui avoient autrefois cette position rectiligne la conservent encore, du moins autant qu'on peut en juger à la vue; ainsi les étoiles sont à peu-près fixes, & les dérangemens dont il s'agit ici ne tombent que sur un petit nombre.

M. Halley remarque un mouvement propre.

2748. M. Halley en examinant les positions des étoiles qui sont dans le septième livre de l'Almageste, pour en déduire la précession des équinoxes apperçut que trois des principales étoiles, Aldebaran, Sirius & Arcturus avoient changé de latitude en un sens contraire au changement de toutes les autres, & contraire à ce qu'exige la diminution de l'obliquité de l'écliptique (*Phil. transf.* 1718, *n°.* 355). Suivant M. Halley, Aldebaran ou Palilicium devroit être 15′ plus au nord

de l'écliptique, & il eſt 20′ plus au ſud que dans Ptolomée; Sirius devroit être 20′ plus au nord (2741), & il eſt 22′ plus au ſud; Arcturus qui devroit avoir à peu-près la même latitude eſt 33′ plus au midi; l'épaule orientale d'Orion eſt au contraire plus au nord d'un degré que ſuivant le catalogue de Ptolomée; on ne peut pas ſoupçonner des erreurs de copiſtes, dans toutes ces poſitions, parce que les déclinaiſons rapportées dans d'autres endroits du livre s'accordent avec les longitudes inſérées dans le catalogue; on ne peut avec vraiſemblance attribuer cette différence à l'erreur des obſervations, parce qu'on voit celles d'Ariſtylle & de Tymocharès d'accord avec celles d'Hipparque & de Ptolomée.

Diminution de la latitude d'Arcturus.

2749. M. Caſſini ayant comparé ſes obſervations avec celles de M. Richer, à Cayenne, trouve que depuis 1672 juſqu'en 1738, Arcturus s'étoit rapproché de l'écliptique de 2′; M. le Monnier a trouvé ce mouvement de 2′ en 55 ans, ce qui fait 2′ 30″ en 66 ans: ce mouvement eſt encore prouvé par les obſervations de M. Bradley & de M. Caſſini de Thury, (*Mém. acad.* 1755. *Philoſ. tranſ.* 1748, *n*°. 485); il y a près d'Arcturus une petite étoile, marquée *b* dans nos Cartes céleſtes, qui eſt très-propre à faire appercevoir le mouvement réel d'Arcturus; leur poſition reſpective a changé conſidérablement depuis le temps de Flamſteed, & le changement eſt tout entier en latitude.

2750. Suivant les obſervations de Flamſteed, la déclinaiſon d'Arcturus au commencement de 1690, étoit de 20° 49′ 0″, & ſuivant M. l'Abbé de la Caille, elle étoit au commencement de 1750 de 20° 29′ 39″, la différence eſt de 19′ 21″; tandis qu'elle ne devroit être que de 17′ 7″ 2, ſuivant les loix connues de la préceſſion des équinoxes; il y a donc 2′ 13″ 8 de plus, pour le mouvement propre de cette étoile en 60 ans, ou 22″ 3 tous les dix ans. Voici le mouvement en déclinaiſon diſtribué de dix en dix ans avec ſon inégalité (2713), d'abord par le calcul, enſuite par l'obſerva-

tion, depuis 1690 jusqu'en 1750. Par le calcul, on trouve 2′ 50″, 7 ; 2′ 50″, 9 ; 2′ 51″, 1 ; 2′ 51″, 3 ; 2′ 51″, 5 ; 2′ 51″, 7 ; ce qui fait en total 17′ 7″ 2. Par l'observation, ce mouvement est de 3′ 13″, 0 ; 3′ 13″, 2 ; 3′ 13″, 4 ; 3′ 13″, 6 ; 3′ 13″, 8 ; 3′ 14″, 0 ; en tout 19′ 21″, pour le même intervalle de 60 ans.

Augmentation de la latitude de Sirius.

2751. Le changement de latitude n'est pas si sensible dans Sirius, du moins par les observations modernes ; M. Cassini ayant calculé les observations de Tycho a trouvé la latitude pour ce temps-là 39° 32′ 10″. Flamsteed la trouva de 39° 32′ 8″ pour 1690. Par les observations de M. Richer faites en 1672, M. Cassini la trouve de 39° 31′ 55″, tandis que lui-même vers 1738 l'a observée plus grande d'une minute, aussi bien que M. de la Caille qui trouve 39° 32′ 58″ $\frac{1}{2}$ pour 1750. Ainsi il n'y a guere qu'une minute d'augmentation depuis un siècle (Voyez *Mém. acad.* 1758, *pag.* 353) ; mais cette latitude auroit dû diminuer de 1′ 23″, par l'effet général (2740), dans cet intervalle de temps ; ainsi il y a un changement propre de plus de deux minutes dans le vrai lieu de Sirius, qui s'est avancé vers le midi.

2752. Il est difficile de déterminer les variations d'*Aldebaran*, qui jusqu'à présent ont paru fort irrégulières, comme je l'ai fait voir (*Mém.* 1758, *pag.* 344) ; sa latitude que nous trouvons de 5° 29′ 0″, est de 5° 29′ 50″ dans le catalogue de Flamsteed. M. Cassini trouve par les observations de Tycho, que cette latitude en 1589, étoit de 5° 30′ 23″ (*Mém.* 1738, *pag.* 340) ; elle paroît donc avoir diminué, mais cette diminution devant être en effet de 1′ 28″ par la théorie générale, elle n'indique pas de mouvement propre.

2753. Cependant M. de la Caille m'a dit, que dans le grand nombre de réductions qu'il avoit faites des ses observations sur Aldebaran, il avoit trouvé souvent des irrégularités de 15 à 20″ qu'il ne pouvoit attribuer qu'à des variations particulières à cette étoile ; Tycho-Brahé s'étonnoit aussi de la grande différence

qui se trouve entre les latitudes d'Aldebaran ; déduites des observations de Tymocharès, d'Hipparque & de Ptolomée : voyez ce que j'en ai dit dans les Mémoires de 1758, *pag.* 344; il me semble que ces variations d'Aldebaran sont très-irrégulières, mais qu'elles sont petites actuellement. Irrégularités dans Aldebaran.

2754. M. Cassini trouve aussi des variations en latitude dans *Rigel*, l'épaule orientale d'Orion, Regulus, la Chèvre & l'Aigle ; la différence de latitude entre la Luisante de l'Aigle, & l'étoile δ de la même constellation est plus grande de 36′ qu'au temps de Ptolomée, & de 2 ou 3 minutes que suivant les observations de Tycho.

2755. M. Cassini ayant examiné aussi en 1738 le mouvement des étoiles en longitude a reconnu que depuis Flamsteed, c'est-à-dire, dans l'espace de 48 années, la Luisante de l'Aigle s'étoit éloignée de 48″ en ascension droite de celle qui la précède, & s'étoit approchée de 73″ de celle qui la suit ; par les observations de Tycho, on trouve ces différences de 4′ 14″, & de 2′ pour 138 ans ; d'où il suit que ces étoiles, ou du moins deux d'entre elles, ont eu un mouvement particulier en ascension droite (*Mém. acad.* 1738). Variations d'occident en orient.

2756. J'ai appris de M. Kæstner, Secretaire de l'académie de Gottingen, qu'il y avoit un Mémoire de feu M. Mayer, déja lu dans les assemblées de cette Société, sur le mouvement propre de quelques étoiles, & je ne doute pas qu'il n'y ait dans cet écrit des choses très-curieuses, mais il n'est pas encore imprimé.

2757. Nous ne pouvons attribuer la cause de ces variations dans les étoiles, qu'aux attractions des différens corps célestes, les uns sur les autres ; mais il se passera bien des siècles avant qu'on en connoisse la loi & la mesure ; les étoiles de la première grandeur qui sont probablement les plus proches de nous sont celles où ces variations sont plus sensibles, mais je ne doute pas qu'il n'y en ait de pareilles dans les autres étoiles. En attendant il me semble que ce doit être une raison De la cause de ces changemens.

pour les astronomes d'employer, quand ils le peuvent, les étoiles de la troisième grandeur dans leurs recherches sur le mouvement des planètes, au lieu des étoiles les plus brillantes.

DE LA PARALLAXE ANNUELLE des étoiles fixes.

2758. Quoiqu'il soit démontré actuellement que la parallaxe annuelle (1141) est absolument insensible & comme nulle dans les étoiles fixes (2778); j'ai cru qu'il étoit nécessaire de donner au moins une idée d'une question qu'on a traitée si souvent, & même en 1760 (2780); je démontrerai d'une manière plus simple qu'on ne l'a fait jusqu'ici la loi des variations qui
Fig. 226. devroient en résulter. Soit *S* le soleil (*fig.* 226), *AB* le diamètre du grand orbe que la terre décrit chaque année (1106), *A* le point où se trouve la terre au 1 Janvier, *B* le point où elle est au 1 Juillet, *E* une étoile qu'on apperçoit sur le rayon *AE*; la ligne *AE* étant dans le plan de l'écliptique, & l'orbe de la terre étant conçu perpendiculaire au plan de la figure, ensorte qu'on ne le voye que sur son épaisseur, l'angle *EAB* est la latitude de l'étoile; mais quand la terre sera en *B* l'étoile étant en opposition par rapport au soleil, elle paroîtra sur le rayon *BE* & sa latitude apparente sera l'angle
Idée de la Parallaxe annuelle en latitude.
EBC; cette latitude *EBC* est plus grande que la première, & la différence est l'angle *AEB*; enfin l'angle *AES* qui est sensiblement la moitié de *AEB* à cause de l'extrême petitesse de *AB* est la parallaxe annuelle en latitude.

2759. Si la distance *SE* de l'étoile fixe est deux cent mille fois plus grande que la distance *SA* du soleil à la terre, l'angle *AES* sera d'une seconde, & la latitude *EAS* d'une étoile en conjonction sera plus petite de 2″ que la latitude *EBC* de l'étoile observée dans son opposition; en supposant que la latitude de l'étoile soit à

peu-près de 90°. Copernic en démontrant par plusieurs raisons le mouvement de la terre ne dissimula pas cette objection, (Cop. *L. I*, *c.* 10). Pour que la latitude des étoiles paroisse la même en tout temps de l'année, malgré le mouvement de la terre, il faut que la distance des étoiles soit si grande que l'orbite de la terre n'y ait aucun rapport sensible, & que l'angle *AES* soit comme infiniment petit; mais, dit-il, « je pense qu'on doit plutôt » admettre cette grande distance des étoiles que la grande » quantité de mouvemens qui auroient lieu si la terre étoit » immobile »; d'ailleurs la grande distance des étoiles est un fait que rien ne contredit, & qu'il est très-aisé de concevoir (1094).

2760. Si l'étoile qui est éloignée du soleil de la quantité *SE* étoit située au pole *P* de l'écliptique, & à la même distance $SP = SE$, sa parallaxe seroit *SPA*; appellons *p* cette parallaxe absolue qui est la plus grande de toutes, & cherchons quel sera son effet dans d'autres positions.

2761. L'étoile étant en *E*, dans le plan *EABC* d'un cercle de latitude perpendiculaire à l'écliptique, & la terre au point *A*, la parallaxe de latitude *SEA* est égale à *p* sin. *EAS*, puisqu'elle a pour mesure la perpendiculaire *SX*, c'est-à-dire, qu'elle est égale à la parallaxe absolue multipliée par le sinus de la latitude de l'étoile; en supposant *AS* extrêmement petite par rapport à *AP*; ainsi le plus grand effet de la parallaxe sur la latitude, ou la parallaxe en latitude, quand elle a pour base le rayon *SA* de l'orbite terrestre, est *p* sin. lat. Cette parallaxe fait toujours paroître l'étoile plus près de l'écliptique, & diminue sa latitude quand l'étoile *E* est en conjonction avec le soleil.

La plus grande parallaxe de latitude.

2762. Si l'on conçoit la terre tourner dans son orbite, dont *AB* est le diamètre & dont le plan *ATB* est situé perpendiculairement au plan de la figure & au plan du triangle *EAB*, on concevra facilement que la terre étant en *T* à 90° du point *B*, elle répondra au-dessus du point *S* perpendiculairement au plan de la figure,

Elle est nulle dans les quadratures.

c'eſt-à-dire, que l'angle *EAS* ayant ſon ſommet en *T*, à la même diſtance du point *E*, que le point *S*, l'angle *EAC* ſera égal à *ESC*, ou la latitude apparente égale à la vraie; ainſi il n'y a point de parallaxe en latitude quand l'étoile *E* eſt en quadrature c'eſt-à-dire, qu'elle répond à 90° du ſoleil le long de l'écliptique, trois mois après la conjonction ou l'oppoſition.

2763. Je ſuppoſe que le point *T* & le point *S* ſont à la même diſtance du point *E*, c'eſt-à-dire, que la ligne *TS* eſt également perpendiculaire aux deux rayons viſuels. qui des points *T* & *S* vont aboutir à l'étoile *E*; mais il eſt évident que la grande petiteſſe de *ST* par rapport à *SE*, fait que l'erreur eſt incomparablement plus petite encore que la parallaxe, enſorte qu'il eſt indifférent de ſuppoſer la terre dans la circonférence *T* ou ſur le point *S* du diamètre auquel la terre répond perpendiculairement; pour s'en aſſurer, il ſuffit de conſidérer que ſi *EB* eſt la commune ſection des deux plans, dont l'un paſſe par les points *E* & *S*, l'autre par les points *E* & *T*, le point *T* répondant toujours perpendiculairement en *S*, le ſin. de l'angle en *S* ou de la latitude vue du point *S* ſeroit $\frac{EB}{ES}$, & celui de l'angle en *T*, $\frac{EB}{ET}$; mais *ET* ſurpaſſe *ES*, comme l'hypothénuſe d'un triangle ſurpaſſe le côté, ou comme le rayon ſurpaſſe le coſinus, c'eſt-à-dire, d'un infiniment petit du ſecond ordre, ſi *TS* eſt un infiniment petit du premier (3316), donc les latitudes vues du point *T* ou du point *S* ſont égales.

2764. Par la même raiſon la latitude de l'étoile vue du point *D* ou du point *F* eſt la même; ainſi quand la terre répondra au point *F*, la ligne *SF* ſera le ſinus de la diſtance de la terre au point *T* de la quadrature, & *SF* ſera la baſe d'un angle, égal à l'angle *SEF*, qui eſt la parallaxe de latitude; donc la parallaxe en latitude eſt proportionnelle au ſinus de la diſtance de la terre à la quadrature, qui eſt auſſi le coſinus de la diſtance de l'étoile à ſa conjonction au ſoleil; enſorte qu'elle eſt la plus grande & qu'elle varie le moins dans les conjonc-

tions

tions & les oppoſitions. Si l'on appelle L la latitude de l'étoile, E ſon élongation ou la longitude de l'étoile moins celle du ſoleil on trouvera la parallaxe en latitude pour un moment donné, p ſin. L. coſ. E. Elle s'ajoute à la latitude vraie pour avoir l'apparente, tant que l'étoile eſt plus près de l'oppoſition que de la conjonction, ou que la valeur de E eſt entre 3 & 9 ſignes. Ainſi quand on a la plus grande parallaxe en latitude qui eſt p ſin. L (2761) il ſuffit de la multiplier par le coſinus de l'élongation, pour avoir la parallaxe actuelle de latitude pour un moment quelconque.

2765. La parallaxe de longitude ſe déterminera par les mêmes principes, & avec la même facilité. Nous conſidérerons d'abord une étoile E (*fig.* 227) ſituée dans le plan même de l'écliptique ou de l'orbite de la terre $AFBG$; ſoit ABC la ligne d'où l'on compte les longitudes, l'angle ESC la longitude de l'étoile E vue du ſoleil S; ſi la parallaxe abſolue AES eſt de 1″, la longitude de l'étoile paroîtra plus petite de 1″ dans la première quadrature, la terre étant en A, & plus grande de 1″ dans la quadrature ſuivante, la terre étant en B. Si la parallaxe AES, qui a pour baſe le ſinus total AS vient enſuite à avoir pour baſe le ſinus DH, la terre étant en D, elle diminuera dans la même proportion; ainſi la parallaxe en longitude ſera p ſin. E: ſi donc on décrit un demi-cercle HIK (*fig.* 229), dont le demi-diamètre CK ſoit de 1″, & qu'on prenne l'arc ID égal à l'élongation de l'étoile, le ſinus LD ou la portion CM du rayon exprimera la parallaxe de longitude.

Parallaxe annuelle en longitude. *Fig.* 227. *Fig.* 229.

2766. Si l'étoile, au lieu d'être dans le plan même de l'écliptique, eſt relevée au-deſſus du plan, il n'y aura qu'à abaiſſer de l'étoile une perpendiculaire ſur le plan, & choiſir le point E (*fig.* 227) où tombe la perpendiculaire; on dira du point E la même choſe que de l'étoile, & celle-ci ſera ſujette aux mêmes apparences que le point E, quant à la longitude rapportée ſur l'écliptique. Mais ſi l'on veut conſidérer l'effet de la parallaxe dans la région de l'étoile, ſoit O (*fig.* 228) *Fig.* 228.

le vrai lieu de l'étoile qu'il faut concevoir relevé au-dessus de la figure ou du plan de l'écliptique, & répondant perpendiculairement sur le point *E* où tombe la perpendiculaire *OE*, la distance *SE* qui est la même que dans la figure 227, est plus petite que la vraie distance absolue *SO* de l'étoile, dans le rapport du cosinus de la latitude ou de l'angle *ESO* au sinus total; ainsi la parallaxe de l'étoile *O* prise d'occident en orient, sera plus petite que la parallaxe du point *E*; mais elle suivra les mêmes proportions dans ses accroissemens : si donc on appelle *p* la parallaxe absolue de l'étoile située en *O*, on aura pour la parallaxe en longitude $\frac{p.\ \text{sin.}\ E}{\text{cos.}\ L}$. Quand l'étoile paroîtra en quadrature, sin. *E* sera égal au rayon entier que nous prenons toujours pour unité, & l'on aura la plus grande parallaxe en longitude $\frac{p}{\text{cos.}\ L}$; ainsi la parallaxe actuelle pour une situation donnée est égale à la plus grande parallaxe multipliée par le sinus de l'élongation.

2767. Au moyen des deux formules précédentes, il est aisé de démontrer que les étoiles paroissent décrire une ellipse par l'effet de la parallaxe. Soit *C* (*fig.* 229) le vrai lieu de l'étoile, vu du centre du soleil, *CO* la plus grande parallaxe en latitude $= p.\ \text{sin.}\ L.$ qui a lieu dans les syzygies, *CH* ou *CK* la plus grande parallaxe en longitude mesurée sur un grand cercle, égale à la parallaxe absolue qui a lieu dans les quadratures, le point *H* qui est à l'orient répond à la première quadrature, puisque trois mois après sa conjonction la longitude de l'étoile est la plus grande (2765). Dans les autres temps de l'année l'étoile paroîtra en un point *F*, sa parallaxe de longitude *CM* étant égale à *CK*. sin. *E*, & sa parallaxe de latitude *FM* ou *CG*, $= CO$ cos. *E* (2764); de-là il suit que le point *F* est sur la circonférence d'une ellipse dont *CK* est le grand axe, & *CO* le petit axe; car la propriété de l'ellipse est que les abscisses *CM* étant les sinus de 15°, 30°,

Fig. 229.

&c. pour le rayon *CK* les ordonnées *A E* ſont les coſinus des mêmes arcs pour le rayon *CO* (3264).

2768. Les deux ellipſes que l'on voit dans la figure 230, ſont celles que Sirius & Arcturus doivent paroître décrire en vertu de la parallaxe (2767), en ſuppoſant que la parallaxe abſolue de chacune de ces étoiles ſoit égale au demi-axe de l'ellipſe qui la repréſente; la ligne *AB* eſt parallèle à l'équateur, & ces ellipſes ſont diſpoſées de manière à faire voir, pour chaque mois de l'année, dans quelle proportion ces deux étoiles s'éloignent ou ſe rapprochent, & de combien leur différence d'aſcenſion droite & de déclinaiſon devroit paroître différente (2777), ſuivant les temps marqués au-dedans des ellipſes, en vertu des loix de la parallaxe que nous avons expliquées; nous verrons combien les différences obſervées ſont éloignées de celles-là (2826). Ellipſes apparentes. *Fig.* 230.

2769. Si une étoile étoit ſituée au pole même de l'écliptique, la parallaxe de latitude ſeroit toujours égale à la parallaxe abſolue, ou à l'angle *APS* (*fig.* 226), *Fig.* 226. & l'ellipſe de la parallaxe deviendroit un cercle. Dans ce cas, la longitude apparente de l'étoile ſeroit toujours égale à la longitude du ſoleil : ſoit *P* (*fig.* 231) *Fig.* 131. le pole de l'écliptique ou le pole du cercle *ABCD* que la terre décrit; *Pa* ou *Pb* la valeur de la parallaxe abſolue; la terre étant en *A*, verra l'étoile en *a*, le plus près du point *C* de l'écliptique où répond alors le ſoleil, puiſque la latitude de l'étoile eſt toujours la plus petite quand elle eſt en conjonction (2761); de même quand la terre ſera en *B* l'étoile paroîtra en *b*, répondant toujours au point de l'écliptique oppoſé à celui où eſt la terre, & par ce moyen elle paroîtra décrire le petit cercle *abcd* autour du pole de l'écliptique dans l'eſpace d'un an; c'eſt ainſi que les ellipſes de la figure 230 s'élargiroient & deviendroient des cercles, ſi les latitudes de Sirius & d'Arcturus augmentoient juſqu'à devenir de 90°.

Obſervations faites pour la parallaxe des étoiles.

2770. Tycho-Brahé obſerva l'étoile polaire avec

ſoin en divers temps de l'année, & n'y trouva aucune différence (Kép. *Epit. aſtr.* 493); il étoit prouvé par-là que la parallaxe annuelle de l'étoile polaire n'étoit pas de 30″. Le P. Riccioli obſerva enſuite des hauteurs de Sirius trois mois avant & trois mois après l'oppoſition, & il n'y remarqua aucune altération (*Almag. II*, 452); mais quoiqu'il crût qu'une différence de 10″ devoit être ſenſible dans ſes obſervations, il paroît qu'elles n'étoient pas auſſi exactes qu'il le croyoit, car il y a 26″ de différence entre les hauteurs de Sirius au printemps & en automne (2847).

Obſervations de M. Picard.

2771. M. Picard, dans ſon voyage d'Uranibourg, *pag.* 18, en rapportant les obſervations de l'étoile polaire qu'il y fit en 1672, dit que cette étoile en divers temps de l'année a des variations que Tycho n'avoit pas remarquées & *que j'obſerve*, dit-il, *depuis environ dix ans*; quoique l'étoile polaire s'approche du pole de 20″ chaque année, il arrive néanmoins, ſuivant M. Picard, que vers le mois d'Avril la hauteur méridienne & inférieure de cette étoile devient moindre de quelques ſecondes qu'elle n'avoit paru au ſolſtice d'hiver précédent, au lieu qu'elle devroit être plus grande de 5″; qu'enſuite aux mois d'Août & de Septembre ſa hauteur méridienne ſupérieure ſe trouve à peu-près telle qu'elle avoit été obſervée en hiver, & même quelquefois plus grande, quoiqu'elle dût être diminuée de 10 à 15; mais qu'enfin vers la fin de l'année tout ſe trouve compenſé.

2772. Qu'il me ſoit permis de remarquer ici par avance à l'honneur de ce grand aſtronome, que ces obſervations ſont conformes, autant qu'elles pouvoient l'être, aux phénomènes de l'aberration découverte long-temps après (2847); l'étoile polaire doit paroître plus baſſe de 19″ au commencement d'Avril, lorſqu'elle paſſe au méridien dans la partie inférieure de ſon cercle, qu'au ſolſtice d'hiver, & la hauteur ſupérieure de l'étoile polaire doit paroître de 29″ plus grande au commencement de Septembre qu'au ſolſtice d'hiver; ce qui s'accorde avec

Elles ſont confirmées actuellement.

l'obſervation de M. Picard ; ainſi ce célèbre obſervateur a eu la gloire de faire la première découverte de l'aſtronomie moderne ſur les étoiles fixes, & de jetter les fondemens de toutes celles que l'on a faites depuis.

2773. Le Docteur Hook (548), célèbre dans preſque tous les genres de littérature, & qui ſe regardoit lui-même comme le plus ſavant homme de l'Angleterre, voulut auſſi avoir l'honneur de déterminer ces variations (*An attempt to prove the motion of the earth from obſervations made by Robert Hook. London*, 1674, 4°. 28 *pag.*). Il avoit placé au college de Gresham une lunette de 36 pieds, avec laquelle il avoit obſervé les diſtances au zénit de γ du Dragon ; il trouva, dit-il, en 1669 cette étoile de 23″ plus au nord le 6 Juillet que le 21 Octobre, Flamſteed en concluoit auſſi bien que lui-même la parallaxe annuelle, & en effet ces obſervations du Docteur Hook ſont auſſi exactement d'accord avec la théorie des parallaxes, que ſi on les y eût ajuſtées par avance, en ſuppoſant que la parallaxe de γ du Dragon fut de 15″.

2774. M. Picard voulut vérifier cette obſervation ; mais la hauteur méridienne de la lyre obſervée dans les deux ſolſtices, lui parut la même, ce qui étoit contraire aux obſervations de M. Hook, comme il le remarqua lui-même dans l'aſſemblée de l'académie, le 4 Juin 1681. (*Hiſt. céleſt. pag.* 252). On voit, en effet, par les loix de l'aberration que la différence eſt inſenſible, d'un ſolſtice à l'autre.

Obſervations de Flamſteed.

2775. Flamſteed, ayant obſervé l'étoile polaire avec ſon mural (2323, 2591) en 1689, & dans les années ſuivantes, trouva que la déclinaiſon étoit plus petite de 40″ au mois de Juillet, qu'au mois de Décembre ; ces obſervations étoient juſtes, mais elles ne prouvoient point la parallaxe annuelle, comme le fit voir M. Caſſini, (*Mem. acad.* 1699). Au reſte, quoique Flamſteed crût reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle dans les différences qu'il avoit obſervées, il avoit quelques doutes ſur ſes obſervations, & il ſouhaitoit que quelqu'un voulût faire conſtruire un inſtrument de 15 à 20 pieds de

rayon ſur un fondement inébranlable, pour éclaircir une queſtion qui ſans cela, diſoit-il, pourroit être bien long-temps indéciſe. M. Caſſini crut trouver dans Sirius une parallaxe de 6″, (*Mém. acad.* 1717, *pag.* 265).

2776. Lorſque Rowley voulut placer un objectif dans une des tours de S[t] Paul de Londres pour obſerver cette parallaxe annuelle, Newton s'y oppoſa ; il craignit que le bâtiment venant à changer ne dérangeât la ſituation de la lunette, & ne fit tirer de fauſſes conſéquences dans une matière qui étoit auſſi délicate ; Newton qui, par le moyen de l'attraction avoit ſi bien démontré le mouvement de la terre, ne vouloit pas qu'on répandît des nuages ſur une théorie très-certaine, en y introduiſant des obſervations équivoques. Ce ne fut qu'en 1725, que M. Molyneux, au moyen du ſecteur fait par M. Graham, trouva que cette parallaxe n'avoit pas lieu (2793).

2777. Ce que M. Caſſini avoit dit ſur la parallaxe annuelle des étoiles en réfutant les concluſions de Flamſteed ([a]), ne s'étendoit qu'aux circonſtances qu'il avoit eu deſſein d'examiner ; M. Manfredi ſe propoſa en 1720, de donner les loix générales de cette variation : en 1722 il en fit un corps d'ouvrage qui a paru en 1729 ([b]) ; il y donne la manière de calculer la parallaxe annuelle des étoiles en longitude, en latitude, en aſcenſion droite & en déclinaiſon, & de tracer les ellipſes qui ſervent à la repréſenter ; il rapporte les obſervations qu'il avoit faites des différences d'aſcenſion droite entre Arcturus & Sirius, & il dit, *pag.* 74, qu'elles ne s'accordent point avec la parallaxe.

2778. La découverte de l'aberration a fait voir que les inégalités apperçues dans les étoiles ont une cauſe toute différente de la parallaxe, & cette nouvelle cauſe ſatisfait ſi bien à toutes les obſervations, qu'elle exclut

La parallaxe eſt abſolument nulle.

([a]) Mémoires de l'Académie, 1699, 1717. Voyez cependant les Mém. de 1715.

([b]) *Euſtachii Manfredii Bononienſis Scientiarum Inſtituti Aſtronomi, de annuis inerrantium Stellarum aberrationibus*, Bononiæ, 1729, *in*-4°, 80 pages.

absolument la parallaxe. Ainsi la question de la parallaxe annuelle des étoiles fixes est résolue, M. Bradley pense que si elle eût été seulement de 1″, il l'auroit apperçue dans le grand nombre d'observations qu'il avoit faites, sur-tout de γ du Dragon, observations qui s'accordent en tout temps avec l'aberration sans tenir compte d'aucune parallaxe.

2779. Lorsque M. Manfredi eut appris la découverte de l'aberration, il publia des observations qu'il avoit faites, aidé de M. Zanotti, sur les différences d'ascension droite entre différentes étoiles, (*De Bononiensi Scientiarum & Artium Instituto atque Academiâ Commentarii* 1731, *in*-4°, *pag.* 399). Il avoit observé que la plus grande différence d'ascension droite avoit lieu quand une des étoiles étoit en conjonction, & l'autre en opposition, & la plus petite différence six mois après; ce qui est d'accord avec la théorie de l'aberration (2815). Les observations données par M. *Horrebow* (*Copernicus triumphans, Hafniæ,* 1727) y sont contraires, & me paroissent absolument défectueuses.

2780. Lorsque les observations de M. de la Caille parurent en 1757, on crut s'appercevoir que les hauteurs méridiennes de Sirius indiquoient une parallaxe annuelle; en effet, on voit que les distances au zénit observées au Cap avec un secteur de six pieds, étoient plus petites au mois de Janvier, & cela d'environ 8″ qu'au mois de Juillet, (*Astron. Fund. pag.* 173, 190); mais ces observations de Sirius ne vont que de l'été 1751 à l'hiver suivant; & il peut y avoir eu quelque cause locale qui ait produit dans ces observations des différences de 8″. M. de la Caille au mois de Juin & de Juillet 1761, & au mois de Janvier 1762, fit un grand nombre d'observations de Sirius à Paris, & je vois (dans son Journal manuscrit légué à l'académie), que la hauteur de Sirius étoit 24° 44′ 15″ en hiver, & 24° 44′ 12″½ en été, la différence n'est que de 2″½, & elle est contraire à l'effet de la parallaxe: aussi M. de la Caille a écrit en marge de ces observations ces mots: *Il faudroit que les variations des*

On soupçonnoit une parallaxe dans Sirius.

Elle n'existe point.

réfractions fussent plus fortes que de $\frac{1}{17}$, parce qu'en effet ; si l'on suppose que la réfraction ait augmenté en hiver un peu plus que dans la table de M. de la Caille (2239), on trouvera la même hauteur en hiver & en été.

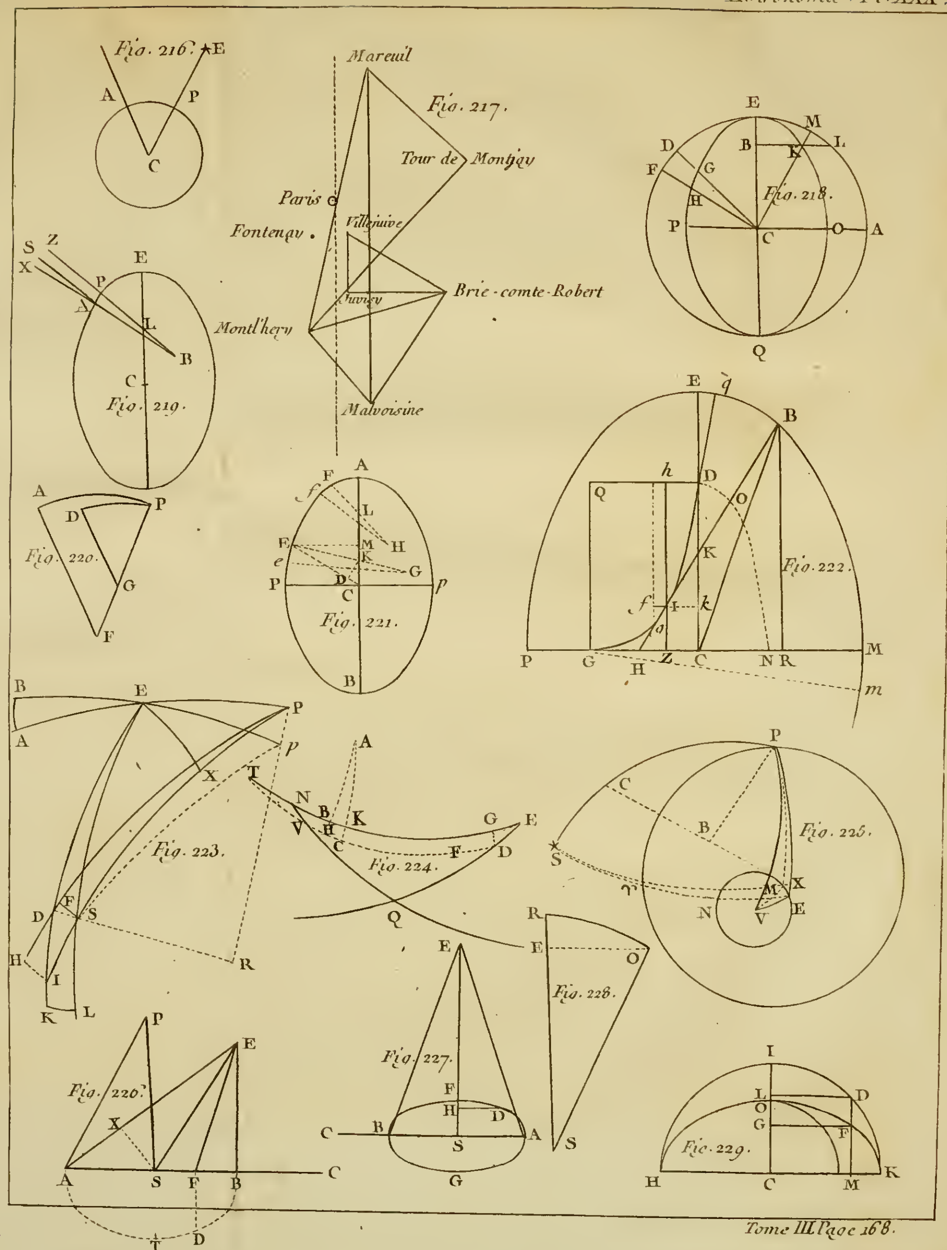
2781. Les observations faites en Angleterre, sont également contraires à l'hypothèse de la parallaxe annuelle de Sirius ; M. Bevis m'a fait voir à Londres au mois de Mars 1763, une suite de 45 hauteurs Méridiennes de Sirius, prises au mural de 8 pieds qui est à l'observatoire Royal de Greenwich ; ces hauteurs ont été réduites au premier Janvier 1760 ; & l'on y a employé toutes les corrections nécessaires pour le changement des réfractions, &c. Ces observations ne s'écartent jamais de plus de 3 ou 4 secondes de la moyenne, & les petites différences qu'on y remarque ne m'ont paru avoir aucun rapport avec la paralaxe annuelle. Si la plus brillante de toutes les étoiles n'a aucune parallaxe, il n'y a point d'apparence qu'on en découvre dans les autres étoiles, qui sont sans doute beaucoup plus éloignées de la terre.

Sur la distance & de la grandeur des Etoiles fixes.

De la distance des Etoiles fixes.

2782. La connoissance de la parallaxe annuelle nous conduiroit à celle de la distance des étoiles, si cette parallaxe pouvoit s'observer ; mais puisqu'elle est insensible (2778) nous en conclurons au moins par exclusion, une des limites de cet éloignement. Si la parallaxe absolue d'une étoile ou l'angle *APS* (*fig.* 226) étoit de 1″, le côté *PS* seroit 206264 fois plus grand que le rayon *AS* de l'orbe annuel, qui est lui-même de 33 millions de lieues (1398). La distance moyenne du soleil *AS*, contient 22198 fois le demi-diamètre de la terre, en supposant la parallaxe de 9″ : donc si la parallaxe annuelle d'une étoile étoit seulement de 1″, sa distance seroit 4727200000, ou 4727 millions de fois

Fig. 226.


Fig. 216.
Fig. 217.
Mareuil
Tour de Montjay
Paris
Fontenay
Villejuive
Juvisy
Brie-comte-Robert
Montl'hery
Malvoisine
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.
Fig. 220.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.

fois plus grande que le rayon de la terre, c'est-à-dire, de 6771770 millions de lieues. Mais la parallaxe des étoiles n'étant pas d'une seconde, même pour les étoiles les plus proches de la terre, leur distance doit être encore plus considérable, c'est-à-dire, plus de 677177000000 de lieues.

2783. Si par le moyen de ce rayon, on calcule la circonférence du cercle qui seroit décrit tous les jours par les étoiles dans le systême de la terre immobile, la révolution diurne étant de $23^h\ 56'\ 4''$, 1; on trouvera que les étoiles parcourroient au moins 49392000 lieues par seconde; mais au moyen de la rotation de la terre, une vîtesse de 238 toises par seconde, nous dispense d'en supposer une de 49 millions de lieues.

2784. Après avoir vu à quelle prodigieuse distance doivent être les étoiles fixes, on ne sera pas étonné de l'extrême petitesse de leur diamètre apparent, & de l'impossibilité où nous sommes de déterminer leur grandeur absolue & leur véritable diamètre. Albategnius estimoit le diamètre apparent des étoiles de la première grandeur de 45″; Tycho le croyoit d'une minute, Riccioli de 18″ (*Astron. reform. pag.* 359). Galilée & Képler étoient déja persuadés que les étoiles fixes étoient des soleils comme le nôtre, (Galilei *Dial.* 3 *de mundi syst.* Képler, *diss. cum nuncio syd.* Jordanus Brunus, *Lib. de maximo & immenso*), & que leur diamètre apparent étoit d'une extrême petitesse. Galilée avoit observé que la Lyre n'avoit pas plus de 5″ de diamètre, & Horoccius avertissoit en 1639, que plus les lunettes étoient parfaites plus elles faisoient paroître les étoiles petites, & semblables à des points lumineux (*Hev. Venus in sole visa*, *pag.* 139). Diamètre apparent des étoiles.

2785. Képler, qui avant la découverte des lunettes, donnoit 4 minutes de diamètre à Sirius, (*de stella nova cap.* 16 & 21) fut persuadé ensuite (*Epit. astron. pag.* 498) qu'elles n'étoient que comme des points, d'autant plus petits que les lunettes sont plus parfaites; Gassendi estimoit Sirius de 10″; M. Huygens trouva par des

expériences très-délicates que les étoiles étoient comme des points; M. Caſſini en 1717 jugeoit le diamètre de Sirius de 5″.

Il n'eſt pas d'une ſeconde.

2786. Il eſt prouvé aujourd'hui que 4 étoiles de la première grandeur, Regulus, Aldébaran, l'Epi de la Vierge, & Antarès, n'ont pas 1″ de diamètre : car lorſque ces étoiles ſont éclipſées par la lune, elles n'employent pas deux ſecondes de temps à ſe plonger ſous le diſque de la lune; ce qui arriveroit néceſſairement ſi le diamètre de ces étoiles étoit de 1″. En effet, la lune emploie environ 2″ de temps à avancer d'une ſeconde de degré; ainſi pendant l'eſpace de 2″ de temps, on verroit une étoile diminuer de grandeur & diſparoître peu-à-peu; or, il n'en eſt pas ainſi, les étoiles diſparoiſſent en une demi-ſeconde, elles reparoiſſent avec la même promptitude & comme un éclair, donc le diamètre n'eſt pas d'une ſeconde. *Philoſ. tranſ. abr. IV*, 332.

2787. Si l'on voit dans les lunettes une lumière éparſe qui environne les étoiles, qui les amplifie & les fait paroître comme ſi elles avoient 5 à 6″ de diamètre, on doit attribuer cette apparence à la vivacité de leur lumière, à l'air environnant & illuminé, à l'aberration des verres, à l'impreſſion trop vive qui ſe fait ſur la rétine; on en a vu la preuve à l'occaſion des feux & des ſignaux (2647).

De la grandeur abſolue des étoiles.

2788. Si le diamètre d'une étoile étoit d'une ſeconde, & ſa parallaxe annuelle d'une ſeconde, le diamètre réel de l'étoile ſeroit égal au rayon du grand orbe, c'eſt-à-dire, de 33 millions de lieues; mais il peut ſe faire que les parallaxes des étoiles ſoient plus grandes que leurs diamètres apparens, enſorte que le diamètre réel ſoit beaucoup plus petit que 33 millions de lieues; nous ne pouvons rien décider là-deſſus, peut-être un jour les aſtronomes ſeront-ils plus inſtruits.

Cauſe de la ſcintillation.

2789. L'extrême petiteſſe du diamètre apparent des étoiles fixes eſt probablement la cauſe du mouvement de ſcintillation qu'on y remarque; cette ſcintil-

lation ne s'apperçoit point dans les planètes, par exemple, dans Jupiter & très-peu dans Vénus, quoique la force de leur lumière surpasse celle des étoiles fixes, & elle sert souvent à distinguer les planètes des étoiles; le diamètre d'une étoile est si petit que les moindres molécules de matière qui passent entre elle & nous par l'agitation de l'atmosphère, suffisent pour nous cacher l'étoile, & nous la montrer alternativement. Si l'on conçoit que ces alternatives soient assez fréquentes & assez courtes pour qu'à peine notre œil puisse les distinguer l'une de l'autre, on comprendra que les étoiles doivent paroître dans une espèce de tremblement continuel. Cela paroît confirmé par l'observation faite dans certains pays, où l'air est extrêmement pur & tranquille, & où l'on dit que la scintillation des étoiles n'a pas lieu; mais quand il n'y auroit sur la terre aucun pays dont l'air fût assez calme pour faire cesser le tremblement apparent de la lumière des étoiles, cela ne suffiroit pas pour détruire l'explication précédente.

M. Garcin, correspondant de l'académie, & qui étoit aussi de la société Royale de Londres, étant en Arabie, à peu-près sous le tropique du cancer, à Gomron, ou Bander-Abassi, port fameux du golfe Persique, écrivoit à M. de Réaumur qu'il vivoit dans un pays tout-à-fait exempt de vapeurs; la sécheresse des environs du golfe Persique est telle que non-seulement on n'y voit jamais sortir aucune vapeur de terre, mais qu'on n'y apperçoit pas même un brin d'herbe pendant les trois saisons chaudes de l'année, du moins dans les lieux découverts & exposés au soleil; c'est presque de la cendre plutôt que de la terre. Aussi dans le printemps, l'été & l'automne, ceux qui y restent couchent en plein air sur le haut des maisons qui sont en plate-forme, sur des toiles tendues, & sans couvertures. Les étoiles y font un spectacle frappant; c'est une lumière pure, ferme & éclatante, sans nul étincellement; ce n'est qu'au milieu de l'hiver que la scintillation, quoique très-foible s'y fait appercevoir; en conséquence, M. Garcin ne doutoit

pas que la ſcintillation des étoiles ne vînt des vapeurs qui s'élèvent ſans ceſſe dans l'atmoſphère des pays moins ſecs. M. de la Condamine a remarqué de même dans la partie du Pérou, qui eſt le long de la côte, où il ne pleut jamais, que la ſcintillation des étoiles y étoit bien moins ſenſible que dans nos climats. Cette grande pureté du ciel en Arabie, fut ſans doute autrefois l'occaſion des premières découvertes de l'aſtronomie (260), on comprend aſſez quel avantage un ciel toujours pur & ſerein a dû donner aux Aſiatiques, ſur le reſte du monde. La facilité de voir toujours ce ſpectacle dans toute ſa beauté, ou plutôt l'impoſſibilité de ne le pas voir ſans ceſſe a fait de tous les habitans de Bander-Abaſſi & des environs, comme autant d'aſtronomes. Les interruptions de ſommeil qui doivent y être fréquentes deviennent pour eux la ſource de mille obſervations curieuſes & faciles, que nous préparons en Europe avec des ſoins pénibles, & qu'un ciel ingrat nous enlève : auſſi les Gens du peuple ſavent connoître quand ils s'éveillent quelle heure il eſt, par les étoiles, & connoiſſent plus ou moins les principales circonſtances de ces mouvemens. Si les talens ſe développent, dit M. de Mairan, à meſure qu'il ſe préſente plus d'occaſions de les exercer, & s'ils ſont aſſez également répandus ſur la totalité du genre humain, combien de ſemblables pays, la Caldée, l'Egypte & l'Arabie, n'ont-ils pas du produire d'aſtronomes, lorſque les ſciences, & l'aſtronomie ſur-tout, y étoient en honneur (*Hiſt. acad.* 1743).



LIVRE DIX-SEPTIEME.

DE L'ABERRATION ET DE LA NUTATION.

Les mouvemens apparens des étoiles fixes causés par la précession & par d'autres causes particulières, ayant été expliqués dans le XVIe. livre, je passe à l'explication des deux mouvemens apparens, découverts par M. Bradley depuis l'année 1728, & qui sont connus sous le nom d'*Aberration* & de *Nutation*.

2790. L'aberration est un mouvement apparent observé dans les étoiles fixes, par lequel elles semblent décrire des ellipses de 40″ de diamètre ; il est causé par le mouvement de la lumière, combiné avec le mouvement annuel de la terre (2801). La définition de la nutation se trouvera ci-après (2853) ; l'histoire de la découverte de ces deux mouvemens exige que l'on se rappelle ce qui a été dit à l'occasion de la parallaxe annuelle (2773).

2791. Flamsteed avoit cru non-seulement d'après les observations du Docteur Hook, mais encore d'après les siennes propres, qu'il y avoit une parallaxe annuelle dans les étoiles fixes ; cependant la quantité & la loi en étoient peu connues ; *Samuel Molyneux*, Irlandois, entreprit vers l'an 1725, de vérifier ce qu'on avoit dit là-dessus, & de déterminer avec plus de soin les circonstances de ces mouvemens, (*Philos. trans. n°.* 485) ; c'est au projet de Molyneux que nous sommes redevables de toutes les connoissances qui vont faire la matière de ce XVIIe livre ; mais M. Bradley eut la gloire d'exécuter ce que Molyneux n'avoit fait qu'entreprendre. Entreprise de M. Molyneux.

2792. M. Molyneux fit construire un instrument dans le même goût & choisit les mêmes étoiles que le Docteur Hook ; *Georges Graham*, cet Horloger célèbre dans les arts, autant par son génie que par son zèle, Secteur de M. Graham.

contribua plus que tout autre à ce travail, il fit construire pour Molyneux un secteur de 24 pieds, dont l'exactitude surpassoit de beaucoup tout ce qui avoit jamais été fait pour parvenir à mesurer dans le ciel de petits arcs (2380).

Le secteur de Molyneux fut placé à Kew, près de Londres, & le 3 Décembre 1725, il observa au méridien l'étoile γ à la tête du Dragon; il marqua exactement sa distance au zénit; il répéta cette observation le 5, le 11, le 12 du même mois, il ne trouva pas de grandes différences; & comme on étoit dans un temps de l'année où la parallaxe annuelle de cette étoile ne devoit pas varier (2764), il crut qu'il étoit inutile de continuer pour lors les mêmes observations.

Premieres observations.

2793. M. Bradley se trouva dans ce temps-là à Kew, il eut la curiosité d'observer aussi la même étoile le 17 Décembre 1725, & ayant disposé l'instrument avec soin, il vit que l'étoile passoit un peu plus au sud que dans les premiers jours du mois; d'abord les deux astronomes ne firent pas grande attention à cette différence, elle pouvoit venir des erreurs d'observation; cependant le 20 Décembre l'étoile avoit encore avancé vers le sud, & elle continua les jours suivans, sans qu'on pût attribuer ce progrès au défaut des observations.

Cette différence paroissoit d'autant plus surprenante qu'elle étoit dans un sens contraire à l'effet que devoit avoir la parallaxe; & comme on ne concevoit aucune autre chose qui pût produire un pareil changement, on craignit qu'elle ne vînt de quelque altération dans les parties de l'instrument; il fallut donc s'assurer par diverses expériences de son exactitude; & comme l'étoile alloit toujours vers le sud; on ne songea plus qu'à mesurer exactement ce progrès, pour tâcher d'en découvrir les circonstances & la cause; au commencement du mois de Mars 1726 l'étoile se trouva parvenue à 20″ du lieu où on l'avoit observée trois mois auparavant, alors elle fut pendant quelques jours stationaire; vers le milieu d'Avril elle commença de remonter vers le nord,

& au commencement de Juin elle paſſa à la même diſtance du zénit que dans la première obſervation faite ſix mois auparavant; ſa déclinaiſon changeoit alors de 1″ en trois jours; d'où il étoit naturel de conclure qu'elle alloit continuer d'avancer vers le nord; cela arriva comme on l'avoit conjecturé; l'étoile ſe trouva au mois de Septembre de 20″ plus au nord qu'au mois de Juin, & 39″ plus qu'au mois de Mars; delà l'étoile retourna vers le ſud, & au mois de Décembre 1726, elle fut obſervée à la même diſtance du zénit que l'année précédente, avec la ſeule différence que la préceſſion des équinoxes devoit produire.

2794. Par-là il étoit bien prouvé que le défaut de l'inſtrument n'étoit pas la cauſe des différences obſervées; d'un autre côté, l'effet étoit trop régulier pour pouvoir être attribué à une fluctuation irrégulière de la matière éthérée, comme Manfredi l'avoit ſoupçonné dans un temps où l'on n'avoit que de mauvaiſes obſervations; mais la difficulté étoit de trouver une explication ſuffiſante.

La première idée fut d'examiner ſi cela ne provenoit point de quelque nutation dans l'axe de la terre, produite par l'action du ſoleil ou de la lune, à cauſe de l'aplatiſſement de la terre, ainſi que cela devoit avoir lieu par l'attraction (2854); mais d'autres étoiles obſervées en même-temps ne permettoient pas d'adopter cette hypothèſe : une petite étoile qui étoit à même diſtance du pole, & oppoſée en aſcenſion droite à γ du Dragon auroit dû avoir par l'effet de cette nutation le même changement en déclinaiſon; cependant elle n'en avoit eu qu'environ la moitié, comme cela parut en comparant jour par jour les variations de l'une & de l'autre, obſervées en même-temps; c'étoit la 35e étoile de la Giraffe.

2795. En comparant les obſervations, il paroiſſoit que la différence apparente de déclinaiſon par rapport à la plus grande, en différens temps de l'année étoit à-peu-près proportionnelle au ſinus verſe de la diſtance du

ſoleil aux points équinoxiaux. C'étoit une raiſon de penſer que la cauſe, quelle qu'elle pût être, avoit quelque rapport avec la diſtance du ſoleil à ces points, mais M. Bradley n'avoit pas encore aſſez d'obſervations pour entreprendre de chercher l'hypothèſe qui pouvoit y ſatisfaire; Molyneux ayant été nommé Lord Commiſſaire de l'Amirauté d'Angleterre, n'avoit plus le temps de s'en occuper, M. Bradley voulut donc ſuivre lui-même ces recherches.

Autre ſecteur fait pour M. Bradley.

2796. Pour cela il eut encore recours à Graham; il fit conſtruire un autre ſecteur dont l'arc beaucoup plus grand s'étendoit à 6° $\frac{1}{4}$ de chaque côté du zénit, & pouvoit comprendre non-ſeulement *la Chèvre*, étoile de la première grandeur, mais plus de 200 étoiles du Catalogue Britannique, dont douze étoient aſſez brillantes pour pouvoir être vûes lors même qu'elles paſſoient au méridien à midi, au lieu que celui de M. Molyneux ne pouvoit donner en tout que 7′ ou 8′, & comprenoit par conſéquent très-peu d'étoiles aſſez brillantes pour pouvoir être obſervées en tout temps..

M. Bradley ne put donner que 12 pieds $\frac{1}{2}$ à ſon ſecteur, à cauſe de la ſituation des lieux qu'il habitoit; mais il a toujours jugé cette longueur ſuffiſante; car lorſque l'inſtrument étoit bien rectifié, on pouvoit être aſſuré de la diſtance au zénit à une demi-ſeconde près. M. Bradley demeuroit à Wanſted où M. Pound, ſon oncle, étoit Curé; le ſecteur y fut placé le 19 Août 1727, & M. Bradley commença d'examiner ſoigneuſement quelles étoient les variations des étoiles, ſuivant leur différente ſituation.

2797. Il vit alors que la règle qu'il avoit cru appercevoir l'année précédente n'avoit lieu que pour les étoiles ſituées près du colure des ſolſtices, comme γ du Dragon. Ces étoiles étoient les ſeules qui fuſſent le plus au nord ou le plus au ſud dans le temps des équinoxes. Mais une règle plus générale qui ne pouvoit guère lui échaper, étoit que chaque étoile paroiſſoit ſtationaire ou dans ſon plus grand éloignement vers le nord ou vers

Règle générale d'aberration.

le

le ſud lorſqu'elle paſſoit au zénit vers ſix heures du ſoir ou du matin, que toutes avançoient vers le ſud lorſqu'elles paſſoient le matin, & vers le nord lorſqu'elles paſſoient le ſoir, & que le plus grand écart étoit à peu-près comme le ſinus de la latitude de chacune. Enfin, lorſqu'au bout d'une année il eut vu toutes les étoiles reparoître, chacune au même lieu où elle avoit d'abord paru; M. Bradley, muni d'un aſſez grand nombre d'obſervations, s'occupa à trouver la cauſe de ces variations.

Il s'étoit déja convaincu que la nutation ſuppoſée dans l'axe de la terre ne ſuffiſoit pas pour expliquer l'aberration de 2 étoiles oppoſées (2794), & qu'elle étoit contraire à la parallaxe; un changement dans le fil à-plomb, ou dans la réfraction, ne donnoit rien de ſatisfaiſant; il falloit une cauſe annuelle, & conſtante, égale pour les étoiles foibles & pour les plus brillantes, dont le plus grand effet du nord au ſud fût comme le ſinus de la latitude, c'eſt-à-dire, nul pour les étoiles ſituées dans l'écliptique; tranſportons-nous à ſa place, & raiſonnons à peu-près comme il dut faire.

2798. Puiſque cette aberration étoit nulle en latitude pour les étoiles ſituées dans l'écliptique, elle devoit donc pour ces étoiles-là ſe faire toute entière dans le plan de l'écliptique, comme la parallaxe annuelle, avec cette différence que quand l'étoile auroit dû avoir la plus grande aberration en latitude ſuivant la parallaxe (2761), elle ſe trouvoit au contraire ſuivant l'obſervation être dans ſa ſituation moyenne, & que dans les temps où la parallaxe auroit dû être nulle, on obſervoit la plus grande aberration. En partant de cette différence entre la parallaxe & l'aberration, que M. Bradley ne pouvoit manquer d'appercevoir, il s'enſuivoit que la plus grande aberration en longitude arrivoit lorſque l'étoile étoit ou en conjonction, ou en oppoſition.

Ainſi l'étoile *E* (*fig.* 232) devoit paroître 40″ plus à l'orient, la terre étant au point *G*, de ſon orbite *GHK* que ſix mois après, la terre étant en *K*. M. Raiſonnemens qu'on dût faire là-deſſus. *Fig.* 232.

Bradley apperçut heureusement que cette différence de 40″ étoit précisément le chemin que la terre parcourt dans son orbite en 16 minutes de temps, il se rappella que la lumière employoit le même temps à parcourir le diamètre *GK* de l'orbite de la terre, suivant la découverte faite par Romer en 1675 (2895). M. Bradley put d'abord imaginer que l'on voyoit les étoiles 16′ plus tard, à cause de leur éloignement, quand elles étoient en conjonction que lorsqu'elles étoient en opposition, & que par-là on les voyoit de 40″ moins avancées; mais suivant ce raisonnement il n'y auroit point eu d'aberration pour l'étoile située au pole de l'écliptique, dont la distance est toujours la même.

2799. Cependant l'étoile γ du Dragon avoit une aberration de 20″ au nord & au sud, qui croissoit comme les sinus des distances au point où elle étoit nulle, de la même façon que les parallaxes annuelles (2765); il y avoit apparence que cette étoile décrivoit un cercle semblable à celui qui auroit lieu par une parallaxe de 20″; mais qu'elle le décrivoit de manière à être toujours avancée de 20″ du côté où va la terre. Soit
Fig. 235. *ABCD* (*fig.* 235), le cercle ou l'orbite annuelle de la terre, *E* une étoile située au pole de ce cercle, & qu'il faut imaginer relevée à une distance prodigieuse au-dessus du plan de la figure; lorsque la terre est en *A*, l'étoile au lieu de paroître en *E* paroît en *a*, plus avancée de 20″ du côté où va la terre; lorsque la terre est en *B*, l'étoile paroît en *b*, &c. Tel est le phénomène qui étoit indiqué par les observations de M. Bradley; nous en parlerons plus au long (2813). Il restoit donc à chercher un moyen pour faire ensorte que l'étoile parût toujours du côté où alloit la terre.

2800. Enfin M. Bradley eut l'idée heureuse de combiner le mouvement de la lumière avec celui de la terre, suivant les loix de la décomposition des forces (2801), il essaya cette hypothèse, & voyant qu'elle s'accordoit parfaitement avec toutes les observations, il rendit compte de sa découverte au mois de Décem-

bre 1728, dans une lettre à M. Halley (*Philoſ. tranſ.* *n°*. 406).

Pour faire voir combien ſon hypothèſe s'accordoit avec ſes obſervations, M. Bradley diſpoſa dans une table 15 obſervations de γ du Dragon faites dans tous les mois de l'année; on y voit combien à chaque jour elle devoit être plus méridionale, ſuivant le calcul rigoureux fait d'après les principes que nous allons indiquer, & combien elle avoit paru l'être par l'obſervation, la différence ne va jamais au-delà de $1''\frac{1}{2}$. Accord de cette hypothèſe.

Le même accord que l'on voyoit dans cette table de γ du Dragon, parut par toutes les autres étoiles, dont l'aberration fut obſervée & calculée, quelle que fut leur diſtance aux colures. M. Bradley aſſure que cet accord lui parut ſurprenant, & que dans plus de 70 obſervations qu'il avoit faites de γ du Dragon pendant une année, il n'y en avoit qu'une qui différât de l'hypothèſe de plus de 2″, & elle étoit marquée comme très-douteuſe à cauſe des nuages qu'il y avoit ce jour-là. Ainſi M. Bradley dut regarder cet accord des obſervations, comme une démonſtration de ſon hypothèſe, ou plutôt il dut ceſſer de regarder comme hypothèſe une théorie qui s'accordoit ſi bien, & avec le mouvement des étoiles & avec la propagation ſucceſſive de la lumière déja connue par les éclipſes des ſatellites (2895).

2801. Je paſſe donc à l'explication de la cauſe que M. Bradley aſſigna aux phénomenes qu'il avoit obſervés (2797), & comme on a ordinairement quelque peine à la bien concevoir, je ferai tous mes efforts pour la mettre hors de doute, & en rendre le principe auſſi évident que doit l'être une propoſition de pure géométrie; je vais donc le préſenter ſous différentes formes; toutes ſuppoſent néanmoins que l'on ait une idée de la décompoſition des forces dans les parallélogrammes (1232), telle qu'on la trouve dans tous les livres élémentaires de Mécanique. Soit *E* une étoile (*fig*. 233), qui lance vers nous un rayon de lumière, conſidéré Cauſe de l'aberration. *Fig*. 233.

comme un corpuſcule qui va de *E* en *B*; ſoit *AB* une petite portion de l'orbite de la terre, de 20″ par exemple, (l'on verra dans un inſtant pourquoi nous choiſiſſons ce nombre 20″), & *CB* l'eſpace que le rayon a parcouru pendant que la terre décrivoit *AB*; ainſi le corpuſcule de lumière *B* étoit en *C* lorſque la terre étoit en *A*, & arrive au point *B* en même temps que la terre; par ce moyen *CB* & *AB* expriment les vîteſſes de la lumière & de la terre en 20″ de temps.

Je tire la ligne *CD* parallèle & égale à *AB*, & je termine le parallélogramme *DBA*; ſuivant le principe ſi connu de la compoſition & décompoſition des forces on peut regarder la vîteſſe *CB* de la lumière comme réſultante de deux vîteſſes ſuivant les directions *CD* & *CA*; la vîteſſe *CD* étant du même ſens & de la même quantité que la vîteſſe *AB* de la terre, ne ſauroit être apperçue, elle eſt détruite pour nous; l'œil ne ſauroit voir en vertu d'un rayon qui ſeroit pouſſé du même ſens & avec la même vîteſſe que l'œil. Ainſi la ſeule partie *CA* de la vîteſſe de la lumière ſubſiſtera pour nous, le rayon parviendra à notre œil ſous la direction *CA*, & nous appercevrons l'étoile dans la ligne *AC*, ou ſuivant *BD* qui lui eſt parallèle; l'angle *CBD* eſt ce que nous appellons l'ABERRATION; c'eſt la quantité ou l'angle *CBD* dont une étoile paroît éloignée de ſa véritable place, ou de la ligne *BCE*, par un effet du mouvement de la terre & de celui de la lumière M. d'*Alembert*, dans l'Encyclopédie au mot ABERRATION.

Définition de l'aberration.

Autre manière de concevoir l'aberration.

2802. L'on peut encore ſe repréſenter le même effet ſous une autre forme; le corpuſcule de lumière *B* vient frapper notre œil avec la vîteſſe *CB*; mais puiſque l'œil avance en même temps de *A* en *B*, avec la vîteſſe *AB*, il vient auſſi frapper le rayon, enſorte qu'il y a un double choc tout à la fois, celui de la lumière qui vient contre l'œil avec la vîteſſe *CB*, celui de l'œil qui va contre la lumière avec la vîteſſe *AB*. A la place de ce dernier choc, on peut imaginer

(sans rien changer à l'effet qui en résultera), que le corpuscule soit venu de *F* en *B*, frapper l'œil avec une vîtesse *FB*, égale à *AB*; ainsi l'œil reçoit une impression suivant *CB*, & une suivant *FB* : de ces deux impressions faites suivant les côtés *CB* & *FB* du parallélogramme *CF*, il en résulte une impression unique & composée, qui se fait sentir suivant la diagonale *DB*, donc l'on appercevra l'étoile dans la direction *BD*, & non dans la direction *BCE*.

2803. Enfin il y a une autre manière de démontrer encore la vérité de cette proposition ; & cette manière est celle de M. Bradley & de tous les auteurs qui en ont parlé d'après lui : elle ne paroît pas d'abord satisfaisante, comme M. Manfredi l'a remarqué ; mais nous allons tâcher de la rendre palpable. Supposons le corpuscule lumineux en *M* (*fig.* 234), lorsque l'œil étoit en *N*, & qu'ils arrivent ensemble en *O*; on sent que lorsque l'œil a passé en *G* le corpuscule de lumière étoit en *H*, en tirant *GH* parallèle à *MN*, car *OG* : *OH* : : *ON* : *OM*. Il en seroit de même de tous les autres points que la terre parcourt sur la ligne *NO*; l'on peut donc imaginer que *MN* soit un tube qui se meuve parallélement à lui-même, & parcoure toutes les situations *GH*, le corpuscule de lumière se trouvera par ce moyen n'avoir jamais quitté le tube *MN*, & par conséquent sera parvenu à l'œil en décrivant *PO*, ou suivant la direction *PO*; or nous voyons un objet dans la direction suivant laquelle le rayon vient à nous, donc l'étoile nous paroîtra sur une ligne *PO* parallèle à *MN*.

Troisième façon d'expliquer l'aberration.

Fig. 234.

2804. Un exemple familier fera peut-être encore mieux comprendre le mécanisme de ces impressions composées. Soit un vaisseau *GCFA* (*fig.* 236), qui va de droite à gauche ; que d'un angle *C* de ce vaisseau on ait jetté une pierre à l'autre angle *A*, & que dans le temps où elle a parcouru *CA*, le vaisseau ait avancé de la quantité *CD* ou *AB*; celui qui est dans le vaisseau en *A* se trouvera alors parvenu au point *B*, &

Comparaison familière.

Fig. 236.

fera frappé de la même manière que fi le vaiffeau n'avoit eu aucun mouvement; la pierre lui paroîtra venir de l'angle *D* fuivant *DB*, comme elle lui auroit paru venir de *C* fuivant *CA*, fi le vaiffeau eût été immobile; l'impreffion fera la même, puifque la relation du point *C* au point *A*, leur fituation, leur diftance ne dépendent en aucune façon du mouvement de ce vaiffeau; ce mouvement eft commun à la pierre & au vaiffeau; & il eft nul par rapport au choc. Néanmoins dans l'efpace abfolu cette pierre eft venue de *C* en *B*; ainfi elle a fait le même chemin réel qu'auroit fait une pierre qui du rivage *R*, eût été jettée directement en *B*. Voilà donc deux pierres, l'une qui vient du rivage *R*, & qui a parcouru la ligne *CB*, l'autre qui eft partie du point *C*, angle du vaiffeau, & qui a de même parcouru *CB*, à caufe du mouvement de ce vaiffeau: or celle-ci s'eft fait fentir fuivant la direction *DB*, donc celle qui auroit été jettée du rivage *R*, fe feroit fait fentir réellement auffi dans la direction *DB*, à celui qui étant à l'angle *A* du vaiffeau fe feroit trouvé tranfporté de *A* en *B*, tandis que la pierre venoit de *C* en *B*.

Quantité de l'aberration obfervée.

2805. Après avoir expliqué le mécanifme de l'impreffion compofée qui produit l'aberration; voyons quelle en eft exactement la quantité. En examinant les obfervations d'un grand nombres d'étoiles, M. Bradley a jugé que le *maximum* de l'aberration étoit de $20'' \frac{1}{4}$, par exemple, la plus grande variation de γ du Dragon en déclinaifon eft de 39″, d'où l'on conclut par le rapport des finus des latitudes (2823), que fi cette étoile étoit fituée exactement au pole de l'écliptique, elle décriroit un cercle dont le diamètre feroit 40″ 4; la 35[e]. étoile de la Giraffe a 19″ d'aberration; d'où M. Bradley conclut 40″ 2 pour la plus grande aberration; la dernière de la queue de la grande Ourfe η eft 36″ plus au fud vers le milieu de Janvier, qu'au mois de Juillet, ce qui donne 40″ 4; la Chèvre environ 16″ plus au nord en Février qu'en Août; ce qui fuppofe

40″; toutes les étoiles que M. Bradley a comparées donnent 40″ ou 41″, mais après le plus ample examen il a choisi 40″ (*Phil. transf. n°.* 485).

2806. La quantité de 20″ répond à 8′7″½, dans la table des mouvemens du soleil; ainsi l'on est assuré à moins de 5″ près, qu'il faut 8′7″ à la lumière du soleil pour arriver jusqu'à nous dans ses moyennes distances; d'où il suit que la vîtesse de la lumière est 10313 fois plus grande que la vîtesse moyenne de la terre; par-là l'on trouve la véritable quantité de l'équation de la lumière, dont on fait usage dans les tables des Satellites de Jupiter. C'est ainsi que les éclipses de ces Satellites ayant servi à découvrir l'aberration, celle-ci sert aujourd'hui à perfectionner leur théorie, en déterminant exactement la valeur d'une équation que l'on ne pouvoit pas espérer de connoître avec la même précision par le moyen de ces éclipses (2897). Vitesse de la lumière. Equation des Satellites.

2807. Avant que d'entrer dans l'explication détaillée des phénomènes de l'aberration, je dois avertir que le plan *ECBA* (*fig.* 233), qui joint la ligne *AB* décrite par la terre avec l'étoile *E*, s'appelle *plan d'aberration*, parce que c'est dans ce plan que l'aberration se fait; le lieu apparent de l'étoile, son lieu vrai, l'œil de l'observateur, & l'espace qu'il décrit en 8′ de temps se trouvent tous ensemble dans ce plan, ensorte que l'aberration ne peut faire paroître l'étoile dans un autre plan. On appelle aussi *triangle d'aberration* le triangle *CBA* formé par le chemin de la lumière avec celui de la terre, & dont le petit angle *C* mesure l'aberration. Voyons ce qui arrive quand le triangle d'aberration est rectangle ou obtus-angle. Plan d'aberration. *Fig.* 233. Triangle d'Aberration.

2808. On doit être convaincu par les démonstrations précédentes (2801), qu'une étoile nous paroît toujours plus avancée du côté où nous marchons, & cela de la quantité de l'angle *BCA*, (*fg.* 233); la valeur de cet angle dépend du rapport de la vîtesse *AB* de la terre, à la vîtesse *CB* de la lumière, ce rapport est celui de 1 à 10313 (2806); ce qui donne un an- *Fig.* 233.

gle de 20″ dans le cas où CB eſt perpendiculaire à AB; ainſi l'aberration ſera toujours de 20″ quand la route de l'œil ſera perpendiculaire au rayon de l'étoile : mais lorſque CB (*fig.* 237), eſt inclinée ſur la route AB de l'œil, alors l'angle ACB d'aberration devient moindre, & parce que CB eſt à AB, comme le ſinus de l'angle A eſt au ſinus de l'angle C, il ſuit que le ſinus de l'arc d'aberration, ou l'aberration même, eſt comme le ſinus de l'inclinaiſon du rayon CA ſur la route de l'œil, qui eſt toujours un petit arc de l'orbite terreſtre; c'eſt-à-dire, qu'il eſt égal à 20″ multipliées par le ſinus de l'angle que fait la route de l'œil, avec le rayon de lumière; enfin, ſi la ligne CA s'inclinoit juſqu'à ſe confondre avec la ligne ABD, l'angle C s'évanouiroit, & il n'y auroit plus d'aberration; ce qui d'ailleurs eſt évident, puiſqu'alors le rayon de lumière arriveroit toujours à nous ſous la même direction.

Fig. 237.

Aberration dans les routes obliques.

2809. Suppoſons maintenant que l'œil au lieu d'avancer de A en B, avance de B en A, enſorte que le rayon arrive en A en même temps que l'œil; ſi l'on décompoſe la vîteſſe CA (2801), ſuivant CE & CB on verra aiſément que la vîteſſe CE eſt détruite par la vîteſſe BA de la terre, & qu'il ne reſte que CB ou ſa parallèle EA; ainſi dans ce cas l'étoile paroîtra s'élever au-deſſus de la ligne que l'œil décrit, au lieu qu'elle paroiſſoit s'abaiſſer dans le cas précédent; elle paroîtra en E au lieu de paroître en C; toujours l'aberration porte une étoile du côté où va la terre. Quand la terre eſt au point G de ſon orbite GHD (*fig.* 232), & enſuite au point K, elle paroît aller en deux ſens oppoſés : dans le premier cas, l'étoile eſt en oppoſition, & paroît à gauche du lieu moyen E : dans le ſecond cas, la terre allant de D en K, l'étoile eſt en conjonction avec le ſoleil, & paroît de 20 ſecondes à droite, c'eſt-à-dire, à l'occident du point E ſur une ligne DS.

Fig. 232.

On n'a que la différence des aberrations.

2810. Ainſi cette aberration de 20″ eſt relative ſeulement à la grandeur de l'orbite que décrit la terre, c'eſt

c'eſt la ſeule dont cette orbite puiſſe nous faire appercevoir ; elle ſeroit plus grande ſi la terre décrivoit une plus grande orbite ; la lumière doit être plus de trois années à venir des étoiles juſqu'à nous, à raiſon de leur diſtance (2782); mais parce que cette durée eſt toujours la même à 8′ près, nous ne nous appercevons que de la variation que ces 8′ produiſent en plus ou en moins. Comme la terre fait 20″ pendant ces 8′, cette différence de 20″ qui eſt tantôt dans un ſens, tantôt dans l'autre, quelquefois nulle pour une même étoile, & qui affecte différemment les diverſes étoiles ſuivant leur ſituation, produit les inégalités que les aſtronomes ont obſervées, & que nous appellons l'*Aberration.*

2811. Cette même quantité de 20″, qui eſt l'aberration abſolue priſe dans la région de l'étoile, peut devenir beaucoup plus grande quand on la rapporte à l'écliptique ou à l'équateur; ainſi l'aberration de l'étoile polaire en aſcenſion droite, va juſqu'à 8′ 2″; il ſuffit, pour le comprendre, de recourir à l'art. 892.

2812. Nous n'avons eu égard dans tout ce qui précède qu'au mouvement annuel de la terre, & non point au mouvement diurne, parce qu'il eſt trop lent pour qu'il puiſſe avoir un effet ſenſible : en effet, la vîteſſe du mouvement diurne eſt à celle du mouvement annuel, comme $\frac{365,26}{22918}$ eſt à 1, c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe des temps, & en raiſon directe des diſtances; elle n'eſt donc que $\frac{1}{63}$ de la vîteſſe du mouvement annuel, ce qui feroit une aberration de deux tiers de ſeconde, dans l'eſpace de 12 heures. L'aberration diurne eſt nulle.

2813. L'effet de l'aberration ſur une étoile qui ſeroit ſituée au pole même de l'écliptique, eſt le plus ſimple de tous, & nous commencerons par celui-là, en faiſant voir que l'étoile paroîtroit décrire un cercle de 40″ de diamètre autour de ſon vrai lieu, c'eſt-à-dire, autour du pole de l'écliptique. Le cercle *ABCD* (*fig.* 235), repréſente l'écliptique ou l'orbite de la terre, Aberration d'une étoile ſituée au pole de l'écliptique. *Fig.* 235.

que l'on ſuppoſe circulaire, parce que la différence de ſes diamètres eſt ici négligeable ; *E* exprime le pole de cette orbite, il faut le concevoir élevé perpendiculairement au deſſus du plan de la figure ; autour du pole *P* l'on décrit un petit cercle, dont le diamètre eſt de 40″ (2805) ; lorſque la terre eſt en *A*, & va de *A* vers *B*, l'étoile ſituée au pole de l'écliptique, paroîtra 20″ plus avancée du même côté, c'eſt-à-dire, en *a* (2801) ; quand la terre ſera en *B*, l'étoile paroîtra en *b*, de-là en *c*, *d*, & elle aura parcouru, dans l'eſpace d'un an, le petit cercle *a b c d*, décrit autour du pole de l'écliptique, toujours plus avancée de 90° dans ſon petit cercle, que la terre ne l'eſt dans le ſien, & ayant toujours 20″ de moins en latitude qu'elle n'auroit dans ſon vrai lieu.

Aberration d'une étoile dans l'écliptique.

Fig. 232.

2814. Pour les étoiles qui ſont dans le plan même de l'écliptique, ſoit *GHK* (*fig.* 232), le plan de l'orbite de la terre, *E* une étoile ſituée dans le même plan, *S* le ſoleil, *G* le point où eſt la terre quand l'étoile eſt en oppoſition, *K* le point où eſt la terre quand l'étoile eſt en conjonction avec le ſoleil : dans l'oppoſition *G* la terre allant de *B* en *G*, ou d'occident vers l'orient, l'étoile paroîtra plus avancée de 20′ vers l'orient, c'eſt-à-dire, que ſa longitude ſera augmentée de 20″ ; mais dans la conjonction la terre allant dans un ſens contraire par rapport à l'étoile, c'eſt-à-dire, de *D* vers *K*, la longitude de l'étoile ſera diminuée de 20″. Dans les quadratures *Q* & *H* l'aberration ſera nulle, parce que le rayon *HI* qui ſe dirige à l'étoile, & qui eſt parallèle à *SE*, à cauſe de la grande diſtance des étoiles (2782), devenant la tangente de l'orbite ou de la route de l'œil, & ſe confondant avec elle en *H*, il n'y a plus d'aberration (2808).

2815. Quoique la terre aille toujours du même ſens, c'eſt-à-dire, toujours d'occident vers l'orient par rapport au ſoleil ; cependant par rapport à l'étoile *E* qui eſt au-delà du grand orbe, la terre allant de *B* en *G*, & ſix mois après de *D* en *K*, paroît avoir des di-

rections différentes, comme la figure le fait voir; ainsi l'étoile dans le premier cas paroîtra trop à gauche ou trop orientale, & dans le second cas trop à droite ou trop occidentale, par rapport au rayon *KSGE* mené au vrai lieu de l'étoile. *Fig. 231.*

Aberration soustractive.

De-là il suit que pour connoître quel est le lieu du soleil au temps où l'aberration d'une étoile en longitude est la plus grande, & soustractive de la longitude moyenne, il suffit de prendre la longitude même de l'étoile: par exemple, Sirius a $3^s\ 10^o$ de longitude, le soleil a la même longitude le 1er de Juillet, alors Sirius est en conjonction avec le soleil, la terre étant en *K*, & l'aberration fait paroître sa longitude trop petite, ensorte qu'il faut alors soustraire l'aberration de la longitude moyenne de l'étoile, pour avoir sa longitude apparente.

Argument de l'aberration en longitude.

2816. L'ARGUMENT ANNUEL de l'aberration, en général, est le chemin qu'a fait le soleil depuis que l'étoile paroissoit la moins avancée, ou la longitude du soleil au temps où l'aberration est la plus grande, & en même temps soustractive, dont on a ôté le lieu du soleil pour le jour donné. Si l'on prend la longitude même de l'étoile, on aura le lieu du soleil au temps où la longitude apparente de cette étoile est la plus petite qu'elle puisse être dans le cours de l'année, & l'on s'en sert pour avoir l'argument annuel de l'aberration en longitude.

Pour trouver l'aberration en longitude hors des conjonctions ou des oppositions, c'est-à-dire, dans les situations intermédiaires, soit *FL* le petit espace de 20″, parcouru en 8′ de temps par la terre, en un point de son orbite qui est éloigné du point *G* de l'opposition de la quantité *GL*: soit *MF* le chemin de la lumière pendant le même temps, *FML* l'angle d'aberration; le rayon *MF* de l'étoile étant parallèle à la ligne *EGK*, l'angle *MLF* ou l'angle *LFN* (car on peut prendre ici l'un pour l'autre, puisqu'ils ne diffèrent pas de 20″), ont pour mesure l'arc *FH* ou *LH*; ainsi l'angle d'aberration (2808) est égal à 20″ sin. *F*, ou 20″ sin. *LH*, ou 20″ cos. *LG*; donc l'*aberration en longitude est proportionnelle au sinus de la*

Fig. 232. *distance à la quadrature*, ou de la distance au point où elle est nulle, ou proportionnelle au *cosinus de l'argument* d'aberration; il faut l'ajouter à la longitude moyenne depuis la quadrature qui précède l'opposition, jusqu'à celle qui suit l'opposition, ou lorsque la longitude de l'étoile moins celle du soleil, qui est l'argument d'aberration en longitude, se trouve de 3, 4, 5, 6, 7, 8 signe ; il faut l ôter de la longitude moyenne si c'est du côté de la conjonction, c'est-à-dire, si l'argument est 9, 10, 11, 0, 1, 2 signes. En effet, tant que la terre va de *Q* en *G*, supposant qu'on compte les longitudes du point *Q*, la longitude du soleil est entre 6 & 9, & l'ôtant de celle de l'étoile *E* qui est de 3^s, la différence est entre 9 & 6, l'aberration est alors additive.

Dans quel cas elle est additive.

2817. Ce que nous avons démontré pour l'aberration en longitude d'une étoile située dans le plan de l'écliptique, a lieu pour une étoile située au-dessus ou au dessous de l'écliptique, à quelque latitude que ce soit. En effet, que l'on conçoive le point *M* du triangle d'aberration *MFL*, élevé au dessus du plan de la figure, & dirigé en haut vers une étoile, la base *LF* demeurant toujours dans le plan de notre figure; l'angle d'aberration *M* ne changera pas de grandeur; s'il a été de 10″ dans le temps que les lignes *LM*, *FM* étoient couchées dans le plan de la figure, il sera encore de 10″, & l'on pourra toujours dire que l'étoile paroît rapprochée de 10″ du plan qui passe sur *ECK*; ce plan que l'on concevra tiré perpendiculairement à l'écliptique, & passant par l'étoile *E*, est le cercle de latitude où paroît l'étoile, & qui marque sa longitude dans le ciel, & celle de la terre quand l'étoile est en opposition.

Lorsque l'étoile étoit dans le plan même de l'écliptique, l'aberration la faisoit paroître plus loin de la ligne *EGK*, qui étoit aussi dans le plan de l'écliptique; si l'étoile est plus relevée, l'aberration la rapprochera de quelque autre ligne plus élevée que *GK*, placée à la même hauteur que l'étoile, & dans le plan du même cercle de latitude qui passe sur *ECK*.

2818. L'aberration en longitude que nous venons de déterminer, eſt meſurée dans la région où ſe trouve l'étoile, parallèlement à l'écliptique, ſur un arc de grand cercle ; mais ſi on la rapporte à l'écliptique au moyen de deux cercles de latitude, tirés du pole de l'écliptique par le lieu apparent & par le lieu moyen de l'étoile, elle deviendra plus grande (892), & il faudra la diviſer par le coſinus de la latitude, pour avoir l'aberration en longitude dans l'écliptique même. Ainſi la plus grande aberration en longitude eſt égale à $\frac{20'}{\text{coſ. latit.}}$, & l'aberration pour un temps donné, $\frac{20'' \text{ coſ. argum.}}{\text{coſ. lat.}}$, c'eſt-à-dire, 20″ diviſées par le coſinus de la latitude de l'étoile, & multipliées par le coſinus de l'élongation trouvée pour ce même temps, ou de l'argument de l'aberration (2816) ; elle eſt ſouſtractive dans les trois premiers ſignes de l'argument, & dans les trois derniers. Aberration pour un temps donné.

2819. Il eſt aiſé de former une table de la plus grande aberration en longitude, telle qu'on la trouve dans le Recueil de tables que j'ai donné en 1759, (*p.* 183). Une étoile ſituée à 60° de latitude, a ſa plus grande aberration de 40″, parce que $\frac{20''}{\text{coſ. } 60^\circ} = 40''$, & l'aberration de *Sirius* qui a 39° 33′ de latitude, eſt 25″ 9. Quand on a la plus grande aberration, & qu'on veut avoir l'aberration actuelle pour un temps donné, il faut chercher le lieu du ſoleil pour ce même temps, en retrancher la longitude de l'étoile, ce qui donne l'argument de l'aberration en longitude (2816) ; & multiplier la plus grande aberration par le coſ. de l'argument. La longitude de Sirius en 1750 étoit 3^s 10° 38′, je ſuppoſe qu'on veuille avoir ſon aberration en longitude le 1er. Mai 1750 à midi, on calculera la longitude du ſoleil pour ce jour-là, ou bien on la prendra dans une Ephéméride ; je la ſuppoſe 1^s 10° 55′, on la retranchera de celle de Sirius ; la différence 59° 43′ eſt l'argument annuel de l'aberration en longitude, dont le coſinus multiplié par 25″9, donnera 13″ 1, aberration de Sirius en longitude le 1er. Mai 1750 ; elle eſt ſouſtractive, parce que

c'eſt dans le premier quart de l'argument, ou du côté de la conjonction (2816).

De l'aberration en latitude.

1820. J'ai conſidéré juſqu'ici l'effet de l'aberration parallélement à l'écliptique ; il eſt temps de voir ce qui en réſulte du haut en bas, ou du nord au ſud, c'eſt-à-dire, perpendiculairement à l'écliptique. Lorſque la terre eſt ſituée vers le point *A* de ſon orbite (*fig.* 235), à égale diſtance des ſyzygies *B* & *D*, la portion *AM* de ſon orbite, qu'elle décrit alors, eſt parallèle à la ligne des ſyzygies *BD* ; ainſi l'effet de l'aberration ne peut point rapprocher l'étoile de cette ligne, & par conſéquent ne peut changer ſa longitude. Le parallélogramme d'aberration *CSAM*, eſt parallèle au plan du cercle de latitude élevé perpendiculairement ſur *B* & *D* ; concevons le plan de ce parallélogramme relevé perpendiculairement ſur le plan de la figure, au lieu d'être couché ſur le côté, comme on eſt obligé de l'exprimer dans la figure ; ſoit *S* l'étoile qu'il faut concevoir perpendiculairement au-deſſus du point *N*, enſorte que ſa latitude ſoit égale à l'angle *SAN*, l'étoile au lieu de paroître ſur le rayon *MS* paroîtra ſur le rayon *AS* ou *MC* ; & l'aberration *ASM* ou *CMS*, ſera meſurée par $MF = AM$ ſin. *MAF* (2808), c'eſt-à-dire, 20″ ſin. latit. C'eſt ainſi que l'on a conſtruit la table de la plus grande aberration en latitude, (*Tab. aſtron.* 1759, *pag.* 183).

Fig. 235.

La plus grande aberration en latitude.

Dans le cas où la terre étant en *A* l'étoile paroît en quadrature, tout l'effet de l'aberration ſe porte de haut en bas, c'eſt-à-dire, que l'aberration eſt toute en latitude, & ſi la terre ſe rapproche de l'étoile, en allant de *A* en *M* l'étoile eſt auſſi rapprochée de l'écliptique, ou du plan dans lequel ſe meut la terre ; car alors la latitude apparente ou l'angle *CMN* eſt moindre que l'angle *SMN*, latitude moyenne qui auroit lieu ſans l'aberration. Si la terre s'éloignoit de l'étoile en allant de *M* en *A*, le contraire arriveroit & l'étoile paroîtroit éloignée de l'écliptique par l'effet de l'aberration. C'eſt ce qui arrive dans la ſeconde quadrature, après l'oppoſition, lorſque la terre eſt en *C*,

2821. Telle eſt l'aberration en latitude au temps des quadratures, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle eſt la plus grande; cette aberration en latitude eſt nulle dans la conjonction & dans l'oppoſition; car alors le chemin *BG* de la terre, (*fig.* 232) eſt perpendiculaire au rayon *CG* de l'étoile, le triangle d'aberration *CEG* s'étend de droite à gauche, c'eſt à-dire, en longitude, quoique ſon ſommet *C* ſoit élévé au-deſſus du plan de l'écliptique, & ne peut rien changer à la poſition de l'étoile du haut en bas, c'eſt-à-dire, en latitude; la terre ne ſe rapproche point alors du rayon *CB* de l'étoile, du moins dans la direction du cercle de latitude; enſorte qu'il n'y a point d'aberration en latitude, car celle-ci vient de la quantité dont la terre ſe rapproche du rayon de l'étoile, le long du cercle de latitude; comme l'aberration en longitude vient de la quantité dont la terre ſe rapproche du rayon de l'étoile dans le ſens de l'écliptique. *Fig.* 232.

2822. Pour trouver l'aberration en latitude dans les poſitions de la terre intermédiaires entre l'oppoſition & la quadrature, il ne faut qu'examiner de combien la terre ſe rapproche du rayon de l'étoile, ou la quantité *FN* qui prend la place de *QR*; lorſqu'elle s'avanouit, ce qui arrive en *G*, l'aberration en latitude s'évanouit avec elle, comme nous venons de l'expliquer.

On comprendra mieux pourquoi l'aberration en latitude dépend de la quantité *FN* à l'aide des réflexions ſuivantes. Le triangle d'aberration qui a pour baſe *RQ* lorſque la terre eſt en *R*, & *BG* lorſque la terre eſt en *G*, n'étant point ſitué dans l'écliptique, a une partie de ſon effet de droite à gauche, qui eſt meſurée par *LN*, & une partie de haut en bas qui eſt meſurée par *NF*; en effet, ſuppoſons que la terre au lieu d'aller directement de *F* en *L*, eût été de *F* en *N*, & de *N* en *L*, elle n'auroit éprouvé aucune aberration en latitude en allant de *N* en *L*, puiſque le triangle d'aberration ayant alors pour baſe la ligne *NL*, tous ſes points ont la même latitude, & font le même angle avec le plan de l'écliptique; mais en allant de *F* en *N*,

Fig. 232. toute l'aberration eſt en latitude, comme quand la terre alloit de *A* en *M* dans la *fig.* 235, & directement à l'étoile; ainſi *FN* eſt la meſure de l'aberration en latitude; c'eſt la même choſe, quant à l'aberration que la terre ait décrit *FNL*, ou *FL* ſeulement; on voit aſſez par tout ce qui précède que *NL* ne produit d'aberration en longitude qu'à raiſon de ce que le point *L*, eſt plus loin de la ligne des ſyzygies *EGK* que le point *F*; par la même raiſon la ligne *FN* ne produit d'aberration en latitude, que parce que le point *F* eſt plus éloigné de la ligne des quadratures *HS*, que le point *L*; donc les mêmes aberrations auroient eu lieu quand même la terre auroit décrit ſéparément & ſucceſſivement les lignes *FN* & *NL*.

2823. La ligne *FN* eſt donc la meſure de l'aberration en latitude, & comme elle eſt plus petite que *FL* qui donnoit la plus grande aberration, on aura auſſi une aberration plus petite que 20″; le petit triangle *FNL* eſt ſemblable au triangle *SLV* (3307), & les côtés homologues ſont proportionnels, donc *SL* : *VL* :: *LF* : *FN*, c'eſt-à-dire, que le rayon eſt au ſinus de la diſtance à l'oppoſition, comme la plus grande aberration en latitude eſt à l'aberration actuelle en latitude; la terre décrivant *FN*.

Quantité de l'aberration en latitude. *Donc pour avoir l'aberration en latitude à un jour donné, il faut multiplier la plus grande aberration, ou* 20″ *ſin. lat. par le ſin. de l'élongation de l'étoile*; la latitude en ſera diminuée avant l'oppoſition, ou vers la premiere quadrature & augmentée après l'oppoſition, ſoit dans les étoiles boréales, ſoit dans celles dont la latitude eſt auſtrale.

2824. Pour trouver l'argument d'aberration en latitude, on prendra la longitude du ſoleil au temps où l'aberration en latitude eſt la plus grande, & en même temps ſouſtractive, ainſi que nous l'avons fait pour l'aberration en longitude (2816); il ſuffira d'ajouter trois ſignes à la longitude de l'étoile, car dans la première quadrature la terre étant en *Q*, le ſoleil eſt évidemment plus

plus avancé de trois ſignes que le lieu de l'étoile. Ainſi de la longitude de l'étoile augmentée de trois ſignes, on ôtera la longitude du ſoleil à un temps donné, & l'on aura la diſtance de la terre au point Q, ou l'argument de l'aberration en latitude, dont le coſinus multiplié par la plus grande aberration, donnera l'aberration en latitude; car le coſinus de la diſtance de la terre au point Q, eſt la même choſe que le ſin. de ſa diſtance au point G, ou de l'élongation de l'étoile. Cette aberration ſera ſouſtractive de la latitude moyenne dans les ſignes 0, 1, 2, 9, 10, 11; mais elle ſera additive dans le ſecond & le troiſième quart de l'argument. Dans quel cas elle eſt additive.

2825. Par le moyen des expreſſions de l'aberration en longitude (2818), & en latitude (2823), il eſt aiſé de démontrer que les étoiles par l'effet de l'aberration paroiſſent décrire des ellipſes, qui ſont plus ou moins ouvertes, ſuivant que les étoiles ſont plus ou moins éloignées de l'écliptique, ainſi que par l'effet de la parallaxe (2767).

Soit E (*fig.* 238) le lieu moyen de l'étoile, celui où elle paroîtroit ſans les inégalités de l'aberration; la ligne LEK parallèle à l'écliptique, & ſuppoſée de 40″, l'étoile ſera en K la plus occidentale qu'elle puiſſe être, ayant la moindre longitude poſſible, au temps de ſa conjonction au ſoleil (2814); elle ſera en L, la plus orientale, & ayant ſa plus grande longitude, au temps de l'oppoſition. L'aberration en longitude ſera nulle, & l'étoile répondra au point E dans le temps des quadratures; ſi l'on décrit un demi-cercle LCK, & qu'on prenne l'arc CD égal à la diſtance de l'étoile à ſa quadrature, ou LD égal à ſon élongation; en abaiſſant DV, l'on ſera sûr que EV eſt l'aberration en longitude; car $EV = EL$ ſin. $CD = 20''$ coſ. élong. & ſi on la rapporte à l'écliptique on aura (892) $\frac{20'' \text{coſ. élong.}}{\text{coſ. lat.}}$; c'eſt la valeur de l'aberration en longitude (2818). *Fig.* 238.

Ayant pris de même ſur le cercle de latitude une

Fig. 238. quantité *EA*, égale à la plus grande aberration en latitude au temps des quadratures, on décrira le cercle *ABF*, & ayant pris l'arc *AT* égal à l'élongation ou à la diſtance de l'étoile à la ligne des ſyzygies, on tirera *PTS* qui rencontrera *VS* au point *S*; alors *RT* ou *SV* ſera l'aberration en latitude; car $TR = EA$ ſin. élong. = 20″ ſin. latit. ſin. élong. ce qui eſt l'expreſſion de l'aberration en latitude (2823). L'étoile paroîtra donc en *S*; or le point *S* appartient évidemment à une ellipſe, car *EV* eſt le ſinus de l'arc *CD* dans le grand cercle, & *VS* eſt le coſinus du même arc dans le petit cercle, ce qui détermine une ellipſe (3264).

Les étoiles paroiſſent décrire une ellipſe.

2826. Ainſi chaque étoile par l'effet de l'aberration décrit une ellipſe *ALFK*, dont le grand axe eſt parallèle à l'écliptique, & a 40″ de longueur. Le point *L* qui eſt le plus à gauche ou à l'occident eſt le lieu où paroît l'étoile lorſqu'elle eſt en oppoſition (2814); le point *K* eſt celui de la conjonction, le point *A* ſi c'eſt une étoile auſtrale, ou le point *F* ſi c'eſt une étoile boréale, c'eſt-à-dire, le point de l'ellipſe qui eſt le plus près de l'écliptique, marque le lieu apparent de l'étoile trois mois après la conjonction. L'aberration en longitude étant toujours le coſinus de l'élongation de l'étoile dans le cercle *KCDLH*, ſi l'on marque en *K* le lieu du ſoleil qui eſt égal à la longitude de l'étoile, & qu'on diviſe le cercle en 360°, les perpendiculaires abaiſſées de chaque degré de longitude ſur le grand axe *LEK*, marqueront ſur l'ellipſe tous les points où l'étoile doit paroître aux mêmes temps; je ſuppoſe que cette ellipſe ſoit celle que paroît décrire *Arcturus*, dont la longitude eſt de $6^s\ 21^\circ$; on marquera en *K*, $6^s\ 21^\circ$, c'eſt le lieu du ſoleil au temps où Arcturus paroît en *K* le 13 Octobre; le cercle *KDLH* étant diviſé en 360°, on marquera les longitudes du ſoleil de *K* en *H*, *L*, *D*, le point *D* tombera ſur $1^s\ 26^\circ$ de longitude; abaiſſant donc la perpendiculaire *DSV*, elle marquera en *S* le lieu apparent de l'étoile ſur ſon ellipſe lorſque le ſoleil a $1^s\ 26^\circ$ de longitude,

c'eſt-à-dire, le 16 Mai : cela eſt évident par la conſtruction précédente. L'on peut donc auſſi diviſer le cercle *LDCKH* en 365 jours, en partant du point *K* ou ſera le jour de la conjonction, & abaiſſant une perpendiculaire *DV* du jour marqué en *D* ſur le grand axe, elle déterminera le lieu *S* où doit paroître l'étoile au jour donné; c'eſt ainſi que j'ai marqué dans la *fig.* 230, les ſituations d'Arcturus & de Sirius ſur leurs ellipſes d'aberration; Arcturus eſt à l'extrémité occidentale du grand axe de ſon ellipſe à droite, le 13 Oct. jour de ſa conjonction; il eſt à l'extrémité inférieure ou méridionale du petit axe, le 11 Janvier jour de la première quadrature; au contraire Sirius eſt à l'extrémité ſupérieure ou boréale du petit axe de ſon ellipſe, le 3 Octobre, jour de ſa première quadrature; parce que les étoiles paroiſſent toujours le plus près de l'écliptique trois mois après la conjonction, les étoiles boréales ſont alors au midi, & les étoiles auſtrales ſont au nord. L'ellipſe d'Arcturus eſt inclinée par rapport à la ligne horizontale *AB*, que je ſuppoſe parallèle à l'équateur, de la quantité de l'angle de poſition (1046). Les mois que j'ai marqués au-dedans de l'ellipſe ſont pour l'effet de la parallaxe (2768), qui faiſoit paroître l'étoile au même point de l'ellipſe trois mois plutôt que ne fait l'aberration.

Diviſer l'ellipſe en jours.

Fig. 230.

Ellipſe de Sirius & d'Arcturus.

2827. Le P. Boſcovich, dans ſa diſſertation, *de annuis fixarum aberrationibus*, imprimée à Rome en 1742, chez Komarek, à l'occaſion des exercices du college Romain, fait voir qu'une parallaxe combinée avec l'aberration produiroit encore une ellipſe, de même ellipticité, pour la trace apparente des étoiles; avec cette différence que le lieu de l'étoile ſeroit éloigné du lieu où elle paroît en vertu de l'aberration toute ſeule, vers l'endroit où la feroit paroître la parallaxe, d'un arc dont la tangente eſt au rayon comme la parallaxe eſt à l'aberration.

2828. L'aberration en longitude *EV* (*fig.* 238), que nous venons de déterminer ſur le parallèle de l'é- *Fig.* 238.

Fig. 238. toile en supposant EL de 20″, doit être réduite à l'écliptique pour les usages astronomiques, c'est-à-dire, qu'il faut la diviser par le cosinus de la latitude de l'étoile (892), de-là vient que l'aberration en longitude qui est toujours de 20″ de grand cercle, si on la prend sur le parallèle d'une étoile, devient très-grande pour les étoiles voisines du pole de l'écliptique, si on la mesure sur l'écliptique.

2829. L'ellipse d'aberration devient d'autant plus ouverte que les étoiles s'éloignent plus de l'écliptique; elle forme un cercle de 40″ de diamètre pour une étoile située au pole même de l'écliptique, ensuite le demi petit axe diminue comme le sinus de la latitude; enfin cette ellipse devient infiniment étroite & se réduit à la ligne droite KLL pour les étoiles situées exactement dans l'écliptique. Mais dans le cas de la ligne droite on assigneroit également le lieu apparent de l'étoile sur cette ligne, en divisant le cercle $KCDL$ en 365 jours; & abaissant de chaque jour des perpendiculaires DV, sur le grand axe; ces perpendiculaires marqueroient sur la ligne droite LEK, la situation apparente de l'étoile pour chaque jour de l'année, & ses distances au point E du milieu seroient toujours les cosinus de l'élongation de l'étoile.

Auteurs qui ont parlé de l'aberration. 2830. Au moyen de l'ellipse d'aberration, l'on peut trouver l'aberration en déclinaison & en ascension droite, comme l'ont fait M. Clairaut (*Mém. acad.* 1737), M. Euler, dans les Mémoires de Berlin, M. Simpson (*Essays on several subjects*, 1740); on peut voir encore le *Traité sur l'aberration* par M. Fontaine des Crutes, *in*-8°. 1744, & M. de la Caille, dans ses leçons d'astronomie. Je vais en donner aussi le détail, parce que les astronomes font un usage perpétuel des aberrations en ascension droite, & en déclinaison; M. de la Caille en a donné des tables (*Astron. fundam.* 1757), qui se trouvent aussi dans le recueil de tables que je donnai en 1759 (*Tables astronomiques de M. Halley pour les planètes & les comètes augmentées, &c. in*-8°. *chez*

Nyon, Libraire, Quai des Auguſtins, à l'Occaſion.

2831. La première choſe que nous avons à faire eſt de connoître le temps de l'année auquel l'aberration en déclinaiſon eſt nulle, ou le lieu du ſoleil qui répond à ce temps. Soit *E* le lieu moyen d'une étoile (*fig.* 239); *PEG* le cercle de latitude qui paſſe par l'étoile *E*, *REe* le cercle de déclinaiſon, *PER* l'angle de poſition (1046), *ANGML* l'ellipſe que l'étoile paroît décrire chaque année par l'effet de l'aberration, & dont le grand axe *LK* eſt néceſſairement perpendiculaire à *PEG* (2826); ayant tiré *MN* perpendiculaire au cercle de déclinaiſon *REe*, l'on voit que lorſque l'étoile ſera en *M* & en *N*, l'aberration en déclinaiſon ſera nulle; ſuppoſons autour de l'ellipſe d'aberration un cercle circonſcrit *LFYK* diviſé en ſignes & en degrés, marquons au point *K* la longitude même de l'étoile, puiſque l'étoile eſt au point *K* de ſon ellipſe, quand la longitude du ſoleil eſt égale à celle de l'étoile; les points *B* & *Y* du cercle circonſcrit déterminés par les ordonnées *BC*, & *YW* repréſenteront les lieux du ſoleil au temps où l'étoile paroît en *M* & en *N* (2826). Pour connoître la ſituation du point *Y*, ou l'angle *YEW*, on obſervera que par la propriété de l'ellipſe *WN* eſt à *WY*, comme le petit axe de l'ellipſe eſt au grand (3256), ou comme le ſinus de la latitude de l'étoile eſt au rayon (2820); mais auſſi *WN* eſt à *WY* comme la tangente de *WEN*, eſt à la tangente *WEY*; donc *WEN* étant égale à *PER* ou à l'angle de poſition; *le ſinus de la latitude de l'étoile eſt au rayon comme la tangente de l'angle de poſition, eſt à la tangente d'un angle*; qui eſt la diſtance entre le lieu du ſoleil au temps de la conjonction, c'eſt-à-dire, le lieu même de l'étoile qu'on ſuppoſe marqué en *K*, & le lieu du ſoleil quand l'aberration en déclinaiſon eſt nulle.

Aberration en déclinaiſon.
Fig. 239.

2832. Il faut trouver auſſi le lieu du ſoleil, lorſque l'aberration en déclinaiſon eſt la plus grande; ſuppoſons à l'ellipſe *LQA* une tangente *QI* parallèle à *MN*; le point de contact *Q* marque le point où l'aberration en déclinaiſon *QH* ou *IE* eſt la plus grande; *EQ* ſe trouve par cette conſtruc-

tion être un diamètre conjugué au diamètre EM, puisque la tangente QI est parallèle à MN. Ayant tiré l'ordonnée DQF au cercle, le point F est le lieu du soleil au temps où l'aberration en déclinaison est la plus grande ; si l'on tire le rayon EF du cercle, l'angle FEB sera un angle droit (3261), ce qui prouve que le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison, ou le point F, est éloigné de 3 signes du lieu du soleil B ou Y au temps où l'aberration en déclinaison est nulle (2831). Je donnerai ci-après une autre méthode pour trouver la même chose (2836).

Fig. 239.

Lieu de la plus grande aberration en déclinaison.

2833. Pour trouver la valeur de la plus grande aberration en déclinaison QH, par rapport à la plus grande aberration absolue EL qui est de 20″, on observera que EQ, EM étant des diamètres conjugués, on a par la propriété de l'ellipse $QH \times EM = EG \times EL$ (3262) ; $\frac{QH}{EL} = \frac{EG}{EM} = \frac{EG.BE}{EM.BE} = \frac{CM.BE}{EM.BC}$ (en mettant $\frac{CM}{BC}$ à la place de $\frac{EG}{BE}$) ; mais $\frac{CM.BE}{EM.BC}$ est égal à $\frac{CM}{EM}$ divisé par $\frac{BC}{BE}$, c'est-à-dire, au sin. de l'angle MEC, divisé par le sinus de l'angle BEC ; donc $QH : EL :: \text{sin.}\, MEC : \text{sin.}\, BEC$, & sin. BEC ou cos. FEL : sin. MEC ou $PER :: EL$ ou $20'' : QH$; donc le cosinus de l'élongation de l'étoile au temps de la plus grande aberration en déclinaison est au sinus de l'angle de position, comme 20″ sont à la plus grande aberration en déclinaison. On en verra ci-après une autre expression (2841).

La plus grande aberration.

2834. L'aberration en déclinaison en tout autre temps de l'année, est comme le sinus de la distance du soleil aux points B ou Y dans lesquels elle étoit nulle. Soit S, le lieu apparent de l'étoile pour un temps donné, X le lieu du soleil qui y répond, ST l'aberration en déclinaison ; que l'on mène une ordonnée SV au diamètre EN, ST sera toujours à SV en raison constante, puisque toutes les ordonnées telles que SV font le même angle avec le diamètre EN, & avec les lignes telles que ST, qui lui sont perpendiculaires. De plus la ligne SV ordonnée au diamètre NEM de l'ellipse

a un rapport conſtant avec XZ, perpendiculaire à EY, & ſinus de l'arc XY; en effet on n'a qu'à conſidérer l'ellipſe ANK, comme projection du cercle circonſcrit (3257) en concevant que ce cercle eſt relevé, & tourne autour de l'axe LK, ſuffiſamment pour que le point Y réponde perpendiculairement en N, le diamètre EN de l'ellipſe ſera la projection du rayon EY du cercle; le diamètre EQ ſera la projection de EF; toute ligne parallèle à EF, telle que XZ aura ſa projection SV parallèle à EQ, car deux lignes parallèles projettées perpendiculairement ſur un plan ne peuvent former que des projections parallèles [a], donc SV projection de XZ a un rapport conſtant avec XZ; mais SV a auſſi un rapport conſtant avec ST; donc XZ aura auſſi un rapport conſtant avec ST; or la ligne XZ eſt le ſinus de l'arc XY, diſtance entre le lieu Y du ſoleil lorſque l'aberration étoit nulle, & le lieu actuel X du ſoleil, & l'aberr. en déclin. eſt ST.

2835. Ainſi connoiſſant le lieu du ſoleil au temps de la plus grande aberration en déclinaiſon (2832), & ôtant le lieu actuel du ſoleil, on aura l'argument annuel d'aberration (2816), dont le coſinus multiplié par la plus grande aberration, donne l'aberration actuelle en déclinaiſon.

2836. Il nous reſte à donner des règles générales pour l'aberration en déclinaiſon, qui diſpenſent les calculateurs d'examiner la ſituation reſpective des cercles dont nous avons fait uſage, & qu'on puiſſe appliquer facilement dans tous les cas. Soit P le pole du monde (*fig.* 240); O le pole de l'écliptique, EQ l'équateur, EC l'écliptique, S une étoile, $PSAM$ le cercle de déclinaiſon, OSL le cercle de latitude; le point L ayant la même longitude que l'étoile, marque le lieu du ſoleil au temps où l'aberration en latitude eſt nulle; ayant tiré le cercle STR perpendiculaire au cercle de déclinai- *Pl. XXXII. Fig.* 240.

[a] On peut prouver encore autrement que SV eſt la projection de XZ, en achevant de tirer les ordonnées XZO & SVs, l'une au cercle, l'autre à l'ellipſe; on voit alors d'une manière évidente que le point X a ſa projection en S le point O en s, & que SVs eſt la projection de XZO.

Fig. 240. ſon *PSA*, le point *T* marquera le lieu du ſoleil lorſque l'aberration en déclinaiſon eſt nulle, puiſque dans le triangle ſphérique *STL* on a ſin. *SL* : *R* :: cot. *TSL* : cot. *TL* (3667), ce qui revient à la proportion de l'article 2831.

2837. Connoiſſant le point *A* de l'équateur qui marque l'aſcenſion droite de l'étoile *S*, on trouvera facilement le point *M* de l'écliptique (898) & ſa déclinaiſon *AM*. On prendra la ſomme de *AM* & de la déclinaiſon *AS* de l'étoile, ſi elles ſont de différentes dénominations, ou leur différence, ſi elles ſont toutes deux auſtrales ou boréales, on aura l'arc *SM*; dans le triangle *EAM* rectangle en *A*, ſin. $M = \frac{\text{coſ. } E}{\text{coſ. } AM}$ (3669); de même dans le triangle *STM* rectangle en *S*, on a coſ. $T =$ ſin. *M* coſ. *SM*; donc coſ. $T = \frac{\text{coſ. } SM.\ \text{coſ. } E}{\text{coſ. } AM.}$; ainſi pour avoir l'angle *STM*, on fera cette proportion; le coſinus de la déclinaiſon *AM* du point de l'équateur, eſt au coſinus de l'obliquité de l'écliptique 23° 28′, comme le coſinus de l'arc *SM* eſt au coſinus de l'angle *STM*, ou de ſon ſupplément *ETR*; nous l'appellerons *Y*; on connoît l'angle *R* qui a pour meſure la déclinaiſon *AS* de l'étoile, car le point *R* eſt le pole de l'arc *SA* (3656), on connoît auſſi le côté *RE* qui eſt le complément de l'aſcenſion droite *EA* de l'étoile; on fera donc cette proportion, ſin. *ETR* : ſin. *ER* :: ſin. *R* : ſin. *ET*; nous appellerons *Z* cet arc *ET*, qui dans certains cas eſt la longitude même cherchée.

2838. Cette proportion revient à celle-ci, le ſinus de l'arc *Y* eſt au coſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile, comme le ſinus de la déclinaiſon de l'étoile eſt au ſinus de l'arc Z. Cet arc eſt toujours moindre que 90°, tant que l'étoile eſt en dedans des tropiques, & lorſque l'aſcenſion droite d'une étoile $\left\{\begin{array}{c}\text{boréale}\\\text{auſtrale}\end{array}\right\}$ eſt entre $\left\{\begin{array}{c}180° \text{ \& } 360°\\0° \text{ \& } 180°\end{array}\right\}$. Dans les autres cas on fait cette proportion; le rayon eſt à la tangente de 23° 28′, comme la

la cotang. de la déclin. de l'étoile eſt au ſinus d'un arc *A* ; l'arc *Z* ſera de plus de 90° lorſque l'aſcenſion droite de l'étoile $\left\{\begin{array}{l}\text{boréale}\\ \text{auſtrale}\end{array}\right\}$ ſera entre $\left\{\begin{array}{c}0^\circ + A \;\&\; 180^\circ - A\\ 180^\circ + A \;\&\; 360^\circ - A\end{array}\right\}$. L'arc *Z* $\left\{\begin{array}{l}\text{s'ajoute à } 0^s\\ \text{s'ôte de } 6^s\end{array}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{array}{l}\text{boréales}\\ \text{auſtrales}\end{array}\right\}$, lorſque leur aſcenſion droite eſt dans le premier ou dans le dernier quart de l'équateur, & il $\left\{\begin{array}{l}\text{s'ôte de } 12^s\\ \text{s'ajoute à } 6^s\end{array}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{array}{l}\text{boréales}\\ \text{auſtrales}\end{array}\right\}$, lorſque l'aſcenſion droite eſt dans le ſecond & le troiſième quart de l'équateur ; c'eſt ainſi qu'on a le lieu du ſoleil au temps de la plus grande aberration en déclinaiſon.

2839. Pour comprendre la raiſon de cette dernière opération que je n'avois point démontrée dans la première édition de ce livre, non plus que M. de la Caille, dans ſes leçons d'aſtronomie, on imaginera un arc *TX* abaiſſé perpendiculairement du point *T* ſur l'équateur *ER*; dans le triangle ſphérique *ETR* coupé par une perpendiculaire *TX*, on a (3693) cot. *E* : ſin. *EX* : : cot. *R* : ſin. *XR* ; & parce que l'angle *R* eſt égal à la déclinaiſon de l'étoile, on aura pour le cas où *EX* ſeroit de 90°, la proportion ſuivante *R* : tang. *E* : : cot. déclin. : ſin. *XR*, ou *R* : tang. $23^\circ\frac{1}{2}$: : cotang. déclin. : ſin. *A*. Ayant trouvé la valeur de *A* ou de l'arc *XR* pour le cas où *EX* eſt de 90°, on obſervera que dans ce cas l'arc *ET* que l'on cherche eſt auſſi de 90° ; on a encore $RA = 90^\circ$, donc $EA = XR$, c'eſt-à-dire, qu'alors l'aſcenſion droite de l'étoile eſt égale au ſegment *XR* ou à la valeur de *A*. En conſidérant ſur un globe la ſituation de ces arcs dans différens cas, on verra bien que l'arc *Z* ou *ET* eſt obtus ſi l'aſcenſion droite d'une étoile boréale ſurpaſſe *XR* qui eſt la valeur de *A*, & qu'elle ſoit plus petite que le ſupplément de *XR* ; c'eſt-à-dire, que $180^\circ - A$. La même choſe a lieu ſi l'aſcenſion droite d'une étoile auſtrale eſt entre $180^\circ + A$, & $360^\circ - A$; on ſait par-là ſi l'arc *Z* ou *ET* doit être aigu

ou obtus, c'est-à-dire, s'il faut employer l'arc trouvé par la seconde analogie, ou si c'est son supplément à 180° qui est la vraie valeur de *LT*. On appercevra aussi par l'inspection du globe, que cet arc *ET* ou la valeur de *Z*, trouvée par les préceptes précédens, n'est bonne que pour les étoiles boréales, dont les ascensions droites sont dans le premier & le dernier quart de l'équateur, mais qu'il faut prendre le supplément à 12 signes, dans les deux autres quarts; à l'égard des étoiles dont la déclinaison est australe, il faut prendre le supplément de la valeur de *Z*, dans le premier & le dernier quart, & ajouter 6^s dans les deux autres, pour avoir le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration.

2840. Exemple. On demande le point de la plus grande aberration en déclinaison pour une étoile qui auroit 60° d'ascension droite, & 66° de déclinaison boréale; la longitude du point de l'écliptique répondant à 60° d'ascension droite, est $2^s\ 2°\ 6'$; & la déclinaison du même point, est 20° 37′ boréale; la différence entre 66°, & 20° 37′, est 45° 23′, (c'est l'arc *SM* que M. de la Caille appelle *X*). Je fais ensuite cette proportion : le cosinus de la déclinaison du point de l'écliptique 20° 37′, est au cosinus de l'obliquité de l'écliptique 23° 28′, comme le cosinus de la différence trouvée est au cosinus d'un arc que l'on appelle *Y*, & qui se trouve de 46° 30′. Je dis ensuite : le sinus de ce même arc *Y*, ou 46° 30′, est au cosinus de l'ascension droite de l'étoile 60°, comme le sinus de la déclinaison de l'étoile 66° 0′, est au sinus de 39° 2′; c'est l'arc *Z* de l'écliptique. Il ne reste plus qu'à savoir s'il ne faudra point employer le complément ou le supplément de cet arc trouvé; si cette étoile qui a une déclinaison boréale étoit dans le dernier quart d'ascension droite, il n'y auroit rien à changer au nombre trouvé, ce seroit la longitude cherchée; mais puisqu'elle n'est pas dans le dernier quart, & qu'au contraire elle est dans un des cas qui demande une vérification, on fera cette proportion : le rayon est à la tangente de 23° 28′, comme

la cotangente de la déclinaiſon de l'étoile $66^\circ\ 0'$, eſt au ſinus d'un arc $A = 11^\circ\ 9'$. Puiſque l'aſcenſion droite de l'étoile propoſée eſt entre $11^\circ\ 9'$, & $168^\circ\ 51'$, c'eſt-à-dire, entre A & $180^\circ - A$, il faut prendre le ſupplément de l'arc Z trouvé de $39^\circ\ 2'$, & nous aurons $4^s\ 20^\circ\ 58'$, longitude du ſoleil au temps où l'aberration en déclinaiſon eſt la plus grande en moins ou ſouſtractive, pour cette étoile.

2841. La plus grande aberration en déclinaiſon qui arrive lorſque le ſoleil eſt au point T, eſt $\frac{20''\ \text{ſin.}\ MSL}{\text{coſ.}\ LT}$; (2833); mais à cauſe du triangle SLT rect. en L, on a coſ. TSL ou ſin. MSL = ſin. LTS. coſ. LT (3669); donc enfin la plus grande aberration devient $= 20''$ ſin. LTS, ou $20''$ ſin. Y; c'eſt par-là que M. l'Abbé de la Caille a conſtruit une table, où l'on trouve la plus grande aberration en déclinaiſon pour toutes les poſitions des étoiles. J'ai donné cette table dans mon *Recueil*, 1759, *pag.* 195.

La plus grande aberration en déclinaiſon.

2842. Pour trouver le lieu du ſoleil au temps de la plus grande aberration en aſcenſion droite, & la quantité de cette plus grande aberration; je commencerai d'abord par la conſidération des diamètres de l'ellipſe, & je me ſervirai enſuite des cercles de la ſphère. Soit OHE (*fig.* 241), le cercle de latitude qui paſſe par le lieu moyen E de l'étoile, AEB le cercle de déclinaiſon, LK le grand axe de l'ellipſe d'aberration qui eſt toujours parallèle à l'écliptique, A & B ſeront les points où l'aberration en aſcenſion droite eſt nulle; ſuppoſant toujours que le cercle KOL ſoit diviſé comme l'écliptique (2831), l'ordonnée DAV tirée par le point A perpendiculairement ſur le grand axe LDK déterminera le point V où eſt le ſoleil lorſque l'aberration en aſcenſion droite eſt nulle; les lignes DV & DA ſont comme les tangentes des angles DEV, DEA, & en même temps comme le grand axe de l'ellipſe eſt au petit, c'eſt-à-dire, comme le rayon eſt au ſinus de la latitude de l'étoile (2820); donc le

Aberration en aſcenſion droite.

Fig. 241.

Fig. 241. finus de la latitude de l'étoile eſt au rayon, comme la cotangente de l'angle à l'étoile, eſt à la tangente de l'angle DEV ou de l'arc LV ou KV; c'eſt la diſtance entre le lieu de l'étoile marqué en K (2831), & le lieu du ſoleil au temps où l'aberration en aſcenſion droite eſt nulle.

Si l'on tire au diamètre AB un diamètre conjugué MN, les points M & N feront ceux où l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande; car la tangente en N eſt parallèle à AB; le point N de l'ellipſe eſt donc de tous les points de cette courbe le plus éloigné de la ligne AB ou du cercle de déclinaiſon qui paſſe par le lieu moyen E de l'étoile; ayant tiré l'ordonnée CNF, le point C déſigne le lieu du ſoleil lorſque l'aberration en aſc. dr. eſt la plus grande; & comme par la propriété de l'ellipſe l'angle VEC eſt droit (3261), il s'enſuit que le lieu C du ſoleil au temps de la plus grande aberr. en aſc. dr. eſt éloigné de 90° du point V qui eſt le lieu du ſoleil au temps où elle étoit nulle. (Voyez la règle 2846).

Lieu de la plus grande aberration.

2843. La perpendiculaire NG tirée du point N ſur la ligne AG eſt la plus grande aberration en aſcenſion droite, meſurée dans la région de l'étoile; $NG \times AE = LE \times EH$ (3262); ou $AE : LE$ ou EV : : $EH : NG$; donc $\frac{AD}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EH : NG$; mais AD : $EH :: DV : EO$; donc $\frac{DV}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EO : NG$, c'eſt-à-dire, le ſinus de l'arc LV eſt au coſinus de l'angle de poſition OEA, comme 20″ ſont à la plus grande aberration en aſcenſion droite. L'arc OV eſt la diſtance entre le point O, où l'aberration en longitude eſt nulle, & le point V où eſt le ſoleil quand l'aberration en aſcenſion droite eſt nulle. (Voyez auſſi 2845).

Quantité de cette aberration.

Si l'étoile eſt dans un autre point de ſon ellipſe, tel que S, SP perpendiculaire ſur AEB ſera l'aberration d'aſcenſion droite; ayant tiré une ordonnée SR au diamètre AB, qui ſoit parallèle à MN, le rapport de

SR à SP eſt conſtant, & l'ordonnée SR de l'ellipſe eſt la projection d'une ordonnée QT au cercle (2834); donc SR ayant un rapport conſtant avec SP & avec QT, il y aura auſſi un rapport conſtant entre SP & QT qui eſt le ſinus de l'arc QV; donc l'aberration en aſcenſion droite SP eſt comme le ſinus de la diſtance QV du ſoleil au lieu où il étoit lorſque l'aberration en déclinaiſon étoit nulle; & la plus grande aberration multipliée par le ſinus de l'argument annuel (2816), donnera l'aberration actuelle en aſcenſion droite.

2844. On peut avoir la quantité de la plus grande aberration en aſcenſion droite ſous une forme plus ſimple en employant l'angle M (*fig.* 240) de l'écliptique & du méridien qui paſſe par l'étoile. Le point M eſt le lieu où ſe trouve le ſoleil lorſque l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande; car dans le triangle SLM rectangle en L, on a cette proportion R : ſin. SL : : tang. MSL : tang. ML (3667), ce qui revient à la proportion de l'art. 2842; L eſt le lieu du ſoleil lorſque l'étoile eſt en conjonction, & que l'aberration en long. eſt la plus grande; ainſi ML eſt égal à la différence des points où ces deux aberrations ſont nulles; on trouvera donc la plus grande aberration en aſcenſion droite (2843), = $\frac{20'' \text{ coſ. } MSL}{\text{coſ. } ML}$ dans la région de l'étoile, & $\frac{20'' \text{ coſ. } MSL}{\text{coſ. } ML \text{ coſ. } SA}$ ſur l'équateur (892). Mais dans le triangle MSL rectangle en L, on a coſ. MSL = ſin. M. coſ. ML (3669); donc ſubſtituant cette valeur on a $\frac{20'' \text{ ſin. } M}{\text{coſ. } SA}$ pour la plus grande aberration en aſcenſion droite. L'angle M eſt facile à trouver, car dans toutes les tables aſtronomiques on a l'angle de l'écliptique avec le méridien pour chaque point M de l'écliptique. C'eſt ainſi qu'on a calculé la table des aberrations en aſcenſion droite qui eſt à la page 185, du recueil déja cité.

Fig. 240.

Autres expreſſions de l'aberration en aſcenſion droite.

2845. Enfin, ſi l'on veut avoir la même quantité ſans employer l'angle M, on conſidérera que dans le triangle ſphérique EAM rectangle en A, l'on a par la

Fig. 240. trigonométrie ſphérique R : ſin. M : : coſ. AM : coſ. E (3669) ; donc à la place de ſin. M on peut mettre $\frac{\text{coſ. } E}{\text{coſ. } AM}$ ou $\frac{\text{coſ. } 23^\circ}{\text{coſ. déclin. } M}$. Alors on aura la plus grande aberration en aſcenſion droite, $\frac{20'' \text{ coſ. } 23^\circ}{\text{coſ. déclin. } S. \text{ coſ. déclin. } M}$. Cette plus grande aberration multipliée, ainſi que toutes les autres, par le coſinus de l'argument annuel d'aberration en aſcenſion droite (2816), ſera l'aberration actuelle pour un moment donné.

Lieu du ſoleil quand l'aberration eſt la plus grande.

2846. Le lieu du ſoleil au temps de la plus grande aberration en aſcenſion droite (2842) ſe peut auſſi trouver ſans aucun calcul par la table XVIII, qui donne la différence entre la longitude & l'aſcenſion droite du ſoleil, pour chaque point de l'écliptique, d'où l on peut la conclure pour chaque point de l'équateur. Le point A marque l'aſcenſion droite de l'étoile S, le point M déſigne le lieu de l'écliptique où ſe trouve le ſoleil quand l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande ; ainſi pour avoir ce point M il ne faut que prendre la différence entre EA & EM ; on l'ajoute à l'aſcenſion droite dans le 1er & le 3e quart d'aſcenſion droite, on la retranche dans le 2e & le 4e quart, on a la longitude du point M où eſt le ſoleil quand l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande ; cette quantité qu'il faut ajouter à l'aſcenſion droite de l'étoile ne va jamais au-delà de 2° 28′ 25″ ; on en trouvera auſſi une table dans mon Recueil, 1759, *pag.* 184.

2847. Pour ſervir d'exemple aux règles précédentes, je mettrai ici une table où l'on verra pour les dix principales étoiles du ciel, le lieu du ſoleil au temps où les aberrations ſouſtractives ſont les plus grandes, avec les quantités des plus grandes aberrations pour 1750. On trouvera dans les différens volumes de la connoiſſance des temps, depuis 1760, des tables d'aberrations plus détaillées, celles des principales étoiles ſe trouveront également parmi les tables qui ſont dans le tome Ier de cet ouvrage.

NOMS DES ÉTOILES.	Lieu du Sol. au temps de la plus gr. aber. en ascen. dr. pour 1750.	La plus grande aberration en ascension droite.	Lieu du Soleil au temps de la plus gr. aberration en déclinaison.	La plus grande aberr. en déclin.
Etoile polaire,	0s 11° 38′	8′ 38″ 4	3s 8° 48′	19″ 9
Aldébaran,	2 7 10	0 20, 6	1 6 46	3, 8
La Chèvre,	2 15 43	28, 5	5 1 36	8, 1
Sirius,	3 7 48	20, 8	6 3 45	12, 8
Régulus,	4 26 28	19, 3	10 25 3	6, 8
L'épi de la Vierge,	6 19 30	18, 6	6 25 14	7, 6
Arcturus,	7 33 15	20, 1	5 0 55	12, 4
Antarès,	8 5 24	21, 8	8 29 40	3, 9
La Lyre,	9 6 33	25, 5	0 5 1	17, 6
L'Aigle,	9 22 48	19, 9	0 6 37	10, 3

2848. Lorsqu'on veut avoir l'aberration actuelle pour un jour donné, on cherche le lieu du soleil, on le retranche du lieu de la plus grande aberration, pour avoir l'argument annuel; le cosinus de cet argument multiplié par la plus grande aberration, prise dans la table précédente, donne l'aberration cherchée; elle est toujours soustractive tant que l'argument annuel est entre 0s & 3s, ou entre 9s & 12s, elle est additive entre 3 & 9 signes (2816). Aberration actuelle.

2849. Je dois avertir ici que M. de la Caille dans tous ses ouvrages a appellé ascension droite *vraie*, déclinaison *vraie*, &c. celles qui auroient lieu s'il n'y avoit dans les étoiles, ni aberration, ni nutation; je les ai appellé *moyennes* pour éviter l'équivoque, & pour me rapprocher de l'usage qui a fait nommer, temps moyen, celui qui auroit lieu s'il n'y avoit point d'inégalité dans le soleil (973). Equivoque sur les termes de *vrai* & *moyen*.

2850. L'ABERRATION a lieu dans les planètes, aussi-bien que dans les étoiles fixes, mais elle est plus facile à calculer, quand on connoît leur mouvem. & leur distance. Aberration des planètes.

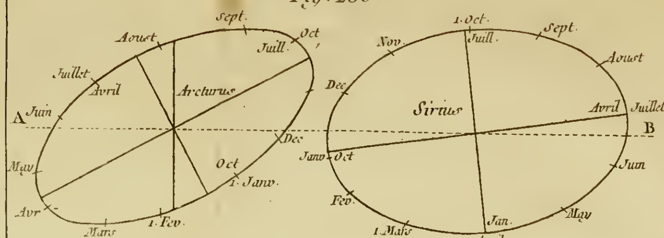
L'ABERRATION d'une planète est toujours égale au mouvement vu de la terre pendant le temps que la lumière emploie à venir depuis la planète jusqu'à la terre. Soit *C* le lieu de la

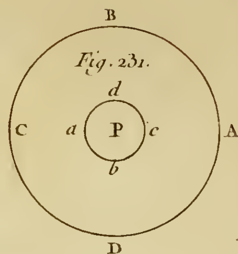
Fig. 233. planète (*fig.* 233), que je ſuppoſe immobile pendant que la terre va de *A* en *B*, en donnant à la terre la ſomme des deux mouvemens ou leur différence; enſorte que le mouvement de la planète vu de la terre, qui eſt le réſultat des deux mouvemens, ſoit égal à l'angle *ACB* pendant que la lumière eſt parvenue de *C* en *B*; ſuivant nos principes l'œil arrivant en *B* reçoit deux impreſſions, l'une ſuivant *CB*, l'autre ſuivant *FB*, ainſi il n'éprouvera qu'une impreſſion compoſée, ſuivant la diagonale *DB*, & la planète lui paroîtra en *D*, au lieu de paroître en *C*; la différence eſt l'angle *CBD* égal à l'angle *ACB*, c'eſt-à-dire, au mouvement de la planète vu de la terre. On peut voir des formules & des méthodes particulières de M. Clairaut à ce ſujet, dans les mémoires de l'académie pour 1746, & celles de M. Euler, dans les mémoires de Berlin pour 1746, *Tom. II.*

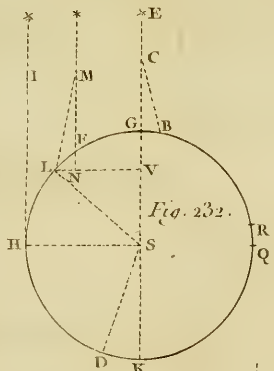
2851. Exemple. La lumière emploie 8′ 8″ à venir du ſoleil juſqu'à nous (2806), le mouvement du ſoleil pendant ces 8′ eſt de 20″, d'où il ſuit que le ſoleil a 20″ d'aberration en longitude, en tout temps; & comme l'aberration fait paroître la planète du côté où va la terre, oppoſé à celui où la planète paroît aller, il s'enſuit que ſi la longitude eſt croiſſante l'aberration la diminue, & il faudra l'ôter de la longitude calculée pour avoir la longitude apparente. Il en ſera de même de la latitude, de l'aſcenſion droite, de la déclinaiſon, pourvu qu'on prenne le mouvement géocentrique en latitude, en aſcenſion droite, en déclinaiſon pendant le temps que la lumière emploie à venir juſqu'à nous.

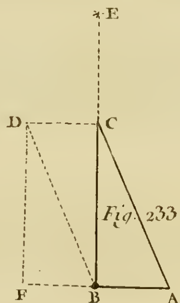
2852. Si l'on nomme *m* le mouvement diurne vu de la terre, *d* la diſtance de la planète ou de la comète à la terre, l'aberration ſera $\frac{m.\ d.\ 8'}{24^h}$ ou $\frac{m.\ d.\ 20''}{59'}$. Ainſi en ajoutant le log. conſtant 0,95292 avec ceux du mouvement diurne géocentrique de la planète exprimé en minutes, & de ſa diſtance à la terre, en ſuppoſant celle du ſoleil égale à l'unité, on aura le log. de l'aberration en ſecondes.

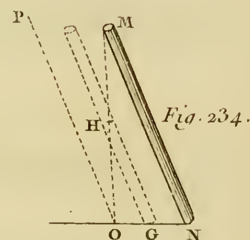
Voici des tables pour les cinq planètes, avec leſquelles on

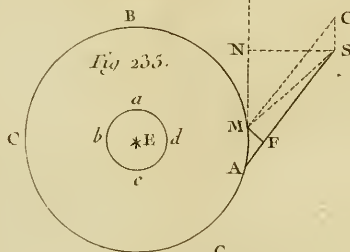

Fig. 230.
Sept.
Aoust
Oct
Juill.
Juillet
Avril
Arcturus
A
Juin
Dec
May
Oct
1. Janv.
Avr
Mars
1. Fev.
1. Oct.
Sept.
Nov.
Juill.
Aoust
Dec
Sirius
Avril
Juillet
B
Janv
Oct
Juin
Fev.
May
Jan.
1 Mars
Avril

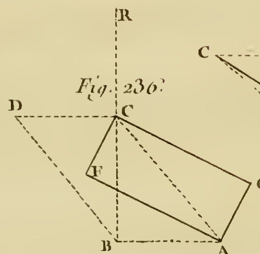

B
Fig. 231.
d
C
a
P
c
A
b
D

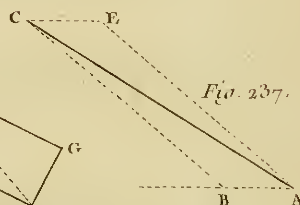

E
C
I
M
G
B
F
L
N
V
Fig. 232.
R
H
S
Q
D
K

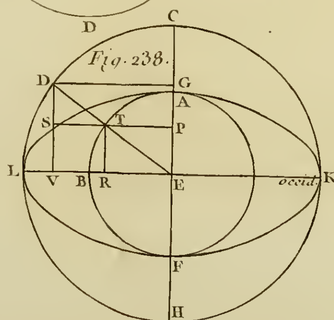

E
D
C
Fig. 233.
F
B
A

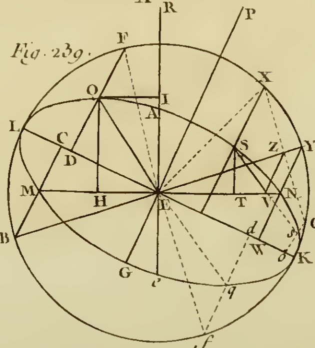

P
M
H
Fig. 234.
O
G
N


B
C
N
S
Fig 235.
a
C
b
E
d
M
F
c
A
D


R
Fig. 236.
D
C
F
G
B
A


C
E
Fig. 237.
B
A


C
Fig. 238.
D
G
A
S
T
P
L
V
B
R
E
occid.
K
F
H


R
P
Fig. 239.
F
X
Q
I
A
L
C
S
Z
Y
D
M
H
T
V
N
E
O
B
d
W
K
G
q
f

on peut ſe paſſer de ce calcul rigoureux qui eſt aſſez long ; on trouvera une table générale, à la page 200 du Receuil que j'ai cité, qui ſervira également pour les planètes & les comètes.

ABERRATION des cinq Planètes principales, pour convertir la longitude moyenne en apparente.

ÉLONGAT. ou DISTANCE au SOLEIL.			MARS.	JUPITER.	SATURNE	ÉLONGAT.	VÉNUS.
Sig.		D.	S.	S.	S.	D.	S.
O	XII	0	— 36	— 28	— 26	☌ ſupér.	— 43
		15	— 35	— 28	— 25	15	— 41
I	XI	0	— 32	— 26	— 23	30	— 34
		15	— 28	— 22	— 20	45	— 19
II	X	0	— 23	— 18	— 16	la plus gr.	
		15	— 17	— 14	— 11	digreſſion.	— 14
III	IX	0	— 12	— 8	— 6	45	— 9
		15	— 7	— 3	— 1	30	0
IV	VIII	0	— 3	+ 1	+ 4	15	+ 3
		15	0	+ 5	+ 8	☌ infer.	+ 3
V	VII	0	+ 2	+ 8	+ 11		
		15	+ 3	+ 10	+ 13		
VI	VI	0	+ 4	+ 11	+ 13		

ÉLONGATION.	MERCURE.		
	APHÉLIE.	DIST. MOY.	PÉRIHÉLIE.
Deg.	Sec.	Sec.	Sec.
conjonction ſupérieure.	— 49	— 51	— 55
5	— 48	— 50	54
10	— 46	— 48	49
15	— 43	— 43	38
20	— 38	— 33	
25	— 30		
la plus gr. digreſ.	— 17	— 18	— 19
25	— 5		
20	+ 1	— 4	
15	+ 5	+ 5	0
10	+ 7	+ 9	+ 10
5	+ 9	+ 11	+ 14
conjonction inférieure.	+ 9	+ 12	+ 16

DE LA NUTATION.

2853. La nutation ou *déviation* eſt un mouvement apparent de *9″* obſervé dans les étoiles fixes, dont la période eſt de 18 ans, cauſé par l'attraction de la lune ſur le ſphéroïde de la terre. On verra dans le XXIIe. livre que la préceſſion des équinoxes qui eſt de 50″ par an, eſt produite par l'action du ſoleil & de la lune ſur la partie de la terre que l'on conçoit relevée vers l'équateur du ſphéroïde (*3526*). De ces 50″ il y en a au moins *36* qui ſont produites par l'action ſeule de la lune; or, la lune ne peut pas produire ces *36″* de préceſſion d'une manière uniforme, puiſque ſes nœuds changent continuellement de place & que ſon inclinaiſon par rapport à l'équateur, d'où ſon effet dépend, varie de dix degrés; il en doit réſulter non-ſeulement une inégalité dans la préceſſion annuelle des équinoxes à différentes années, mais auſſi un balancement ou une nutation dans l'axe de la terre (*3569*). Par l'effet de cette nutation les étoiles doivent paroître ſe rapprocher & s'éloigner de l'équateur, puiſque l'équateur répond à différentes étoiles.

On préſumoit la nutation.

2854. Nous voyons que Flamſteed avoit eſpéré vers l'an *1690*, au moyen des étoiles voiſines du zénit, de déterminer la quantité de cette nutation qui devoit ſuivre de la théorie de Newton; mais il abandonna ce projet, parce que, dit-il, ſi cet effet exiſte il doit être inſenſible juſqu'à ce qu'on ait des inſtrumens bien plus longs que 7 pieds, plus ſolides & mieux fixés que les miens. (*Hiſt. cél. tom. III, pag.* 113).

M. Horrebow rapporte le paſſage ſuivant, tiré des manuſcrits de Romer, par lequel on voit qu'il ſoupçonnoit auſſi une nutation dans l'axe de la terre, & eſpéroit d'en donner la théorie : *Sed de altitudinibus non perinde certus reddebar, tam ob refractionum varietatem quàm ob aliam nondum liquido perſpectam cauſam; ſcilicet per hos duos annos, quemadmodum & alias, expertus ſum eſſe quandam*

in declinationibus varietatem, quæ nec refractionibus nec parallaxibus tribui poteſt, ſine dubio ad vacillationem aliquam poli terreſtris referendam, cujus me veriſimilem dare poſſe theoriam, obſervationibus munitam, ſpero. (*Baſis aſtronomiæ* 1735, *pag.* 66).

Ces idées de nutation devoient ſe préſenter naturellement à tous ceux qui avoient apperçu dans les étoiles des changemens de déclinaiſons, & nous avons vu que les premiers ſoupçons de M. Bradley en 1727, furent qu'il y avoit quelque nutation de l'axe de la terre qui faiſoit paroître l'étoile γ du Dragon plus ou moins près du pole (2794); mais la ſuite des obſervations l'obligea de chercher une autre cauſe pour les variations annuelles; ce ne fut qu'au bout de quelques années qu'il reconnut le ſecond mouvement dont il s'agit ici.

2855. Pour bien expliquer la découverte de la nutation par M. Bradley, il faut remonter au temps où il obſervoit les étoiles pour découvrir l'aberration; il vit en 1728, que le changement annuel de déclinaiſon dans les étoiles voiſines du colure des équinoxes étoit plus grand qu'il ne devoit réſulter de la préceſſion des équinoxes ſuppoſée de 50″, & calculée à la manière ordinaire (2710); l'étoile η de la grande Ourſe ſe trouva au mois de Septembre 1728, 20″ plus au ſud que l'année précédente, quoiqu'il ne dût y avoir que 18″; il en réſultoit que la préceſſion des équinoxes avoit dû être de 55″ ½ au lieu de 50″, ſans que cette différence de 18 à 20″ pût être attribuée à l'inſtrument, parce que les étoiles voiſines du colure des ſolſtices ne donnoient point la même différence. (*Philoſ. tranſ. n°.* 406. *vol.* 35. *Déc.* 1728, *pag.* 659). Hiſtoire de cette découverte.

2856. En général les étoiles ſituées proche le colure des équinoxes avoient changé de déclinaiſon d'environ 2″ plus qu'elles n'auroient fait par la préceſſion moyenne des équinoxes, qui eſt très-bien connue, & les étoiles voiſines du colure des ſolſtices moins qu'elles n'auroient dû faire; mais, ajoute M. Bradley, « ſoit que ces petites » variations viennent d'une cauſe régulière, ou qu'elles

» ſoient occaſionnées par quelque changement dans le » ſecteur, je ne ſuis pas encore en état de les détermi» ner ». M. Bradley n'en fut que plus ardent à continuer ſes obſervations pour déterminer la période & la loi de ces variations; il demeura preſque toujours à Wanſted juſqu'en 1732, qu'il fut obligé d'aller à Oxford, pour remplacer M. Halley; il continua d'obſerver avec la même exactitude toutes les circonſtances des changemens de déclinaiſon ſur un grand nombre d'étoiles. Chaque année il voyoit les périodes de l'aberration ſe rétablir ſuivant les règles que l'on a vues ci-deſſus (2825); mais d'une année à l'autre il y avoit d'autres différences; les étoiles ſituées entre l'équinoxe du printemps & le ſolſtice d'hiver ſe trouvoient être plus près du pole boréal, & les étoiles oppoſées s'en étoient éloignées; il commença de ſoupçonner que l'action de la lune ſur l'équateur, c'eſt-à-dire, ſur la partie la plus relevée de la terre pouvoit cauſer une variation ou un balancement dans l'axe de la terre : ſon ſecteur étant demeuré fixe à Wanſted, il continua d'y venir obſerver ſouvent, & il s'eſt trouvé en état en 1747, de prononcer ſur la cauſe de ce phénomène; nous allons rendre compte de cette nouvelle découverte d'après M. Bradley lui-même (*Phil. tranſ. n°.* 485. *vol.* 45. Janv. 1748).

Phénomène de la nutation.

2857. En 1727, le nœud aſcendant de la lune concouroit avec l'équinoxe du printemps, de ſorte que la lune s'écartoit de l'équateur dans ſes plus grandes latitudes de $28^\circ \frac{1}{2}$; en 1736, le nœud aſcendant s'étant trouvé dans l'équinoxe de la balance, la lune ne pouvoit plus s'écarter de l'équateur que de $18^\circ \frac{1}{2}$, de ſorte que ſon orbite étoit plus éloignée de l'équateur de 10° en 1727, qu'en 1736, ce qui rendoit ſon attraction plus ſenſible.

M. Bradley obſerva en 1727, par le changement de déclinaiſon des étoiles voiſines du colure des équinoxes que la préceſſion des équinoxes étoit plus grande que la moyenne (2855), & cependant les étoiles ſituées proche le colure des ſolſtices, paroiſſoient ſe mouvoir d'une manière contraire aux effets de cette augmentation; les

étoiles opposées en ascension droite étoient affectées de la même manière ; γ du Dragon, & la 35ᵉ étoile de la Giraffe (2794) avoient éprouvé le même changement en déclinaison, l'une vers le nord, l'autre vers le sud ; cela s'accordoit très-bien avec une nutation de l'axe de la terre, qui doit évidemment produire la même différence sur les étoiles opposées en ascension droite.

2858. En 1732, le nœud de la lune avoit rétrogradé jusqu'au solstice d'hyver, alors les étoiles situées proche le colure des équinoxes parurent changer leur déclinaison suivant la précession de 50″. Dans les années suivantes, ce changement diminua, jusqu'en 1736, que le nœud ascendant parvint à l'équinoxe de la balance.

Les étoiles situées vers le colure des solstices changerent leur déclinaison depuis 1727, jusqu'en 1736, de 18″ moins que n'exigeoit la précession de 50″; de sorte que le pole du monde ou l'axe de la terre avoit éprouvé une nutation de 18″ pendant une demi-révolution des nœuds de la lune. En 1745, au bout de 18 ans les nœuds étant revenus à leur première situation, les étoiles reparurent toutes aux mêmes points, ayant égard à la précession des équinoxes ; on vit les mêmes phénomènes qu'en 1727, & M. Bradley ne douta plus que la nutation de l'axe terrestre n'en fût la véritable cause.

Hypothèse de M. Machin.

M. Machin, Secretaire de la société Royale, à qui il envoya ses conjectures, vit bientôt qu'il suffisoit pour expliquer, & la nutation & le changement de la précession, de supposer que le pole de la terre décrivoit un petit cercle, (on a vu de semblables hypothèses, 1353, 1493, 2705). Il donna 18″ au diamètre de ce cercle, & supposa qu'il étoit décrit par le pole dans l'espace d'une révolution des nœuds de la lune ; l'on expliquoit par-là, & le changement de la précession annuelle, tel que les étoiles voisines du colure des équinoxes l'avoient indiqué, & la nutation de l'axe de la terre démontrée par les étoiles voisines du colure des solstices.

Son accord avec les observations.

Pour faire voir l'accord de sa théorie avec l'observa-

tion, M. Bradley rapporte grand nombre d'obſervations faites depuis 1727, juſqu'en 1747, ſur γ & ϐ du Dragon, α de Caſſiopée, τ de Perſée, α de Perſée, η de la grande Ourſe, & la 35ᵉ de la Giraffe, qui ſont à l'égard des colures dans des poſitions très-différentes, & l'on voit qu'après les réductions néceſſaires pour rapporter toutes les obſervations à une même époque, par les principes de l'aberration & de la nutation, il trouve toujours à 2 ou 3″ près le même réſultat, tandis qu'auparavant on eût trouvé juſqu'à 56″ ½ de différence pour γ du Dragon. De plus de 300 obſervations qu'il avoit faites de celle-ci, il ne s'en eſt trouvé que onze qui différaſſent de la moyenne de 2″.

2859. Les obſervations faites ſur les étoiles un peu plus éloignées du zénit, s'accordent un peu moins entr'elles; mais M. Bradley ne s'en ſervoit qu'au défaut des plus proches; l'expérience lui avoit appris depuis long-temps que les obſervations des étoiles les plus proches du zénit étoient toujours celles qui s'accordoient le mieux entr'elles.

Par les obſervations de 1740 & de 1741, l'étoile η de la grande Ourſe parut de 3″ plus éloignée du pole qu'elle ne devoit être ſuivant les obſervations des autres années; M. Bradley crut que cette différence venoit de quelque cauſe particulière; nous verrons bientôt une de ces cauſes, qui venoit du défaut de l'hypothèſe circulaire (2873): il ſoupçonna auſſi que la ſituation de l'apogée de la lune pourroit influer ſur la nutation; il invita les géomètres à diſcuter tous ces effets de l'attraction, & les aſtronomes à continuer d'obſerver les poſitions des plus petites étoiles, & celles des plus brillantes, pour découvrir les dérangemens phyſiques qu'elles peuvent éprouver, & que l'on obſerve dans quelques-unes (2748).

En quoi conſiſte la nutation.

2860. L'hypothèſe que M. Machin employa pour expliquer les obſervations de M. Bradley conſiſtoit à ſuppoſer que le pole de la terre décrivoit un cercle de 18″ de diamètre dans l'eſpace de 18 ans, par un mouvement rétrograde, comme dans l'art. 1353. Soit *E* le pole de

l'écliptique (*fig.* 243), *P* le pole de l'équateur qui en eſt éloigné de $23^\circ\frac{1}{2}$, & autour du point *P* un petit cercle, dont le rayon *PB* ſoit de $9''$; au lieu du point *P* qui eſt le lieu moyen du pole, on ſuppoſe que le vrai pole ſoit en *A* lorſque le nœud eſt dans l'équinoxe du printemps ſur le colure des équinoxes *P*♈, & qu'il continue de ſe mouvoir d'*A* en *B* de la même manière que le nœud; en ſorte que quand le pole eſt en *O* l'arc *AO* ſoit égal à la longitude du nœud de la lune, le lieu du vrai pole ſera toujours plus avancé de 3 ſignes en aſcenſion droite dans le cercle *ABC* que le lieu du nœud de la lune dans l'écliptique, & le pole ſera en *D* lorſque le nœud ſera en ♋. Puiſque le pole rétrograde de *A* en *B* il doit ſe rapprocher des étoiles qui ſont dans le colure *PB*♈ des équinoxes; de ſorte que la préceſſion paroîtra plus grande, en occaſionnant dans les étoiles qui ſont ſur le colure des équinoxes, un changement de déclinaiſon plus grand de $9''$ qu'il ne devoit être, & cela dans l'eſpace de 4 ans & 8 mois que le nœud emploîra à venir du Bélier au Capricorne, & le pole à venir de *A* en *B*; en même-temps le pole paroîtra s'être approché des étoiles qui ſont vers le ſolſtice d'hiver ou du côté de *E*; telles ſont en effet les circonſtances que M. Bradley avoit obſervées (2858). Fig. 243.

2861. Le premier effet général de la nutation, celui qui eſt le plus facile à appercevoir, eſt le changement de l'obliquité de l'écliptique; cet angle augmente de $9''$ quand le nœud aſcendant de la lune eſt dans le Bélier; puiſqu'alors le pole eſt en *A*, & que la diſtance des poles *EA* devient plus grande de $9''$ que quand le nœud eſt dans la Balance. L'obliquité de l'écliptique étoit en 1764 de $23^\circ\ 28'\ 15''$; elle n'étoit en 1755 que de $23^\circ\ 28'\ 5''$, non-ſeulement elle n'a pas diminué de $8''$ comme elle auroit dû faire (2744); mais elle a augmenté de $10''$, ce qui fait $18''$ de plus pour le ſeul effet de la nutation, qui eſt égal à *AC*. Nutation de l'obliquité de l'écliptique.

Quand le pole de la terre eſt arrivé de *A* en *O*, l'obliquité de l'écliptique eſt *EO* ou *EH*, & la nutation ſe trouve égale à *PH*; l'arc *AO* ou l'angle *APG* eſt égal à la longitude du nœud, & *PH* en eſt le coſinus; or *PH* =

Fig. 243. 9″ sin. *OB* ou 9″ cos. *AO*, donc la nutation *PH* = + 9″ cos. nœud, ou 9″ multipliées par le cosinus de la longitude du nœud de la lune. Cette nutation doit se retrancher de l'obliquité moyenne ou uniforme, tant que le nœud de la lune est entre 3 & 9 signes; elle s'ajoute dans le premier & le quatrième quart de la longitude du nœud.

2862. La nutation change également les longitudes, les ascensions droites & les déclinaisons des astres; il n'y a que les latitudes qu'elle n'affecte point, puisque l'écliptique est immobile dans la théorie de la nutation : nous allons expliquer le calcul de toutes ces variations, de deux manières, & premiérement par une méthode nouvelle, plus simple que celle du petit cercle employé par M. Bradley. Soit *MLQ* (*fig.* 243) l'écliptique immobile; *Q* le point solsticial, *QZ* l'obliquité de l'écliptique, *MRN* l'équateur, *M* le point équinoxial, *K* un astre dont la déclinaison est *KT*, & l'ascension droite *MT*. Supposons que par l'effet de la nutation l'équateur *MN* prenne la situation *LN*, ensorte que le point équinoxial soit en *L*, & que *ML* soit le changement de la précession en longitude, le long de l'écliptique; l'étoile *K* au lieu de répondre perpendiculairement au point *T* de l'équateur, répondra en un autre point *V* où tombera l'arc perpendiculaire *KV* du cercle de déclinaison, *LV* sera l'ascension droite apparente & *KV* la déclinaison apparente de l'étoile.

L'obliquité de l'écliptique *QZ* devient égale à *QI*, quand l'équateur prend la position *LNI*; suivant l'observation, l'obliquité de l'écliptique est la plus grande lorsque le nœud ascendant de la lune est dans l'équinoxe du printemps (2861), l'équation est nulle quand le nœud est dans les solstices, ou que le point *N* est en *Z*; (le point *N* a une ascension droite égale à la longitude du nœud de la lune), la nutation *IZ* ou le changement de l'obliquité de l'écliptique mesurée sur le colure des solstices *SZI*, est égale à 9″ multipliées par le cosinus de la longitude du nœud de la lune, ou 9″ sin. *NZ* (2861), c'est la proportion que M. Bradley remarquoit par le changement de

déclinaison

déclinaison que les étoiles situées près du colure des solstices avoient éprouvé pendant le cours des 19 ans ; en partant de cette supposition, il s'agit de trouver l'effet qui doit en résulter sur les longitudes, les ascensions droites & les déclinaisons. *Fig.* 243.

2863. Puisque $IZ = 9''$ sin. NZ, l'angle N est de $9''$, l'arc LR sera $9''$ sin. NR (892) ; dans le petit triangle MLR on a $R : LM ::$ sin. $M : LR$ ou $LM = \frac{LR}{\text{sin. } M} = \frac{9'' \text{ sin. } NR}{\text{sin. } M}$; c'est-à-dire, que le changement du point équinoxial le long de l'écliptique ou la nutation en longitude est de $9''$ multipliées par le sinus de la longitude du nœud de la lune, & divisées par le sinus de l'obliquité de l'écliptique ; mais $\frac{9''}{\text{sin. } 23^{\circ}} = 23''$, donc elle est aussi égale à $23''$ sin. longit. ☊. Cette nutation affecte les points équinoxiaux d'où se comptent les longitudes, ainsi elle doit être employée dans les calculs de toutes les planètes, quand on y veut mettre une certaine précision ; nous en avons donné la table parmi celles du soleil, table VII, *pag.* 31, mais elle est seulement de $16'' 8$, (art. 2874). M. Mayer la faisoit de $18''$ (1472). Nutation en longitude.

2864. La nutation en ascension droite, ou la différence entre l'ascension droite moyenne MT, & l'ascension droite apparente LV dépend de deux causes, & doit être composée de deux parties, l'une MR, l'autre VX ou TY; la première partie MR est le déplacement de l'équateur ou le changement du point équinoxial compté sur l'équateur même ; or $MR = LR$ tang. $MLR = \frac{LR}{\text{tang. } M} = \frac{9'' \text{ sin. } NR}{\text{tang. } M}$, c'est-à-dire, $9''$ multipliées par le sinus de la longitude moyenne du nœud & divisées par la tangente de l'obliquité de l'écliptique. Cette première partie de la nutation est commune à tous les astres, puisqu'elle affecte le point équinoxial même, c'est-à-dire, le point d'où se comptent toutes les ascensions droites. (Voyez encore 2870, 2876 & l'exemple 2879). Nutation en ascen. droite première partie.

2865. La seconde partie VX ou TY de la nutation en ascension droite dépend de la situation de l'astre K ou

Fig. 243. du point T, car elle feroit nulle fi l'arc VX étoit parallèle à l'arc YT, comme cela arrive à 90° de l'interfection N, ou à 90° du nœud, puifqu'alors les arcs perpendiculaires KT & KY fe confondent l'un avec l'autre. Si l'on imagine en T & en Y deux tangentes aux arcs TK & TY, & aux points V & Y deux tangentes aux arcs VN & YN, les deux premières feront entre elles le même angle que les deux dernières, puifqu'elles font perpendiculaires l'une à l'autre en V & en T, & les deux premières tangentes formeront par leur concours à la rencontre de la fécante, ou du prolongement du rayon de la fphère mené par le point K un triangle femblable à celui des deux autres tangentes, dans le point de rencontre du rayon qui paffe par le point N; donc les triangles femblables ayant leurs côtés proportionnels, on aura cette analogie TX eft à la tangente de l'arc TN, comme TY eft à la tangente de l'arc TK, donc $TY = \frac{TX \text{ tang. } TK}{\text{tang. } TN} = \frac{9'' \text{ fin. } TN \text{ tang. } TK}{\text{tang. } TN} = 9''$ tang. TK cof. TN, c'eft-à-dire, $9''$ multipliées par la tangente de la déclinaifon de l'aftre dont il s'agit, & par le cofinus de fa diftance au point N qui répond au nœud de la lune, ou de l'afcenfion droite de l'aftre moins la longitude du nœud de la lune. (Voyez encore art. 2871, 2876, & l'exemple 2879).

Seconde partie.

Nutation en déclinaifon.

2866. La nutation en déclinaifon eft TX, puifque c'eft la différence entre la déclinaifon moyenne KT & la déclinaifon actuelle & apparente KV ou KX. Or cette nutation $TX = N$ fin. TN (892), c'eft-à-dire, $9''$ multipliées par le finus de la différence entre l'afcenfion droite de l'aftre & la longitude du nœud. (Voyez art. 2869, 2876 & l'exemple 2879).

2867. Au lieu de fuppofer l'angle N conftamment de $9''$, on le peut fuppofer quelquefois de $9''$, quelquefois de $6''7$ (2874, 3575), c'eft la diftance des poles qui a lieu dans l'ellipfe, ainfi que l'indique la théorie; il fuffira pour lors de mettre dans les formules précédentes, au lieu de $9''$, la diftance actuelle des poles, ainfi que nous l'expliquerons bientôt, & au lieu de la longitude

moyenne du nœud une longitude corrigée (2874). *Fig.* 243.

2868. Les mêmes formules ſe démontrent également par le moyen du petit cercle employé par M. Bradley. Le colure des ſolſtices ou le cercle *EPA* peut ſervir à compter les longitudes, auſſi-bien que le colure des équinoxes, puiſqu'il en eſt toujours éloigné de 90°, & que les longitudes comptées du ſolſtice ſont ſeulement plus petites de 3 ſignes que les longitudes comptées de l'équinoxe; ainſi ce que nous allons dire des longitudes des aſtres rapportées au colure des ſolſtices *E* ♋ a lieu également par rapport au cercle *EM* qui va vers l'équinoxe, d'où l'on a coutume de compter les longitudes. Lorſque le pole de l'équateur ſe trouve en *O*, le colure des ſolſtices eſt ſitué ſur *EO*, puiſque c'eſt la ſituation des deux poles *E* & *O* qui détermine la poſition du colure; donc un aſtre quelconque *S* dont la longitude moyenne comptée du colure des ſolſtices étoit l'angle *PES*, lorſque le colure étoit ſur *EPA*, aura pour longitude actuelle & apparente l'angle *OES* plus petit de la quantité *AEO*; ainſi l'angle *AEO* eſt une équation qu'il faut ôter de la longitude de tous les aſtres pour avoir leur longitude comptée du vrai colure *EO*; c'eſt la nutation en longitude. L'arc *AO* du petit cercle de nutation eſt égal à la longitude du nœud de la lune (2860), dont *HO* eſt le ſinus; ainſi $HO = 9''$ ſin. nœud. Pour avoir l'angle *HEO*, il ſuffit de diviſer l'arc *HO* par le ſinus de *EH* (892), donc l'angle $AEO = \frac{9'' \text{ ſin. nœud}}{\text{ſin. } 23° \frac{1}{2}}$, c'eſt-à-dire, 9″ multipliées par le ſinus de la longitude du nœud, & diviſées par le ſinus de l'obliquité de l'écliptique. (Voyez encore 2873). Cette équation doit ſe retrancher de la longitude moyenne des aſtres tant que le nœud de la lune eſt dans les ſix premiers ſignes de ſa longitude, & s'ajouter dans les ſix derniers, pour avoir la longitude actuelle & apparente; on en trouvera une table parmi celles du ſoleil, *pag.* 31, mais elle eſt conſtruite de manière qu'on ſe ſert du ſupplément de la longitude du nœud, & non pas du nœud

Fig. 243. lui-même pour chercher l'équation ; on en trouvera le calcul plus exact à l'art. 2876.

2869. Cette équation de la longitude est la même pour tous les astres ; mais celle de l'ascension droite varie aussi-bien que la nutation en déclinaison. Soit *S* une étoile dont l'ascension droite moyenne est *SPE*, la distance moyenne au pole égale à *PS*, complément de la déclinaison moyenne, *SOE* l'ascension droite apparente, comptée du colure des solstices *OE* ; *SO* le complément de la déclinaison apparente ; *OPS* ou *OPF* la différence entre l'ascension droite de l'étoile & celle du pole *O*, qui est égale à la longitude du nœud augmentée de trois signes (2860) ; supposant un petit arc *OF* perpendiculaire sur le cercle de déclinaison *PFS*, on a $SF = SO$; ainsi *PF* sera la quantité dont la déclinaison de l'étoile a augmenté ; mais $R : 9'' :: \text{cosin. } OPF : PF$, donc l'équation de la déclinaison sera 9″ multipliées par le sinus de l'ascension droite de l'étoile dont on a ôté la longitude du nœud ; car cet angle est le complément de l'angle *SPO*. Cette nutation en déclinaison s'ajoute à la déclinaison moyenne pour avoir la déclinaison apparente, tant que son argument ne passe pas six signes ; elle se retranche dans les six derniers. C'est le contraire pour les étoiles dont la déclinaison est australe. (Voyez art. 2866, 2878).

Nutation en déclinaison.

2870. Pour calculer la nutation en ascension droite il faut avoir la différence entre l'angle *SOE* & l'angle *SPE* ; or, l'angle *SOE* qui est l'ascension droite apparente de l'étoile *S* comptée du colure des solstices *OE* est composé de deux portions, toutes deux variables, parce qu'elle est formée par deux cercles qui changent l'un & l'autre de position, nous rapporterons chacun de ces cercles à des cercles fixes, nous chercherons les deux variations séparément, leur différence donnera l'angle *SOE*. Ces deux portions variables sont l'angle *GOE*, & l'angle *SOG* ; la première partie *GOE*, qui vient du changement d'un des cercles variables *EO*, ne dépend que de la situation du nœud ou de celle du pole *O*, la seconde *SOG* dépend

de l'angle *SPG* qui eſt la différence entre l'aſcenſion droite de l'étoile & le lieu du pole *O*. Il faut concevoir par le pole de l'écliptique *E* & par l'étoile *S* un cercle de latitude *ESG*, & l'on aura un triangle ſphérique *EPG* qui ſe change en *EOG*, le côté *EG*, & l'angle *G* étant les mêmes, le reſte variable; alors on trouve que la petite variation *PO* du côté adjacent à l'angle conſtant *G* eſt à la petite variation de l'angle oppoſé au côté conſtant *EG*, comme la tangente du côté *EP* oppoſé à l'angle conſtant eſt au ſinus de l'angle *EPG* oppoſé au côté conſtant (3674); ainſi l'on dira, tang. $23^{\circ}\frac{1}{2}$: ſin. *EPO* : : 9″ : x, & x ſera la différence entre l'angle *GOE* & l'angle *GPE* qui eſt formé au pole moyen. C'eſt le changement que la nutation *PO* a produit ſur l'angle *GPE*, c'eſt donc la première partie de la nutation cherchee, commune à tous les aſtres, étoiles ou planètes; c'eſt la quantité qu'il faut ajouter à toutes les aſcenſions droites comptées au pole moyen. C'eſt ſur ce principe qu'eſt calculée la table VII. de mon recueil, *pag.* 179. dans laquelle cependant j'ai fait entrer une correction (2875). Cette première partie ſe retranche de l'aſcenſion droite moyenne dans les ſix premiers ſignes de la longitude du nœud, & s'ajoute dans les ſix autres.

Fig. 243.

Nutation en aſcen. droite première partie.

2871. On trouvera de même le changement que la nutation produit ſur l'autre partie de l'aſcenſion droite *SPE*; c'eſt-à-dire, ſur l'angle *SPG*, qui devient *SOG* par l'effet de la nutation; cette petite variation ſe calculera par la même analogie, au moyen du triangle *SOG* dont l'angle *G* eſt conſtant, auſſi-bien que le côté *SG*, tandis que *SP* ſe change en *SO*; l'on dira donc (3674), tang. *SP* : ſin. *SPG* : : 9″ : : *dSPG*, c'eſt-à-dire, la tangente du complément de la déclinaiſon eſt au coſinus de la diſtance entre l'étoile & le lieu du nœud, comme 9″ ſont à la quantité dont l'angle *SPG* doit varier pour devenir l'angle *SOG*; c'eſt la variation du ſecond angle, qui avec le précédent forme l'aſcenſion droite moyenne *SPE* comptée du colure des ſolſtices; c'eſt donc la ſeconde partie de la nutation en aſcenſion droite. Si l'on prend

Seconde partie.

Fig. 243. pour argument l'ascension droite de l'étoile moins la longitude du nœud l'équation sera soustractive dans le premier & dernier quart de l'argument, additive entre 3 & 9s pour trouver l'ascension droite apparente. C'est le contraire quand les étoiles ont une déclinaison australe, parce que la tangente de la déclinaison devient négative. C est ainsi que l'on a calculé la table IX. (*pag.* 180 du recueil des tables que j'ai cité à l'art. 2830); elle ne va que jusqu'à 54° de déclinaison, parce qu'on emploie assez rarement les étoiles plus éloignées de l'équateur; mais en tout cas, il seroit facile de l'étendre par l'analogie précédente ou par celles des articles 2865 & 2874. On en verra bientôt un exemple (2879). On trouve dans le Journal de Trevoux, & même dans les Calendriers astronomiques de Berlin pour plusieurs années, des tables de toutes les équations précédentes; mais il y avoit des erreurs de signes.

Erreurs de quelques tables.

Effet sur l'équation du temps.

2872. Cette seconde partie de la nutation en ascension droite affecte les retours du soleil au méridien, & l'on est obligé d'en tenir compte dans le calcul de l'équation du temps (970). La première partie de la nutation n'y entre point, parce que celle-ci ne change que le lieu de l'équinoxe, elle ne change pas le point de l'équateur auquel un astre répond, & par conséquent ne change rien à la durée de ses retours au méridien; c'est la seconde partie de la nutation qui seule affecte ces retours, en faisant que l'astre réponde à un point physique de l équateur tel que *V* différent du point *T* auquel il répondoit, de la quantité *VX*; c'est pour cela que j'ai mis cette partie de la nutation à la *pag.* 46 des tables de cet ouvrage, & j'en ai donné l'explication aux *pages* 18 & 38 des mêmes tables.

Corrections de la nutation en supposant une ellipse.

2873. Tous les calculs de nutation que nous venons d'expliquer supposent comme dans l'hypothèse de M. Machin, que le pole décrit un cercle; cependant M. Bradley avoit remarqué lui-même que quelques observations avoient paru différer un peu de la théorie que nous avons exposée, & que les résultats des observations de α de Cassiopée & de η de la grande Ourse se

trouvoient un peu rapprochés en supposant au lieu du petit cercle décrit par le pole une ellipse qui n'eût que 16″ de diamètre de *D* en *B* dans le sens du colure des équinoxes, & qui en eût 18 dans le sens du colure des solstices ; mais comme cela n'étoit pas suffisant pour faire disparoître entièrement les inégalités, M. Bradley renvoyoit à la théorie la détermination de cet élément. *Fig.* 243.

Si l'on consulte les *Recherches sur la précession des équinoxes*, de M. d'Alembert, on trouve que l'ellipse décrite par le pole doit être encore plus étroite, le petit axe doit être au grand comme le cosinus de $23^\circ \frac{1}{2}$ est au cosinus du double (3574).

Il est vrai que l'on peut avec la seule hypothèse du cercle représenter, pour ainsi dire, les observations avec toute la précision des observations même ; ainsi l'on pourroit se contenter des tables de la nutation en déclinaison & de la seconde partie de la nutation en ascension droite qui ne sont calculées que dans l'hypothèse du cercle, & négliger la correction qui dépend de l'ellipse. Cependant pour ne rien omettre d'intéressant à cet égard, j'ai calculé la table XII. *pag.* 182 de mon recueil, pour réduire à l'hypothèse de l'ellipse les quantités prises dans les tables qui ne seroient calculées que dans l'hypothèse du cercle.

2874. Cette correction, n'a encore été expliquée dans aucun livre, elle peut se calculer de la manière suivante. Soit *E* (*fig.* 242) le pole de l'écliptique ; *P* le lieu moyen du pole de l'équateur, *M* le lieu vrai du pole dans l'ellipse *RQV*, *O* son lieu dans le cercle, on suppose que le lieu *M* dans l'ellipse soit sur la perpendiculaire *NMO* ; & que le rapport entre les axes *RP* & *PQ* soit celui de 9″ à 6″ 7, comme on le déduit des formules de M. d'Alembert, en faisant les substitutions avec soin, *NM* est à *NO* dans le même rapport, donc 9″ à 6″ 7, comme la tang. de *NPO* ou de la longitude du nœud est à la tangente de *NPM*, égale à la longitude du nœud corrigée & telle qu'il faut l'employer dans les formules précédentes. Connoissant l'an- *Fig.* 242.

Fig. 242. gle NPM, on dira la fecante de l'angle NPO eft à la fecante de NPM comme PO eft à PM, ou ce qui eft plus commode, cof. NPM : cof. NPO :: PO : PM, car les fecantes font en raifon inverfe des cofinus. Ainfi le lieu vrai du pole en M eft déterminé par l'angle RPM, qu'il faut employer à la place de l'angle RPO, & par la longueur PM qui doit fervir de bafe aux calculs des équations précédentes dans lefquels nous avions employé $PO = 9''$. La valeur de PM, qui eft la diftance du pole vrai au pole moyen, fe trouve dans la feconde colonne de la table XII. *pag.* 182 du recueil que j'ai cité. Les colonnes fuivantes donnent la différence entre une équation calculée fur une bafe PO & celle qui auroit été calculée fur PM; celle-ci eft toujours la plus petite; ainfi la correction eft toujours fouftractive.

Par exemple, dans la table V. *pag.* 178. on trouveroit la plus grande nutation de 22″ 8 pour trois fignes de la longitude du nœud, en fuppofant un cercle, mais la diftance des poles eft alors de 6″ 7; il faudra dire 9″ : 6″ 7 :: 22″ 8 eft 16″ 8, & 16″ 8 fera la nutation toute corrigée, c'eft-à-dire, la nutation dans l'ellipfe, plus petite de 6″. Cette différence 6″ eft l'équation que l'on trouveroit dans la table XII. fi elle étoit étendue jufqu'à 22″ 8 au lieu d'être bornée à 16″.

Correction du nœud. 2875. Ainfi pour calculer la nutation dans l'ellipfe il faut diminuer la diftance des poles, & employer PM au lieu de PO; il faut auffi corriger la longitude du nœud ou l'angle RPO, en retranchant l'angle MPO, qui peut aller à 8° 26′; car l'angle OPS (*fig.* 243) que nous avons employé pour calculer la nutation (2869) doit être corrigé de la même quantité; on trouve cette correction par l'analogie expliquée ci-deffus (2874); la correction eft nulle quand le pole eft en A ou en B; on en trouve une table à la *pag.* 181 du recueil que j'ai cité, de même que dans la connoiffance des temps de 1765 & dans celle de 1766. Ainfi des tables déja faites par les formules précédentes & avec l'hypothèfe circulaire, peuvent fe corriger, au moyen de cette double attention; c'eft-à-dire,

à-dire, qu'en ſe ſervant de ces tables, il faut employer le lieu du nœud corrigé; & enſuite appliquer à la nutation trouvée, la correction qui provient de la diſtance des poles.

2876. La nutation en longitude dans l'ellipſe ſe calcule facilement : on multiplie la diſtance des poles *PM* par le ſinus de l'angle *NPM*, c'eſt-à-dire, de la longitude du nœud corrigée, & l'on diviſe le produit par le ſinus de $PE = 23° \frac{1}{2}$; elle eſt de 16″ 8 quand le nœud eſt dans les ſolſtices, & que la diſtance des poles n'eſt que de 6″ 7; c'eſt ainſi que j'ai calculé la nutation en longitude dans l'ellipſe (*pag.* 31 des tables de cet ouvrage). Règles pour la nutation dans l'ellipſe.

La première partie de la nutation en aſcenſion droite dans l'ellipſe ſe calcule de même en employant la tangente de $23° \frac{1}{2}$ au lieu du ſinus (2870). (*Table* VII. *de mon recueil*, *pag.* 179).

2877. Pour calculer la ſeconde partie de la nutation en aſcenſion droite dans l'ellipſe, on ajoute le logarithme de la tangente de la déclinaiſon de l'étoile, celui de la diſtance des poles, & celui du coſinus de la différence entre l'aſcenſion droite de l'étoile & celle du nœud corrigé.

2878. La nutation en déclinaiſon ſe trouvera en multipliant la diſtance des poles (2874) par le ſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile moins la longitude du nœud corrigée. La table de l'équation de l'obliquité de l'écliptique (2861) eſt la ſeule qui n'exige aucune correction; en effet, ſoit que le pole ſoit en *O* ou en *M*, l'obliquité de l'écliptique eſt toujours égale à *EN*; ainſi la table VI. de mon recueil eſt également bonne pour le cercle & pour l'ellipſe.

2879. Exemple. Le 10 Juillet 1761, la longitude moyenne du nœud de la lune étant de $1^s\ 27° \ 26'$ on demande la nutation d'Aldebaran, dont l'aſcenſion droite étoit de $65° \ 34'$ & la déclinaiſon de $16° \ 1'$. On dira 9″ : 6″ 7 : : tang. $57° \ 26'$: tang. $49° \ 22'$. C'eſt le lieu du nœud corrigé, qu'il faut retrancher de l'aſcenſion droite de l'étoile $65° \ 34'$, & l'on aura l'argument $16° \ 12'$. On dira Calcul de la nutation dans l'ellipſe.

aussi cos. 49° 22′ : cos. 57° 26′ : : 9″ 0 : 7″ 4. C'est la distance du pole vrai au pole moyen.

Pour avoir la nutation en ascension droite on ajoutera le logarithme de 7″ 4 avec celui du sinus de 49° 22′, & l'on en retranchera celui de la tangente de 23° 28′, on aura le logar. de 13″ 0. C'est la première partie de la nutation en ascension droite, qui est soustractive, parce que le nœud est dans un des six premiers signes.

Pour trouver la seconde partie de la nutation en ascension droite, on ajoutera le logarithme de 7″ 4, avec celui du cosinus de l'argument 16° 12′, & celui de la tangente de la déclinaison 16° 1′, on aura le logarithme de 2″ 1; c'est la seconde partie de la nutation en ascension droite, soustractive, parce que l'argument est entre 9ˢ & 3ˢ, & que l'étoile est boréale; ainsi le total de la nutation en ascension droite sera — 15″ 1.

La nutation en déclinaison est le produit de 7″ 4, par le sinus de l'argument 16° 12′, c'est-à-dire, 2″ 1, additive à la déclinaison moyenne, parce que l'argument 16° 12′ est entre 0 & 6 signes, & que l'étoile est boréale.

C'est ainsi que l'aberration & la nutation ont mis dans les calculs de l'astronomie moderne, une longueur qui seroit quelquefois rebutante sans le secours des tables particulières. Pour y remédier, j'ai mis dans le livre de la connoissance des temps, ou des mouvemens célestes, depuis l'année 1760 inclusivement, jusqu'à l'année 1772, les aberrations & les nutations de 263 étoiles principales, sous une forme très-commode pour les calculateurs, & j'espère les continuer dans les volumes suivans; on trouvera celles des étoiles de la première grandeur à la fin des tables de cet ouvrage.



LIVRE DIX-HUITIEME.

ASTRONOMIE DES SATELLITES.

LES SATELLITES de Jupiter ſont quatre petites planètes qui tournent autour de Jupiter, comme nous l'avons indiqué dans la figure 47; Galilée les appelloit *Medicea Sydera*; Hévélius les nommoit *Circulatores Jovis*, *Jovis comites*; ils ſervent continuellement aux aſtronomes pour déterminer les différences de longitudes entre les différens pays de la terre (2494); il importoit donc beaucoup d'avoir une théorie ſûre & exacte de leurs mouvemens, & pluſieurs aſtronomes y ont travaillé avec la plus grande aſſiduité; c'eſt ce qui m'engage à en parler ici fort au long, d'autant plus que cette matière n'a été traitée juſqu'ici dans aucun livre d'aſtronomie avec un détail ſuffiſant.

2880. Les quatre ſatellites de Jupiter furent apperçus par Galilée le 7 Janvier 1610 [a], peu après la découverte des lunettes d'approche (2283); Simon Marius prétendit les avoir vus dès le mois de Novembre précédent [b], & il publia des tables de leurs mouvemens qui ſe trouvèrent très-défectueuſes; Gaſſendi aſſure dans la vie de M. de Peireſc, que celui-ci fut un des premiers après Galilée & Reineri, à travailler conjointement avec Morin, &c. pour réduire en tables les mouvemens des ſatellites. Hodierna ayant fait quelques obſervations vers l'an 1655, publia des tables, qui, fondées ſur un trop petit nombre d'obſervations, ſe trouvèrent fort imparfaites; on n'eut de tables un peu exactes des mouvemens des ſatellites qu'en 1668, par M. Caſſini; il en donna d'autres encore en 1693; M. Pound en donna auſſi en 1719, dans les Tranſactions Phi-

Découverte des ſatellites.

(a) *Nuncius Sydereus*, *Florentiæ*, 1610. *Il Saggiatore*, 1613.

(b) *Mundus Jovialis*, *anno* 1609 *detectus*, *inventore & autore Simone Mario*, *Norimb.* 1614.

losophiques, *n°*. 361. Les tables de M. Bradley remises à M. Halley en 1718, n'ont été publiées qu'en 1749. (2881) Celles dont nous nous servons aujourd'hui pour calculer les éclipses des satellites de Jupiter, sont de M. Wargentin; il en avoit donné une première édition en 1746. (*Acta Societ. Reg. Scient. Upsaliensis ad an.* 1741), je les ai fait réimprimer en 1759, considérablement augmentées par l'auteur, à la suite des tables de Halley; on en trouvera une troisième édition dans cet ouvrage, d'après un nouveau manuscrit de M. Wargentin. C'est à l'explication de ces tables & de leur construction, que se réduit une grande partie de ce que j'ai à dire sur la théorie des satellites de Jupiter.

2882. La première chose qu'on doit faire pour construire les tables, est de déterminer les temps des révolutions; pour cela on pourroit observer plusieurs fois le moment où chaque satellite paroîtroit en conjonction avec Jupiter; mais afin que les conjonctions observées de la terre soient les mêmes que les conjonctions vues du soleil, il faudroit choisir pour déterminer les révolutions, les conjonctions des satellites qui arrivent quand Jupiter est en opposition; car alors si le satellite passe au-dessus, ou au-dessous du disque de Jupiter, (& il en est de même des satellites de Saturne), le moment où il répond au centre de Jupiter est celui de la conjonction vue du soleil & vue de la terre. On a encore d'une manière plus facile & plus commode les conjonctions vues du soleil, par le moyen des éclipses (2917); car lorsqu'un satellite est au milieu de l'ombre que Jupiter répand derrière lui, il est évident que le satellite est en conjonction avec Jupiter, puisqu'il est sur la ligne menée du soleil à Jupiter. L'intervalle d'une éclipse à l'autre sera la durée d'une RÉVOLUTION SYNODIQUE (1173); c'est-à-dire, d'une révolution par rapport au soleil; & ce sont presque les seules révolutions dont on fasse usage. On a soin de comparer entre elles des conjonctions très-éloignées, pour mieux compenser les inégalités des satellites, celles de Jupiter, & les erreurs inévitables dans les observations; on trouvera ces révolu-

Méthode pour observer leurs révolutions synodiques.

tions calculées avec le plus grand ſoin, à l'art. 2973, & dans la ſeconde ligne de la table de l'art. 2972, telles que M. Wargentin, les a déduites des obſervations les plus récentes.

2883. LA RÉVOLUTION PÉRIODIQUE eſt le retour d'un ſatellite au même point de ſon orbe, ou au même point du ciel vu de Jupiter, après avoir fait 360°; cette révolution périodique eſt un peu plus courte que la révolution ſynodique; celle-ci ne le rameneroit pas juſqu'à l'ombre de Jupiter qui pendant ce temps-là s'eſt avancé lui-même, d'une certaine quantité dans ſon orbite, tout ainſi que nous l'avons expliqué pour la lune (1418). Nous ne parlerons guères que des révolutions ſynodiques; ce ſont les ſeules que nous puiſſions immédiatement obſerver, & celles dont dépendent les éclipſes qui ſont aujourd'hui les ſeules choſes que l'on obſerve; cependant on trouvera dans la table des élémens (2972), les révolutions périodiques des quatre ſatellites par rapport aux équinoxes. Pour avoir les révolutions périodiques par le moyen des révolutions ſynodiques obſervées, il faut faire la proportion ſuivante; 360° plus le mouvement de Jupiter, pendant une révolution ſynodique, ſont à la durée de cette révolution ſynodique obſervée, comme 360° ſont à la durée de la révolution périodique. Révolutions périodiques.

2884. Connoiſſant les révolutions des ſatellites, il faut auſſi connoître leurs diſtances par rapport au centre de Jupiter, en les meſurant dans le temps de leur plus grande élongation, avec un micromètre ou un héliomètre (2433); il ſuffit même de meſurer la diſtance d'un ſeul, les autres diſtances ſe calculent aiſément par le rapport conſtant qu'il y a entre les carrés des temps & les cubes des diſtances, comme nous le dirons bientôt (2887). Diſtances des ſatellites.

C'eſt ainſi qu'on a trouvé les diſtances ou les élongations telles que je les ai rapportées, dans la table de l'article 2972 d'après Newton; celle du 4ᵉ. ſatellite a été trouvée par M. Pound de 8′ 16″ avec un micromètre appliqué à une lunette de 15 pieds, & celle du

3e ſatellite de 4′ 42″ avec une lunette de 123 pieds. Les deux autres ont été concluеs par le calcul, de 2′ 56″ 47‴, & 1′ 51″ 6‴. (Newton, L. III.).

Comme il eſt plus commode d'exprimer ces diſtances en demi-diamètres de Jupiter, & en centièmes de ce même rayon, c'eſt auſſi la forme que l'on emploie; on trouvera ces diſtances dans la table des élémens (2972), telles qu'elles furent déterminées par M. Caſſini (*Elem. d'aſtr. pag.* 633); par exemple, la diſtance du premier ſatellite eſt de 5, 67, c'eſt-à-dire, 5 demi diamètres de Jupiter, & 67 centièmes, ou deux tiers; par-là on trouveroit aiſément leurs diſtances réelles, car le diamètre de Jupiter eſt environ onze fois plus grand que celui de la terre (1398). Il ſuffiroit donc de multiplier par 11 les diſtances que nous donnons en demi-diamètres de Jupiter, pour les avoir en demi-diamètres de la terre, ou par 15416 pour les avoir en lieues.

Diſtance en lieues.

2885. Le diamètre de Jupiter vu du centre du ſoleil dans ſes moyennes diſtances au ſoleil, ou vu de la terre dans ſes moyennes diſtances à la terre, eſt de 37″ $\frac{1}{4}$ (1393); ſon demi-diamètre eſt donc 18″ $\frac{5}{8}$. Si l'on multiplie cette quantité par les diſtances exprimées en demi-diamètres de Jupiter, on aura ces mêmes diſtances en minutes & en ſecondes, telles qu'on les obſerve quand Jupiter eſt dans ſes moyennes diſtances à la terre; mais elles peuvent augmenter enſuite ou diminuer d'un cinquième à cauſe de la diſtance de Jupiter, plus ou moins grande par rapport à la terre. Les diſtances des ſatellites en minutes & en ſecondes, peuvent ſervir à comparer les diſtances de ces ſatellites avec celles des planètes au ſoleil; ſuppoſons, par exemple, qu'on veuille prendre la diſtance de Vénus au ſoleil pour unité, ou pour échelle commune, & qu'on demande la diſtance du quatrième ſatellite par rapport au centre de Jupiter; on fera cette proportion: la diſtance de Vénus au ſoleil 723 (art. 1222), eſt à celle de Jupiter comme 1 eſt à 7, 1903 diſtance de Jupiter au ſoleil; on dira enſuite le rayon eſt au ſinus de 8′ 16″, élongation du ſatellite, comme 7, 1903 eſt à 0, 01729, diſtance du

satellite, en parties de celle de Vénus; nous en ferons usage dans le XXIIe. livre (3405). Cette distance est celle que Newton a employée.

2886. C'est d'après le diamètre supposé de 37″ ¼, que Newton nous donne les distances d'une manière un peu différente, savoir, 5, 965; 9, 494; 15, 141; 26, 63; (Newton, *pag.* 390 & 391); il rapporte les distances suivant différens observateurs, mais il s'en tient à celles que nous venons de donner.

2887. Wendelinus en comparant les distances des satellites avec les durées de leurs révolutions périodiques, remarqua que la loi de Képler (1224), y étoit observée, aussi bien que dans les planètes (*Astr. ref.* 371); en effet, si l'on prend le carré de 1j 18h 28′, & celui de 16j 16h 32′, ou plus exactement les temps périodiques du premier & du 4e. satellite par rapport aux étoiles fixes; & si l'on prend aussi les cubes de leurs distances 5, 67 & 25, 30, on aura (en ne prenant que les premiers chiffres), les nombres 6642, 5775, 1820, 1619, qui sont véritablement en proportion.

On y observe la loi de Képler.

2888. Les révolutions des satellites (2882), étant additionnées successivement jusqu'à ce qu'elles forment des nombres semblables, on trouve à peu-près les périodes suivantes.

Retour des satellites à même configuration.

247	révolutions du I.	font	437j	3h	44′
123	révolutions du II.	font	437	3	42
61	révolutions du III.	font	437	3	36
26	révolutions du IV.	font	435	14	16

Ainsi dans l'intervalle de 437 jours, les 3 premiers satellites reviennent à une même situation entre eux, à 8′ près; cette période nous servira quand nous parlerons des attractions réciproques des satellites (2900, 2969); & des inégalités qui en résultent, sur-tout dans les trois premiers.

INEGALITÉS DES SATELLITES.

Inégalité qui vient de la parallaxe annuelle.

Fig. 244.

2889. La première & la plus grande inégalité qu'on ait remarquée dans les révolutions des ſatellites, par rapport au diſque de Jupiter, eſt celle qui eſt produite par la parallaxe annuelle (1141); ſoit *S* le ſoleil (*fig.* 244), *I* le centre de Jupiter, *B* un ſatellite en conjonction ſur la ligne des centres, ou ſur l'axe de l'ombre, *T* le lieu de la terre, *TIG* le rayon mené de la terre par le centre de Jupiter; l'angle *TIS* égal à l'angle *BIG* eſt la parallaxe annuelle de Jupiter, qui peut aller à 12°; il faut alors que le ſatellite arrive de *B* en *G* & parcoure 12° de ſon orbite, pour nous paroître en conjonction ſur la ligne *TIG*, quoique ſa véritable conjonction ſoit arrivée au point *B*; ces 12°, font $1^h\ 25'$ de temps pour le premier ſatellite, $2^h\ 50'$, $5^h\ 44'$ & $13^h\ 24'$ pour les autres; telle eſt l'inégalité qu'on trouve entre les révolutions des ſatellites, ou leurs retours obſervés de la terre, quand on les compare au diſque apparent de Jupiter, & qu'on obſerve les paſſages des ſatellites ſur ce diſque; mais quand on ſe ſert des éclipſes pour connoître les révolutions, on n'eſt point expoſé à cette inégalité; nous en parlerons cependant quand il s'agira des obſervations (2988), parce que la ſituation apparente des ſatellites en dépend.

2890. Je paſſe aux inégalités qui ont lieu par rapport à la ligne des centres *SIB*, & qui affectent les retours des ſatellites à leurs conjonctions, & les intervalles des éclipſes. Nous avons ſuppoſé dans la recherche des périodes (2882), qu'on avoit pris un intervalle de temps aſſez long pour que les inégalités fuſſent fondues & compenſées; ſi dans la recherche des révolutions ou des moyens mouvemens, on ne prenoit que l'intervalle d'une ſeule révolution du ſatellite, le réſultat ſeroit affecté des inégalités de Jupiter, & de celles du ſatellite; mais ſi l'on compare des obſervations éloignées d'une période entière de Jupiter, ou de pluſieurs, c'eſt-à-dire, de 12, de 24

ans,

ans, &c. tout ſera compenſé, & l'on aura exactement le mouvement moyen, abſtraction faite de l'inégalité des retours; on parvient enſuite à connoître ces inégalités, en comparant entre eux les intervalles des différentes éclipſes; intervalles qui devroient être toujours égaux, ſi le mouvement n'étoit pas altéré par des variations conſidérables.

2891. La plus grande inégalité dans les retours des conjonctions & des éclipſes, eſt celle qui vient de l'inégalité du mouvement de Jupiter; car la différence entre le retour d'une conjonction & une révolution périodique complète du ſatellite, dépend du mouvement de Jupiter vu du ſoleil dans cet intervalle de temps (1421), lequel eſt irrégulier; donc les éclipſes par cela ſeul ne reviendront point dans des intervalles de temps égaux. L'intervalle entre deux éclipſes eſt égal à une révolution du ſatellite, plus le temps qu'il lui faut, pour atteindre l'ombre de Jupiter, qui s'eſt avancée autant que Jupiter lui-même, mais inégalement; or l'équation de Jupiter étant de 5° 34′ (1274), tantôt additive, tantôt ſouſtractive, la ſomme de tous les petits intervalles dont chaque révolution ſynodique excède chaque révolution périodique, peut monter à plus de 11°.

De la grande inégalité des conjonctions.

2892. Soit *ABP* (*fig.* 245), l'orbite de Jupiter, *S* le ſoleil, *F* le foyer ſupérieur de l'ellipſe, autour duquel le mouvement de Jupiter eſt ſenſiblement uniforme (1252); ſuppoſons un ſatellite qui dans une période de Jupiter faſſe un nombre complet de révolutions périodiques; que Jupiter ait fait le quart de ſa révolution en temps, c'eſt-à-dire, que l'angle *AFB* qui exprime l'anomalie moyenne, ſoit de 90°; le ſatellite doit auſſi avoir achevé le quart des révolutions périodiques qu'il peut faire pendant une période de Jupiter, & être parvenu au point *H* qui répond dans le ciel au même point que le lieu moyen de Jupiter; mais le ſatellite arrivera en *K*, où ſe fait la conjonction avec Jupiter, & ſera éclipſé, long temps avant que d'être arrivé en *H*; la différence *KH* meſure l'angle *KBH* égal à l'angle

Fig. 245.

FBS, qui eſt l'équation du centre de Jupiter, c'eſt-à-dire, 5° 34′ (1274), le premier ſatellite emploie 0^h 39′ 25″ à parcourir 5° 34′ de ſon orbite; ainſi les éclipſes que l'on obſerve devront avancer de 39′ 25″ au bout de 3 ans; ſix ans après, lorſque Jupiter ſera dans la partie oppoſée de ſon orbite elles retarderont d'autant.

Valeur de la plus grande équation.

2893. Pour trouver la quantité de cette équation dans chaque orbite des ſatellites on fait cette proportion : 360° ſont à la durée de la révolution ſynodique, comme 5° 34′ 1″ ſont à un quatrième terme; on les trouvera calculées exactement dans la table de l'art. 2972. M. Wargentin les ſuppoſe de 39′ 22″; 1^h 19′ 13″; 2^h 39′ 42″; & 6^h 12′ 59″. Tel eſt le fondement de la plus grande inégalité des conjonctions & des éclipſes des ſatellites; dans nos tables elle a pour argument le nombre *A*, qui eſt l'anomalie moyenne de Jupiter, calculée en dixièmes de degrés; elle eſt égale à l'équation même de Jupiter convertie en temps à raiſon de la révolution ſynodique du ſatellite; mais l'équation de Jupiter étant variable (1274), on eſt obligé de changer la valeur de cette équation, comme nous le remarquerons dans l'uſage des tables, *pag.* 172.

L'inégalité qui dépend de l'excentricité de Jupiter, & que je viens d'expliquer, fut la première que M. Caſſini employa dans le calcul des éclipſes; mais il remarqua bientôt qu'elle ne ſuffiſoit pas pour expliquer toutes les différences qui s'obſervoient entre les retours de ces éclipſes. Il employa d'abord dans ſes éphémérides certaines équations empiriques, c'eſt-à-dire, que l'obſervation lui indiquoit, ſans en connoître la loi ni le principe; & nous en employons encore de ſemblables, du moins pour le troiſième ſatellite (2903).

Propagation ſucceſſive de la lumière.

2894. La première inégalité dont on ait apperçut la véritable cauſe, eſt celle qui vient de la propagation ſucceſſive de la lumière. Soit *S* (*fig.* 245) le ſoleil; *ABP* l'orbite de Jupiter, *TVR* l'orbite de la terre dont le diamètre *TR* eſt de 66 millions de lieues; la lumière que Jupiter nous réfléchit, eſt un corps dont l'impreſ-

ſion doit arriver juſqu'à nous, pour nous faire appercevoir Jupiter & ſes ſatellites ; le mouvement de ce corps ne ſauroit être d'une vîteſſe infinie, il lui faut un certain temps pour arriver de *T* en *R*; ainſi quand la terre eſt en *T*, Jupiter étant en oppoſition, ſa lumière arrive plutôt à nos yeux que quand la terre eſt en *R*, Jupiter approchant de ſa conjonction; on obſerva en effet que les éclipſes des ſatellites arrivoient environ un quart d'heure plus tard quand la terre étoit vers *R*, que quand elle étoit en *T*. *Fig.* 145.

2895. Nous voyons que le 22 Aout 1675, M. Caſſini publia un petit écrit pour annoncer les configurations des ſatellites, & qu'il y parloit de la propagation ſucceſſive de la lumière, ſur laquelle M. Romer lut ſa diſſertation à l'académie le 22 Novembre ſuivant. (*Regiæ ſcientiarum academ. hiſtor. authore Jo. Bapt. Duhamel*, édition de 1698, *pag.* 145).

M. Romer la découvre.

« M. Romer expliqua très-ingénieuſement (dit M. » Caſſini), une de ces inégalités qu'il avoit obſervées » pendant quelques années, dans le premier ſatellite, par » le mouvement ſucceſſif de la lumière, qui demande plus » de temps à venir de Jupiter à la terre lorſqu'il en eſt plus » éloigné, que quand il en eſt plus près; mais il n'exa» mina pas ſi cette hypothèſe s'accommodoit aux autres » ſatellites qui demanderoient la même inégalité de temps: » il m'eſt arrivé ſouvent, qu'ayant établi les époques des » ſatellites dans les oppoſitions avec le ſoleil, où les iné» galités ſynodiques doivent ceſſer, & les ayant comparées » enſemble pour avoir le moyen mouvement, lorſque » je calculois ſur ces époques, & ſur ce moyen mouve» ment les éclipſes arrivées près de l'une & de l'autre qua» drature de Jupiter avec le ſoleil, le moyen mouvement » calculé au temps de ces quadratures s'eſt trouvé différer » d'un degré entier, ou un peu plus, du vrai mouvement » trouvé par les obſervations immédiates; de ſorte que les » ſatellites dans les quadratures avoient environ un degré » d'équation ſubſtractive à l'égard du mouvement établi » dans les oppoſitions, d'où l'on pouvoit inférer que cette

» équation feroit doublée dans les conjonctions (Voyez *les » hypothèses & les tables des satellites*, &c. 1693, *in-fol. pag.* » 52) ».

2896. On voyoit clairement dans le premier satellite cette inégalité ; mais il y eut quelques difficultés pour les autres satellites, parce que l'inégalité sembloit beaucoup plus grande que dans le premier, suivant M. Maraldi. (*Mém. acad.* 1707). Cependant M. Halley en 1694, assuroit qu'il falloit nécessairement introduire cette équation de la même quantité dans tous les satellites. (*Phil. transf. n°.* 214) ; M. Pound fit la même remarque (*Philos. transf.* 1719), de même que M. de Fouchy (*Mém. acad.* 1732). M. Pound en publia une table, à laquelle il joignit la correction qui dépend de la distance de Jupiter à la terre (2898) ; M. Whiston les publia de nouveau en 1738. (*The longitude discovered by the Jupiter's planets*; By W. Whiston, 1738. *in*-8°.).

M. Maraldi (*Mém. acad.* 1741) ne doutoit plus après la découverte de l'aberration (2800) qui prouvoit invinciblement la propagation successive de la lumière, que cette équation ne dût être commune aux 4 satellites, & il trouvoit que les tables du 3e étoient fort rapprochées de l'observation par le moyen de cette équation ; M. Wargentin s'assura en 1746, de cette équation de la lumière, par la comparaison d'un grand nombre d'observations.

Explication de cette inégalité.

2897. La vîtesse avec laquelle les rayons de lumière parviennent depuis le soleil jusqu'à nos yeux, est telle que pendant le même temps la terre fait dans son orbite un arc de 20″ (2806); or la terre décrit un arc de 20″ en 0^h 8′ 7″ $\frac{1}{3}$ de temps à peu-près; la lumière met donc 8′ à parvenir du soleil à la terre. Soit *TVR* (*fig.* 245) l'orbite de la terre, *S* le soleil; lorsque la terre sera en *R*, Jupiter étant en conjonction avec le soleil, c'est-à-dire, en *A*, la lumière mettra pour venir jusqu'à nous 16′ 15″ de plus qu'elle n'en employoit lorsque la terre étoit en *T*, & Jupiter en opposition dans le point *A*; ainsi les éclipses des satellites arriveront 16′ 15″ plus tard dans

Fig. 245.

les conjonctions que dans les oppositions, & dans les autres temps à proportion ; c'est l'objet de l'équation principale de la lumière qui est contenue dans la table CXXV.

2898. La table que donne M. Wargentin de cette équation de la lumière, suppose que Jupiter soit dans ses moyennes distances ; mais sa distance au soleil est souvent plus grande à cause de l'excentricité de Jupiter, & la différence des distances est quelquefois égale à la moitié de *SR* ; ensorte que quand Jupiter en conjonction ou en opposition, est en même temps aphélie, il y a 4′ 5″ de plus que quand il est périhélie ; on en a fait une table qui dépend de l'anomalie de Jupiter ; c'est la petite équation de la lumière, *pag.* 165.

2899. La grande équation qui est causée par l'excentricité de Jupiter (2893), & les deux équations de la lumière, sont des causes d'inégalités communes à tous les satellites ; mais il y a d'autres équations particulières à chacun d'eux ; on les a reconnues par observation ; on en a déterminé les quantités à quelques minutes près, sans en connoître parfaitement la cause, & l'on applique une de ces équations empiriques à chacun des quatre satellites : suivant les tables de 1759, elle est de 3′ $\frac{1}{2}$ pour le premier, de 16′ $\frac{1}{2}$ pour le 2e, de 8′ pour le 3e, & de 1^h^ 3′ pour le 4e ; dans les nouvelles tables l'équation du 3e. est partagée en trois autres ; ces équations ne sont pas encore suffisantes, parce qu'on n'a pas un assez grand nombre d'observations pour connoître toutes les inégalités des satellites ; ces équations sont le résultat de plusieurs inégalités qu'il faudroit séparer, & dont nous ne connoissons jusqu'ici que la plus grande somme (2971).

Equations particulières à chaque satellite.

La manière de déterminer les équations particulières à chaque satellite, consiste uniquement à comparer beaucoup d'observations avec le calcul des tables, où l'on a employé les inégalités précédentes ; car alors la différence entre le calcul & l'observation forme l'équation que l'on cherche ; quand on a fait cette comparaison un

grand nombre de fois, l'on eſt en état de former une table de l'inégalité & d'en voir la période.

Equation du premier.

2900. L'équation du 1er ſatellite eſt de 3′30″ de temps, ce qui répond à un demi-degré de ſon orbite ; M. Bradley apperçut en 1719. que dans les années 1682, 1695 & 1718, c'eſt-à-dire, environ tous les 12 ans, les éclipſes du 1er ſatellite duroient environ 2h 20′, tandis que dans l'autre nœud, en 1677 & 1689 ces durées n'étoient que de 2h 14′ ; cette différence paroiſſoit prouver que dans le premier cas le ſatellite avoit un mouvement plus lent, & ſe trouvoit par conſéquent à une plus grande diſtance de Jupiter, ce qui indiquoit une excentricité dans ſon orbite ; cependant M. Bradley regardoit l'attraction des ſatellites comme étant la principale cauſe de cette inégalité, & il indiqua la période de 437 jours (*Philoſ. tranſ.* 1726, *n°.* 394); il en eſt parlé dans l'avertiſſement qui eſt à la ſuite de ſes tables inſérées parmi celles de M. Halley. Mais M. Wargentin avant la publication de ces tables détermina par les obſervations la loi & la quantité de cette équation du premier ſatellite, & il la fit entrer dans ſes tables publiées en 1746; ce qui leur donna un très-grand degré d'exactitude.

Depuis ce temps-là, M. Bailly s'eſt aſſuré que toutes les inégalités ſenſibles du premier ſatellite ſont dûes à l'action du ſecond, mais que la plus conſidérable de toutes eſt en effet de 3′30″ de temps, comme l'a trouvée M. Wargentin, avec une période de 437 jours. (*Eſſai ſur la théorie des ſatell. de Jupiter*, 1766, *pag.* 77). Cette équation eſt compriſe dans la table CXXIX.

Equation du ſecond.

2901. Le ſecond ſatellite eſt celui de tous qui a les plus grandes inégalités ; l'excentricité de ſon orbite peut bien y entrer pour quelque choſe ; cependant on approche beaucoup de l'obſervation par l'équation ſeule de 16′ ½, dont la période eſt de 437 jours 20h, & qui paroît provenir de l'attraction du 1er & du 3e ſatellite. M. Bradley indiqua le premier cette période de 437 jours, en aſſurant qu'elle ramenoit les erreurs des tables à-peu-près dans le même ordre. Il ajoutoit cependant que les der-

nières obſervations indiquoient une excentricité dans ſon orbite, & que d'autres fois le ſecond ſatellite s'écartoit d'une quantité ſenſible, en ſi peu de temps qu'on ne pouvoit attribuer ces différences qu'aux attractions des autres ſatellites. Le P. Grammatici eſſaya de fixer la quantité de cette équation, mais M. Wargentin eſt le premier qui l'ait déterminée exactement dans ſes tables, ce qui les a rendues fort exactes.

Le ſecond ſatellite eſt dérangé tout à la fois par le 1er & le 3e; mais cette double perturbation, ſuivant M. Bailly, ſe réduit à une ſeule équation principale, & produit l'équation de 16′ de temps en plus & en moins, que M. Wargentin avoit admiſe dans ſes tables de 1746, & qu'il a retenue dans les dernières.

2902. M. Maraldi apperçut que le calcul des éclipſes du troiſième ſatellite s'écartoit de l'obſervation lorſque Jupiter étoit dans ſes moyennes diſtances, (*Mém. acad.* 1741). M. Wargentin dans ſes tables de 1746 ſoupçonnoit une équation égale à celle du premier ſatellite, & d'une même période, mais dans ſes tables de 1759, il introduiſit une équation de 16′ de temps, en plus & en moins, dont la période étoit de 12 ans & demi; elle ſatisfaiſoit à la plus grande partie des inégalités au commencement du ſiècle; mais elle s'eſt trouvé répondre mal aux obſervations modernes, il ſembloit depuis quelques années qu'on auroit pu la négliger en ajoutant ſeulement 7′ aux époques, comme ſi elle eût été le réſultat de deux équations qui conſpiroient il y a 60 ans, & qui ſe détruiſoient en partie de nos jours. Equation du troiſième.

2903. Cette inégalité du 3e ſatellite paroît venir en grande partie de ſon excentricité, puiſque la période eſt de $12\frac{1}{2}$ ans; mais M. Bailly, d'après la théorie comparée à un grand nombre d'obſervations, penſe que l'équation de l'orbite n'eſt que de 10′ de degré; qu'il s'y joint cinq autres équations. La première de 25″ dûe à l'action du premier ſatellite, la ſeconde de 4′ 10″ dûe à l'action du ſecond, M. de la Grange la trouve de 4′ 41″ (ou 2′ 14″ de temps); la 3e de 1′ 19″ dûe encore à l'action du

ſecond, mais à raiſon de l'excentricité de l'orbite troublée du troiſième ſatellite ; enfin les deux autres équations de 17″ & de 59″ dûes à l'action du 4e ſatellite ; ces cinq équations peuvent produire dans certains cas juſqu'à 16′ 11″, ſuivant M. Bailly, quantité qui ne diffère pas beaucoup de 16′46″ de degré ou 16′ de temps, valeur de l'équation totale déterminée autrefois par les obſervations, & qui étoit employée dans les tables de 1759. M. Wargentin en a employé trois dans cette nouvelle édition, l'une de 5′ de temps, dont la période eſt de 437 jours, mais dont il n'a réglé la quantité que par l'examen des obſervations ; les autres de 9′ & de 5′ de temps, toujours additives, mais purement empiriques, c'eſt-à-dire, dont la cauſe n'eſt point aſſez éclaircie, & dont la loi n'eſt ajuſtée que ſur les ſeules obſervations. Il donne à ces équations des périodes d'environ 12 $\frac{1}{2}$ & 14 ans, & quoiqu'il convienne que cela paroît peu probable, il le propoſe en attendant que la théorie ou l'expérience nous ait éclairés là-deſſus. Peut-être, dit-il, l'excentricité de ce ſatellite a-t-elle quelque variation à laquelle ces deux équations peuvent répondre. L'équation qui naît de l'action du 4e ſatellite, ſuivant M. de la Grange, a une période de 49^j 14^h 12′ environ ; il ſoupçonne qu'elle pourroit être la cauſe des inégalités conſidérables, & des ſauts qu'on remarque d'un mois à l'autre, dans les conjonctions de ce 3e ſatellite (2971).

Equation du quatrième.

2904. On voit par les tables de Halley que dès l'année 1717, Bradley avoit trouvé par toutes les obſervations que l'orbite du 4e ſatellite étoit elliptique, & la plus grande équation de 0° 48′, ainſi que celle de Vénus (1270). Avant que ces tables euſſent été rendues publiques, M. Maraldi remarquoit en 1732, que les tables de M. Caſſini s'écartoient de l'obſervation de près de deux heures, toujours dans le même ſens, quand Jupiter revenoit au même point de ſon orbite, & que cette erreur étoit nulle dans les moyennes diſtances. Sa première idée fut de diminuer les époques des conjonctions de 0^h 55′, qui répondent à 0° 50′ ; au moyen de ce changement les erreurs diminuoient de moitié, devenoient tantôt additives, tantôt ſouſtractives ; elles

elles se trouvoient nulles quand Jupiter étoit dans ses apsides, & augmentoient comme l'équation de son orbite.

2905. Soit *S* le soleil (*fig.* 246), *AC* l'orbite de Jupiter, *A* son aphélie, *PBQ* l'orbite elliptique du 4e satellite, dont le grand axe est actuellement presque parallèle à celui de l'orbite de Jupiter, mais dans une situation renversée; lorsque Jupiter sera parvenu de *A* en *O*, le grand axe *PQ* prendra la situation *RV* parallèle à *PQ*; parce que le satellite & tous les points de son orbite reçoivent un mouvement de translation parallèle & égal à celui de Jupiter lui-même, & par lequel toutes les circonstances du mouvement relatif sont les mêmes, à peu près comme nous l'avons expliqué dans les art. 1075, 1095. Jupiter étant en *O* la conjonction du satellite arrivera en *F* sur la ligne des centres *SOF*, mais comme aux environs du point *R* où le satellite est le plus près de Jupiter sa vîtesse est plus grande que la vîtesse moyenne, il arrivera plutôt en *F* & sera éclipsé plutôt que suivant les tables, qui ne représentent à cet égard que le moyen mouvement.

2906. Dans la conjonction du 6 Avril 1708, M. Maraldi trouve pour le lieu du satellite sur son orbite 5^s $27^\circ 55' 26''$, & le 3 Mars 1753, $3^s 15^\circ 51' 7''$, le mouvement vrai a donc été de $9^s 17^\circ 55' 41''$, tandis que le mouvement moyen auroit été de $9^s 19^\circ 13' 5''$, c'est-à-dire, de $1^\circ 17' 24''$ plus grand. Entre l'observation de 1708, & celle du 4 Août 1759, il trouve le mouvement vrai plus grand de $34' 28''$ que le mouvement moyen; la demi-somme de ces deux erreurs ou de ces deux différences, est la plus grande qu'on ait pu appercevoir, d'où il suit qu'elle donne la plus grande équation du 4e satellite (1263), qui se trouve par-là de $0^\circ 55' 56''$. Ces observations indiquent aussi que le point de la plus grande vîtesse est du côté de l'aphélie de Jupiter, puisque le satellite en allant de $5^s 28^\circ$ à $3^s 16^\circ$ a un plus petit mouvement qu'en allant de $5^s 28^\circ$ à $9^s 20^\circ$ qui étoit sa longitude en 1759.

2907. Cette équation de l'orbite du 4e satellite va jusqu'à $1^h 0' 30''$ en plus & en moins, suivant les nouvelles

tables de M. Wargentin, & elle ſuffit pour le 4ᵉ ſatellite; les attractions des trois autres n'influent pas ſenſiblement ſur ſon mouvement, & M. Bailly n'a trouvé que deux ou trois petites inégalités qui viennent de l'attraction du ſoleil ſur ce ſatellite; mais M. Wargentin a employé dans ſes tables les cinq petites inégalités de Jupiter, produites par l'attraction de Saturne, & qui ſont ſenſibles, ſurtout dans les conjonctions du 4ᵉ ſatellite (2912).

2908. Le lieu de l'apſide ([a]) du 4ᵉ ſatellite, ſuivant M. Bradley étoit en 1717 à $11^s\ 8°$; mais il trouva que les obſervations de 1671, 1676 & 1677 exigeoient que l'on plaçât le lieu de l'apſide pour 1677 à $10^s\ 14°$, de ſorte qu'il lui attribua un mouvement progreſſif de ſix degrés en dix ans, ou de $36'$ par an; toutes les obſervations qu'il avoit faites, s'accordoient avec ſon hypothèſe.

Elémens de ſa théorie.

2909. Cependant M. Maraldi a reconnu enſuite que le mouvement de l'apſide étoit encore plus conſidérable, & qu'on repréſentoit toutes les obſervations du 4ᵉ ſatellite en ſuppoſant la plus grande équation de ſon orbite $0°\ 55'\ 56''$, l'époque de ſa longitude moyenne pour 1700, c'eſt-à-dire, le 31 Décembre 1699 à midi, $7^s\ 17°\ 18'\ 2''$, le lieu de ſon apſide, ou apojove, $10^s\ 29°\ 22'$ pour 1700, & le mouvement annuel de cette apſide $44'\ 15''$. Sur un nombre de 152 obſervations que M. Maraldi a calculées avec ces élémens, il n'y en a que 30 dans leſquelles le calcul diffère de l'obſervation de plus de $5'\frac{1}{2}$, parmi leſquelles quatre obſervations ſeulement diffèrent de $10'$ & trois de $13'$; c'eſt avoir beaucoup fait que d'être parvenu à les repréſenter avec une auſſi grande préciſion, ſans avoir tenu compte des inégalités que Jupiter lui-même éprouve par l'attraction de Saturne (2912); M. Wargentin qui les a fait entrer dans ſes tables doit y avoir ajouté par-là un nouveau degré de préciſion.

Effet de l'aplatiſſement de Jupiter.

2910. Ce mouvement de l'apſide du 4ᵉ ſatellite vient de l'attraction des autres ſatellites, (*M. Bailly*, *pag.* 107); ainſi que le mouvement de l'apogée de la

([a]) On a auſſi appellé *Apojove* l'apſide ſupérieure des ſatellites de Jupiter, quoique ce terme ſoit composé d'un mot Grec & d'un mot Lat.

lune vient de l'attraction du soleil ; cependant il y a dans l'aplatissement de Jupiter une cause qui peut donner aux apsides des satellites un mouvement considérable ; on en trouve le calcul par le P. Walmesley, dans les *Transf. philos.* de 1758, art. 90. par M. Bailly, dans les *Mémoires* de 1763, & dans sa théorie, *pag.* 65 ; & par M. Euler, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1753 ; le P. Walmesley semble persuadé que l'aplatissement de Jupiter occasionne seul un mouvement de 34′ par année dans le 4ᵉ satellite. M. Euler en supposant que les diamètres de Jupiter soient comme 8 est à 9, trouve 1° 32′ 40″ par année, & pour les trois autres satellites 288°, 57° 3′, 11° 10′ ; mais la supposition d'homogènéité, & l'erreur sur le degré d'aplatissement de Jupiter peuvent mettre dans ces calculs une incertitude considérable. Au reste, si l'orbite du premier satellite est très-peu excentrique, ce grand mouvement sera insensible dans les observations. M. Euler, le fils (*Jean Albert*), dans les mémoires de Berlin, pour 1765, *pag.* 414, examine les inégalités qui pourroient avoir lieu à raison de la figure du corps attiré, c'est-à-dire, de la figure des satellites ; mais il trouve qu'elles sont insensibles quant au mouvement progressif.

2911. On a négligé jusqu'ici dans les tables la réduction des longitudes des satellites, ou la différence entre la conjonction & le milieu de l'éclipse (1777) ; elle n'est que la moitié de celle qu'on trouveroit en calculant de la manière indiquée pour les éclipses de lune ; parce que les conjonctions se comptent sur l'orbite du satellite, & non pas sur celle de Jupiter, ce qui diminue la réduction de moitié. Cette réduction est employée dans les nouvelles tables, dont nous donnons ici l'explication ; elle va jusqu'à 1′ 29″ de temps, pour le 3ᵉ satellite, quand son inclinaison est de 3° 26′, & à 1′ 42″ pour le 4ᵉ ; elle est égale à la moitié du sinus verse de l'inclinaison, réduite en secondes, convertie en temps, & multipliée par le sinus du double de la distance au nœud (3639) ; elle est soustractive dans le premier & Réductions

le 3e quart de l'argument de latitude, soit qu'on compte du nœud ascendant ou du nœud descendant. Si l'on prenoit l'inclinaison vraie, c'est-à-dire, dans l'hypothèse elliptique (2959), on trouveroit la réduction du 3e satellite plus petite d'environ 10″, mais il n'y a que celle du 4e satellite que j'ai calculée moi-même, (*Table* CLIV), où cette attention soit observée.

Inégalités de Jupiter.

2912. Les inégalités de Jupiter doivent entrer aussi dans les tables des éclipses des satellites; & comme Jupiter s'écarte quelquefois de 4′ des meilleures tables que l'on ait, ces variatiations peuvent produire 28″ de temps sur le premier satellite; 57″ sur le second; 1′ 44″ sur le 3e; & 4′ 27″ sur le 4e; on ne sauroit donc attendre de ces tables une plus grande perfection jusqu'à ce que la théorie de Jupiter ait été perfectionnée, & qu'on ait déterminé exactement les dérangemens que Jupiter & Saturne se causent mutuellement. J'ai donné dans la connoissance des mouvemens célestes de 1763, 1764 & 1766, des tables des inégalités que Jupiter éprouve par l'action de Saturne, & de ce qui en résulte pour le 4e satellite; on trouvera toutes ces équations calculées dans les tables pour le commencement de chaque année. On pourroit aussi les calculer pour un temps quelconque par le moyen des tables de Jupiter. Ainsi pour le 3 Septembre 1763, l'on trouvera par les tables CXV & suiv. que la somme des cinq équations de Jupiter est de 9′ 59″; le 2e satellite emploie 2′ 22″ à les parcourir, à raison de 3j 13^h 18′ pour 360°. Ainsi l'effet de ces perturbations sur la conjonction du 2e satellite sera de 2′ 22″; c'est ainsi que je l'ai employé dans l'exemple. Il y a encore dans les conjonctions qu'on observe, quelques inégalités optiques, dont je parlerai à l'occasion des éclipses (2984), & d'autres inégalités produites par l'attraction mutuelle des satellites les uns sur les autres (2969), mais qui sont encore peu connues.

Des époques des conjonctions.

2913. Pour construire les tables des conjonctions des satellites, il ne suffit pas de connoître les inégalités des révolutions, il faut encore établir une époque dans laquelle

toutes les inégalités s'étant trouvées nulles, le lieu moyen & le lieu vrai des satellites aient été les mêmes, & la conjonction moyenne d'accord avec la conjonction vraie (2977); on peut même choisir l'observation quelconque d'une conjonction, la corriger par toutes les équations déja connues, pour la réduire à une conjonction moyenne sur l'orbite du satellite, & l'on aura une époque des conjonctions, j'en donnerai l'exemple & le calcul (2977).

Pour épargner aux calculateurs l'attention d'ajouter ou de retrancher les équations suivant les cas, M. Wargentin dans ses tables a diminué par avance toutes les époques, comme M. Pound l'avoit fait dans ses tables en 1719 (*Philos. trans.*), afin de rendre toutes les équations additives, excepté la grande équation, dont les changemens successifs ne permettent pas cette facilité de calcul; par-là il arrive qu'une équation est nulle dans le cas où elle auroit été la plus grande à soustraire, & que l'équation additive est quelquefois doublée.

2914. Ainsi la table des époques des conjonctions moyennes du premier satellite (tab. CXXVI), indique le moment où arrive à chaque année la première conjonction du satellite avec le lieu moyen de Jupiter, compté sur l'orbite du satellite, mais ce temps est diminué de $8' 7'' \frac{1}{2}$ équation de la lumière (2897).

Equations toujours additives.

Au moyen de ces $8' 7'' \frac{1}{2}$ que l'on ôte des époques, l'équation se trouve toujours additive; elle est la somme ou la différence de $8' 7'' \frac{1}{2}$ & de l'équation qui auroit lieu si les tables étoient construites à la manière ordinaire; par-là elle peut aller jusqu'à $16' 15''$, qui est le double de $8' 7'' \frac{1}{2}$. Il en est de même de toutes les autres équations, exceptés de celle qui dépend de l'excentricité de Jupiter; celle-ci étant variable, on n'a pu faire d'avance la soustraction d'une quantité constante (2893).

2915. Lorsqu'on découvre une nouvelle équation tantôt additive, tantôt soustractive, on retranche des époques le double de la plus grande équation, afin qu'elle soit toujours additive. On trouvera dans la table des élémens (2972), les époques des quatre satellites, c'est-

à-dire, la première conjonction moyenne de 1760, du moins telle qu'on l'emploie dans les tables. On voit, par exemple, que celle du second satellite arrivera le 1 Janvier 1760 à 14^h 59′ de temps moyen, mais ce temps est diminué de la somme des équations, & même encore d'un jour (2974). J'ai ajouté dans la même table les époques des longitudes moyennes pour 1700, c'est-à-dire, le point du ciel où chaque satellite paroissoit répondre la veille du 1 Janvier 1700, à midi de temps moyen, vu du centre de Jupiter, en comptant sur l'orbite de chaque satellite, d'après les tables de M. Cassini; enfin les moyens mouvemens, soit pour 365 jours, soit pour cent années Juliennes, avec lesquels on peut construire des tables (1326), & trouver les configurations (2987).

Epoques des argumens.

2916. A la suite des époques des conjonctions, j'ai mis les argumens des équations générales des satellites pour les mêmes époques. Le nombre *A* est l'anomalie moyenne de Jupiter, exprimée en dixièmes de degrés; il sert à trouver la grande équation, qui n'est autre chose que l'équation de l'orbite de Jupiter convertie en temps (2891); le nombre *B*, est la distance de Jupiter à la conjonction, en millièmes parties du cercle; l'équation de la lumière est proportionnelle au cosinus du nombre *B*.

DES ECLIPSES DES SATELLITES.

2917. Avant que de parler des éclipses des satellites, qui sont la partie essentielle de ce traité; il faut déterminer la largeur de l'ombre que les satellites traversent dans leurs éclipses. Cette ombre que Jupiter répand derrière son disque, n'est pas un cylindre parfait; parce que le soleil qui est le corps lumineux est plus grand que Jupiter; les rayons qui partent des deux bords du soleil & qui touchent les bords de Jupiter, sont donc des rayons convergens, & puisqu'on sait le rapport des diamètres de Jupiter & du soleil, on trouveroit aisément le point où les deux rayons vont concourir pour former la pointe du cône

De l'ombre de Jupiter.

d'ombre, d'où l'on déduiroit le diamètre de la ſection, dans la région de chaque ſatellite.

Mais cette méthode ne pourroit pas s'appliquer immédiatement aux éclipſes que nous obſervons, 1°, parce que la pénombre qui eſt plus ou moins grande, ſuivant qu'on approche des bords du cône d'ombre (1788), fait que l'obſcurité ne commence pas exactement au point que donneroit ce calcul; 2°, parce que les ſatellites ont un diamètre ſenſible & n'entrent dans l'ombre que peu-à-peu; d'où il ſuit que quand nous perdons le ſatellite de vue avec une lunette de 15 pieds, nous ne ſavons pas ſi ſon centre eſt exactement ſur le bord du cône d'ombre; & le calcul de la véritable largeur de l'ombre ne nous indiqueroit point le moment de l'immerſion.

2918. C'eſt donc par expérience qu'il faut déterminer le diamètre de l'ombre, c'eſt-à-dire, par la durée des éclipſes obſervées lorſqu'elles arrivent près des nœuds, & que les ſatellites traverſent l'ombre par le centre (2922).

Pour le premier & le ſecond ſatellite, on ne voit jamais l'immerſion & l'émerſion aux environs des nœuds; on voit ſeulement celles du 3e & du 4e ſatellite, auſſi-tôt que la parallaxe annuelle de Jupiter eſt d'environ 8°, ce qui arrive pendant une partie de l'année; ainſi pour les deux premiers ſatellites, l'on eſt obligé de comparer les immerſions qui arrivent quelques jours avant l'oppoſition, avec les émerſions qui arrivent quelques jours après; en déduiſant le nombre des révolutions entières qu'il a dû y avoir entre l'immerſion & l'émerſion; c'eſt ainſi qu'on a déterminé les demi-diamètres de l'ombre en temps pour chaque ſatellite, tels qu'ils ſont dans la table des élémens (2972); par exemple, celui du premier ſatellite eſt de $1^h\ 7'\ 55''$, c'eſt-à-dire, qu'il eſt $2^h\ 15'\ 50''$ dans l'ombre lorſqu'il la traverſe par le centre, & qu'il y demeure le plus long-temps.

Demi-diamètre de l'ombre en temps.

On eſt obligé de chercher auſſi les demi-durées du ſecond ſatellite, par les immerſions arrivées avant l'oppoſition, & les émerſions qu'on obſerve après l'oppoſition, quoique diſtantes d'un ou deux mois entre elles. Dans ces

cas-là, il faur avoir ſoin de choiſir, autant qu'il eſt poſſible, des obſervations faites avec les mêmes lunettes, les mêmes yeux, à pareilles diſtances de l'oppoſition, & telles que la bonté de chacune ſoit conſtatée par des obſervations précédentes ou ſuivantes, & dont la diſtance à l'oppoſition ſoit à peu-près entre 10 & 30 jours.

2919. La révolution ſynodique eſt à 360°, comme le demi-diamètre de l'ombre en temps, eſt au demi-diamètre en degrés; on en trouvera auſſi la valeur dans la table (2972); ainſi la plus grande demi-durée des éclipſes du 2e ſatellite étant 1h 25′ 40″, on a 6° 1′ 33″ pour le demi-diamètre de l'ombre en degrés de ſon orbite. On peut l'exprimer auſſi en demi-diamètres de Jupiter, en diſant, 1 : 9,494 : : ſin. 6° 1′ 33″ : 0,9967, c'eſt-à-dire, que le rayon de Jupiter eſt à celui de la ſection de l'ombre, à la diſtance du ſecond ſatellite, comme 1000 eſt à 9967. Ainſi le demi-diamètre de l'ombre eſt plus petit de $\frac{1}{303}$ que celui de Jupiter. Si l'on employoit la diſtance 9,00 avec M. Caſſini, l'on trouveroit 0,9466 plus petit de $\frac{1}{19}$, mais je me ſuis ſervi des diſtances de Newton, en calculant le demi-diamètre de l'ombre pour chaque ſatellite dans la table des élémens (2972).

Effet de l'excentricité.

2920. Le diamètre de l'ombre en temps ou la durée des éclipſes centrales qu'on ſuppoſe toujours la même, doit varier ſi les orbites des ſatellites ſont excentriques. Par exemple, pour le 2e, on trouve le demi-diamètre de l'ombre quelquefois 1h 25′, quelquefois 1h 27′; cela indique une excentricité. Dans le 4e ſatellite dont l'orbite eſt certainement elliptique (2904) la différence devroit être ſenſible dans certains cas; mais d'un autre côté le ſatellite eſt plus éloigné de Jupiter dans ſon apſide ſupérieure, & traverſe une ſection de l'ombre moindre que dans l'apſide inférieure. (*Mém.* 1762, *pag.* 75), & la différence eſt quelquefois conſidérable; ainſi l'on ne fait point uſage de ces conſidérations dans nos tables.

Inclinaiſon des orbites.

2921. Auſſi-tôt qu'on eut obſervé pluſieurs fois de ſuite les éclipſes des ſatellites de Jupiter on s'apperçut bientôt que les durées de leurs éclipſes n'étoient pas toujours

jours égales; quelquefois le 3e ſatellite n'eſt éclipſé que pendant 40′, quelquefois 3^{h} 34′. On vit même que le 4e ſatellite dans certains temps s'éclipſoit à chaque révolution, & qu'après quelques années il paſſoit au-deſſus de Jupiter ſans être éclipſé. Cela fit juger que les orbites des ſatellites n'étoient pas couchées dans le même plan que l'orbite de Jupiter; car ſi cela eût été, tous les ſatellites auroient été éclipſés à chaque révolution, & toujours pendant le même temps; ces différences dans la durée des éclipſes ſont la ſeule méthode qu'on emploie pour connoître les inclinaiſons des orbites.

2922. Il eſt néceſſaire d'expliquer ici la manière dont l'inclinaiſon des orbites produit l'inégalité dans les durées des éclipſes, & ſuivant quelle loi varie cette durée; car je ne connois aucun livre ou l'on ſoit entré dans le détail qu'exige cette matière. Lorſqu'un ſatellite traverſe le cône d'ombre par ſon centre, il eſt exactement dans la ligne droite qui joint les centres de Jupiter & du ſoleil; ainſi il eſt dans la commune ſection de ſon orbite avec celle de Jupiter, car il eſt à la fois & dans le plan de ſon orbite (puiſqu'il ne la quitte jamais), & dans celui de l'orbe de Jupiter, puiſque la ligne menée du ſoleil à Jupiter eſt toujours dans le plan de cette orbite. Le ſatellite étant alors dans la commune ſection de ſon orbite & de celle de Jupiter, il eſt évident que Jupiter y eſt auſſi; l'on peut donc alors dire que Jupiter eſt dans le nœud de ſon ſatellite; ainſi quand Jupiter eſt au degré de longitude, où répond un des nœuds de l'orbe d'un ſatellite (vu du centre de Jupiter), le ſatellite traverſe l'ombre par le centre & la durée de ſon éclipſe eſt la plus longue.

Eclipſes centrales des ſatellites.

Soit *SO* (*fig.* 249) la ligne des nœuds, ou la ligne ſur laquelle étoit Jupiter, quand le plan de l'orbite du ſatellite étoit dirigé vers le ſoleil, & que les ſatellites traverſoient l'ombre par le centre; ſuppoſons que Jupiter ait avancé de *O* en *I* avec l'orbite du ſatellite autour de lui, cette orbite reſtera toujours parallèle à elle-même (2905), & la ligne des nœuds ſera ſur une direction

Fig. 249.

AC parallèle à *SO*. Ainſi quand Jupiter s'éloigne du nœud, la ligne de l'ombre n'eſt plus dans la commune ſection des orbes de Jupiter & du ſatellite; donc le ſatellite venant à ſe trouver en oppoſition au point *M* ne ſera pas dans le plan de l'orbite de Jupiter, & ne ſera pas ſur la ligne des centres, mais au-deſſus ou au-deſſous.

2923. Quand Jupiter eſt dans le nœud d'un de ſes ſatellites, un obſervateur ſuppoſé dans le ſoleil ſe trouve dans le plan de l'orbite du ſatellite, & il la voit en forme de ligne droite; pour qu'il la vît toujours droite il faudroit qu'elle paſſât toujours par ſon œil, que la commune ſection ou la ligne des nœuds paſſât toujours par le ſoleil; pour cela il faudroit qu'elle fît le tour du ciel auſſi bien que Jupiter en douze ans, ce qui n'arrive point; la ligne des nœuds eſt à peu-près fixe dans le ciel; c'eſt-à-dire, parallèle à elle-même, & dirigée ſenſiblement vers le même point du ciel; quand Jupiter y a paſſé une fois il s'écoule ſix années avant qu'il y revienne.

La ligne des nœuds eſt fixe.

2924. Soient donc *NCIA* la ligne des nœuds, *ABCD* l'orbite du ſatellite qui traverſe en *A* & en *C* le plan de l'orbite de Jupiter; il faut concevoir que l'orbite du ſatellite, eſt relevée en *B* au-deſſus du plan de la figure, & ſe trouve un peu vers le nord; au contraire en *D* elle eſt un peu vers le midi, ou au-deſſous du plan de la figure; depuis *A* juſqu'en *B*, le ſatellite va toujours en s'élevant au-deſſus du plan de l'orbite de Jupiter; depuis *B* juſqu'en *C*, il revient vers ce plan, & depuis *C* juſqu'en *D*, il deſcend au-deſſous du plan, & il y revient depuis *D* juſqu'en *A*. Puiſque *B* eſt la limite, le point de la plus grande latitude, ou de la plus grande élévation du ſatellite au-deſſus du plan de l'orbe de Jupiter, ce ſatellite arrivé en *M* dans ſa conjonction ſupérieure où il eſt éclipſé, ne ſera pas encore à ſa plus grande latitude, & il ſera d'autant moins éloigné du plan de la figure ou de l'orbite de Jupiter, que l'angle *AIM* ſera moindre, ou ſon égal *SIN*. Or l'angle *SIN*, qui eſt la diſtance du ſatellite à ſon nœud, eſt égal à l'angle

ISO, ou à la diſtance qu'il y a entre le lieu *I* de Jupiter, & la ligne *SO* ſuppoſée fixe, à laquelle la ligne des nœuds *IN* reſte toujours parallèle, quel que ſoit le lieu de Jupiter; ainſi la latitude du ſatellite en *M* dépendra de l'arc *AM*, ou de langle *IOS*, diſtance de Jupiter à la ligne des nœuds *SO*, qui répond toujours vers le milieu de l'onzième ſigne de longitude.

2925. La quantité dont le point *M* s'élève au-deſſus du plan de l'orbite de Jupiter, eſt à la quantité dont la limite *B* s'en éloigne, comme le ſinus de *AM* eſt au ſinus de l'arc *AB*, c'eſt-à-dire, au rayon; car ſi deux cercles ſe coupent en *A* & en *C*; leur diſtance en différens points, tels que *M*, perpendiculairement au cercle incliné, ou à l'orbite du ſatellite, eſt comme le ſinus de la diſtance au point *A* (*3666*), c'eſt-à-dire, à l'interſection, cette diſtance étant meſurée ſur l'autre cercle, qui eſt l'orbite de Jupiter; ainſi la latitude du ſatellite en *M*, eſt comme le ſinus de la diſtance de Jupiter au nœud du ſatellite, meſurée ſur l'orbite de Jupiter.

2926. Lorſque par le mouvement de Jupiter dans ſon orbite le rayon *SI* eſt devenu perpendiculaire à la ligne des nœuds *SO* ou *IN*; le point *M* de la conjonction ſupérieure concourt avec le point *B*, qui eſt la limite de la plus grande latitude; alors l'angle de l'orbite avec le rayon viſuel *SIM*, eſt égal à l'inclinaiſon du ſatellite, par exemple, 3°; & l'orbite vue du ſoleil paroît ſous la forme d'une ellipſe, dans laquelle le grand axe eſt au petit comme le rayon eſt au ſinus de 3° (1828) en ne conſidérant pas le mouvement de Jupiter pendant la durée de la révolution du ſatellite, ou bien en conſidérant le ſatellite ſeulement par rapport à Jupiter. Soit *S* le ſoleil (*fig.* 250), *I* le centre de Jupiter, *IH* le rayon de l'orbite d'un ſatellite qui eſt dans un plan perpendiculaire à l'orbite de Jupiter, & qui eſt incliné ſur le rayon ſolaire de la quantité de l'angle *SIH*; on aura $IH : KH :: R :$ ſin. KIH, donc $KH = IH$ ſin. KIH, c'eſt la quantité dont le ſatellite paroîtra s'élever au-deſſus du plan de l'œil, dans le temps où l'ellipſe ſera la plus

Valeur du petit axe.

Pl. XXXIII. Fig. 250.

ouverte. Dans les autres positions de Jupiter par rapport au nœud, cette quantité diminuera comme le sinus de la distance de Jupiter au nœud (2925); ainsi appellant *I* la plus grande latitude, ou l'inclinaison du satellite, *D* la distance de Jupiter au nœud du satellite, comptée sur l'orbite de Jupiter, & *R* la distance du satellite à sa planète, ou le rayon de son orbite, on aura *R*. sin. *I*. sin. *D* pour la quantité dont le satellite paroîtra élevé au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, perpendiculairement à l'orbite du satellite, dans le moment de sa conjonction supérieure; il n'en faut pas davantage pour calculer les durées des éclipses.

Les orbites apparentes sont des ellipses.

2927. Cette élévation du satellite au-dessus de Jupiter est égale à son abaissement dans le point opposé; l'ellipse qu'il paroît décrire est donc plus ou moins ouverte, suivant que Jupiter s'éloigne de la ligne des nœuds; quand le petit axe de cette ellipse devient plus large que le cône d'ombre, le satellite passe au-dessus de l'ombre, comme on le voit dans la *fig.* 247; c'est ce qui arrive toujours au 4[e] satellite de Jupiter environ deux ans après le passage de Jupiter dans les nœuds des satellites. Quand Jupiter est à 30 degrés de la ligne des nœuds, l'ellipse (*fig.* 248) a la moitié de l'ouverture qu'elle avoit dans le cas précédent, parce que le sinus de 30° est la moitié du sinus total; alors le satellite traverse l'ombre malgré l'obliquité de son orbite.

Fig. 247 & 248.

2928. La section de l'ombre de Jupiter dans la région du satellite est représentée par le cercle *EDBF* (*fig.* 251) que je suppose perpendiculaire à la ligne des centres du soleil & de Jupiter; il est traversé par un diamètre *QB*, qui est une portion de l'orbite de Jupiter; *ED* est une portion de l'orbite du satellite, *CA* est la perpendiculaire sur cette orbite; c'est un arc qui vu du centre de Jupiter n'est autre chose que la latitude du satellite; son sinus seroit égal à sin. *I*. sin. *D* (3665); mais l'arc *CA* vu de Jupiter est sensiblement $=$ *R*. sin. *I*. sin. *D*. (2926). Comme il est plus commode pour le calcul des éclipses de rapporter toutes les parties de cette figure au demi-diamètre de

Fig. 251.

l'ombre (2918); c'est-à-dire, à la demi-durée des éclipses, qui est la plus grande de toutes, & qui est exprimée par CB, nous réduirons CB, CA & AD en secondes de temps ; nous exprimerons même la distance du satellite à Jupiter, ou le rayon de son orbite, en parties semblables, ou en secondes de temps, en mettant au lieu de R le temps que le satellite emploie à parcourir un arc de même longueur que le rayon de son orbite, c'est-à-dire, un arc de 57 degrés; car il n'importe pas que cette distance qu'on prend pour unité, soit en temps, en degrés, ou en demi-diamètres de Jupiter, ni même que le mouvement de Jupiter rende plus long le temps des 57°, parce que nous ne cherchons ici que le rapport entre la distance & l'arc parcouru pendant l'éclipse. Pour connoître le temps qui répond à un arc d'environ 57°, il suffit de faire cette proportion 360° sont à la révolution synodique, comme 57° ou 206265″ sont au temps cherché que j'appelle t; on le trouvera pour chaque satellite dans la table des élémens (2972). Ayant multiplié sin. I sin. D par ce nombre de secondes de temps, on aura CA en secondes de temps $= t$ sin. I sin. D ; on a aussi le rayon CD ou CB en secondes de temps, c'est la demi-durée de la plus grande éclipse, celle qui a lieu quand Jupiter est dans le nœud du satellite; enfin, c'est le demi-diamètre de l'ombre en temps (2918) que nous appellerons r.

Fig. 251.

Temps pour 57 deg.

Dans le triangle CAD rectangle en A, l'on a $CA = \sqrt{CD^2 - AD^2}$, & nommant d la demi-durée qui répond à AD, $CA = \sqrt{rr - dd} = R.$ sin. $I.$ sin. D (2928) ; donc prenant le temps qui répond à 57°, c'est-à-dire, t pour rayon, afin que tout soit exprimé en temps, l'on aura sin. $I = \frac{\sqrt{rr - dd}}{t \text{ sin. } D}$. On peut trouver l'inclinaison par cette formule, quand on connoît le demi-diamètre de l'ombre, & une demi-durée observée ; mais la difficulté d'évaluer ces carrés avec précision, nous oblige à employer des sinus (2930); on peut aussi mettre

Fig. 251. $\sqrt{(r+d)(r-d)}$, dont on a la valeur en prenant la demi-fomme des logarithmes de $r+d$ & de $r-d$.

2929. Pour avoir l'expreffion de la demi-durée & de l'inclinaifon, on confidère le triangle CAD, danslequel $CD : CA :: R :$ fin. ADC, dont le complément eft ACD, donc cofin. $ACD = CA$; or $CA = t$ fin. I. fin. D. Ainfi quand on aura l'inclinaifon d'une orbite & la diftance de Jupiter au nœud du fatellite on connoîtra CA & l'angle ACD, dont le finus AD mefure la demi-durée de l'éclipfe. Pour avoir cette demi-durée en temps on fera cette proportion, le rayon CB eft à la plus grande demi-durée en temps, ou au demi-diamètre de l'ombre, comme le finus AD, eft à la demi-durée que l'on cherche, c'eft-à-dire, qu'on multipliera le temps de la plus grande demi-durée par le finus de l'angle ACD, & l'on aura la demi-durée actuelle.

Exemple. On demande la demi-durée d'une éclipfe du 4e fatellite pour le 19 Novembre 1761, à 6 heures, en fuppofant l'inclinaifon de $2° 36'$, le lieu du nœud $10^s 17° 40'$, & la plus grande demi-durée $2^h 23'$. Le lieu de Jupiter fur fon orbite pour ce jour-là étoit $0^s 4° 23'$, ainfi fa diftance au nœud eft $1^s 16° 43'$, ou $46° 43'$. Donc

Log. fin. D.	986212
Log. fin. inclin. $2° 36'$.	865670
Log. fin. I. fin. D.	851882

Il faut y ajouter le logarithme du temps pour $57°$ (2928) afin d'avoir le log. de AC en fec. de temps, & en ôter le log. du rayon CD en fecondes, ou de $2^h 23' 0''$ pour avoir celui de $\frac{AC}{CD} =$ cof. ACD; ainfi le log. conftant 1,42895 qui eft le log. de t, ou du temps pour $57°$, moins celui du demi-diamètre de l'ombre, étant ajouté avec celui de fin. I fin. D, donne celui du cofinus de l'angle ACD.

Log. fin. I. fin. D.	8,51882
Logarithme de u	1,42895
Log. cofin. de l'angle ACD $27° 32'$.	9,94777
Log. du finus de ce même arc.	9,66489
Ajoutez le log. de r ou $2^h 23'$.	3,93349

Log. de la demi-durée 1h 6′ 6″. . . . . . 3,59838 Fig. 251.
On trouveroit 1h 6′ 8″ en employant les secondes de l'angle *ACD*.

2930. On a donc cette formule $\frac{t\,\text{sin. }I.\ \text{sin. }D.}{r}$ = cos. *ACD*; & le sin. de *ACD* multiplié par le demi-diamètre de l'ombre en temps (que j'appelle *r*) donne la demi-durée cherchée. Le tems par 57° se trouvera pour chaque satellite dans la table des élémens, aussi-bien que la valeur $\frac{t}{r}$ du temps par 57° divisé par le demi-diamètre de l'ombre, égale à la cotangente de l'arc décrit par le satellite, quand il traverse l'ombre par le centre; j'appelle cette valeur *u*, & j'appelle *d* la demi-durée que l'on cherche, afin qu'on ait *u*. sin. *I*. sin. *D* = cos. *ACD*, & *r*. sin. *ACD* = *d*, c'est la demi-durée de l'éclipse, en supposant l'ombre circulaire. (Voy. l'art. 2934).

Règle pour trouver la demi-durée.

2931. Cette même formule servira pour trouver l'inclinaison, ou pour trouver la distance au nœud, par le moyen de la demi-durée observée; car cette demi-durée étant divisée par *r* donne le sinus de l'angle *ACD*, & le cosinus de cet angle divisé par *u* donne la valeur de sin. *I*. sin. *D*; si donc on divise cette dernière quantité par sin. *I*, l'inclinaison étant supposée connue, l'on aura sin. *D*; mais si l'on divise par sin. *D*, le lieu du nœud étant donné, l'on trouvera sin. *I*. (Voyez aussi 3937).

Trouver l'inclinaison ou le nœud.

2932. Dans les règles précédentes j'ai supposé que l'orbite *AD* étoit une ligne droite au lieu d'être un arc de cercle, cette supposition ne peut produire aucune différence sensible, si ce n'est peut-être dans le premier satellite. Pour connoître à quoi elle peut aller, soit *N* le nœud du premier satellite, *CB* = *CD* = 9° 35′ 37″, c'est le demi-diamètre de l'ombre; *AD* l'arc décrit dans l'ombre lorsque *AD* est parallèle à *CB*, le satellite étant à 90° des nœuds, cet arc est de 9° 0′ 18″; dans le triangle rectiligne formé par les sinus des arcs *AC* & *CD*, on a $\frac{AD}{CD}$ = sin. *ACD*, donc le sinus de l'arc *AD* divisé par le sinus de *BC* ou *CD* donnera le cosinus de l'arc *BD*;

Exception pour le premier satellite.

Fig. 251. le sinus DG de cet arc doit être réduit en parties de la distance du satellite, par cette proportion R : sin. BD : : sin. 9° 35′ 37″ : DG, & cette valeur de DG divisée par le cosinus de AD ou le sinus de DN donnera le sinus AC de l'inclinaison N, qui se trouve par-là de 3° 18′ 40″, au lieu de 3° 18′ 37″ qu'on trouve en supposant l'arc DA rectiligne ; cette différence est assez petite pour pouvoir être négligée.

2933. Au moyen de la formule (2930) on peut trouver le temps où les éclipses du 4e satellite doivent finir, c'est-à-dire, la distance où il faut que Jupiter soit par rapport au nœud du satellite pour que la latitude soit égale au demi-diamètre de l'ombre ; il faut faire $AC = CH$ ou CB ; car alors l'orbite AD passant au sommet H de la section de l'ombre, le satellite n'y entrera point & ne sera point éclipsé ; on aura donc u . sin. I . sin. $D = 1$, ou sin. $D = \frac{1}{u \text{ sin. } I}$; les observations ont fait connoître que D est à peu-près 55° 11′. De même pour trouver l'inclinaison, si la quantité D est donnée par observation, l'on aura sin. $I = \frac{1}{u \text{ sin. } D}$ (Voy. l'art. 2938).

2934. La demi-durée d'une éclipse calculée par les règles précédentes est une demi-durée moyenne, qui varie, sur-tout pour le second satellite, par l'attraction du premier. Si l'on appelle e la longitude du premier satellite moins celle du second, il faut multiplier la demi-durée moyenne par l'unité plus $\frac{1}{100}$ du cosinus de l'angle e, pour avoir la demi-durée vraie, suivant les calculs de M. Bailly (*Mém.* 1766, *pag.* 361); la différence peut aller à 51″; mais la fraction $\frac{1}{100}$ dépend d'une hypothèse sur les masses, qui sont encore peu connues (2981); ainsi l'auteur ne propose cette équation aux astronomes, que pour être mieux constatée. M. Bailly a aussi donné dans ses tables une équation des demi-durées du 4e satellite qui va jusqu'à 1′44″, & que je n'ai point employée par la même raison.

Effet

Fig. 240.

Fig. 241.

Fig. 242.

Fig. 243.

Fig. 244.

Fig. 243.

Fig. 245.

Fig. 246.

Fig. 247.

Fig. 248.

Fig. 249.

Effet de l'aplatissement de Jupiter sur les Éclipses.

2935. Le disque de Jupiter n'est pas exactement rond ; l'axe de sa rotation est au diamètre de son équateur comme 13 est à 14 (3221) ; ainsi tous les calculs que l'on a faits jusqu'ici de la durée des éclipses, en supposant circulaire la section de l'ombre, exigent une correction à raison de l'aplatissement de Jupiter, du moins quand on veut en déduire la véritable inclinaison de l'orbite ; j'ai fait voir qu'il étoit utile d'introduire cette considération dans les calculs, (*Mém. acad.* 1763, *pag.* 413).

Soit FL (*fig.* 252) le diamètre de l'ombre d'occident en orient, tel que l'observation le donne (2918), $FMLK$ la section circulaire de l'ombre, que nous avons considérée jusqu'ici ; $FDLE$ une ellipse dont le petit axe ED soit $\frac{13}{14}$ du grand axe ; c'est la figure que doit avoir la section de l'ombre de Jupiter, parce que le cône d'ombre étant coupé fort près de Jupiter ; sa section ne diffère pas sensiblement de celle de Jupiter, cette figure ne varie point, parce que l'équateur de Jupiter diffère à peine du plan de son orbite (3222). Figure de la section de l'ombre. *Fig.* 252.

2936. La ligne ABG parallèle à CF, est supposée la trace d'un satellite dans l'ombre, lorsqu'il est dans ses limites, & que les durées des éclipses sont les moindres ; l'ordonnée AB déterminée par la demi-durée de l'éclipse, est donnée par observation. Quand on suppose l'ombre circulaire, on emploie une ligne HI parallèle & égale à AB, $CH = \sqrt{rr - dd}$ (2928) ; mais $AC : CH :: CD : CM$ (3256) $:: 13 : 14$, donc $AC = \frac{13}{14}\sqrt{rr - dd}$. Dans le temps où la demi-durée AB est la plus grande de toutes, on a $CA = t$ sin. I. quelle que soit la figure de l'ombre, & dans les autres cas, on a $AC = t$ sin. D sin. I. (2928), l'angle I étant la véritable inclinaison ; donc sin. $I = \frac{\frac{13}{14}\sqrt{rr-dd}}{t \text{ sin. } D}$. L'on trouve donc l'inclinaison plus petite en employant la section elliptique ; on la trouvoit trop grande

Fig. 252. (2928), quand on ſuppoſoit l'ombre circulaire ; les ſinus de ces deux inclinaiſons trouvées dans les deux hypothèſes ſont entre eux comme 13 eſt à 14.

2937. Ainſi quand on a obſervé une demi-durée qui eſt aſſez éloignée du nœud, on peut trouver l'inclinaiſon de l'orbite, en ſuppoſant le lieu du nœud connu ; car ayant par obſervation la valeur de $AC = \frac{13}{14}\sqrt{rr-dd}$ ou $\frac{13}{14}r\sqrt{1-\frac{dd}{rr}}$, on la diviſera par u ſin. D, ſi l'on veut avoir ſin. I, ou par u ſin. I, ſi l'on veut avoir ſin. D (2931).

Exemple. La demi-durée du 3ᵉ ſatellite ayant été obſervée de 42′, à 90° du nœud, on demande l'inclinaiſon qui en réſulte dans l'ellipſe.

Logarithme de la demi-durée 42′ 0″ = d	3,401401
Log. du demi-diam. de l'ombre, 1ʰ 47′ 0″ = r	3,807535
Différence, qu'il faut doubler	9,593866
Logarithme de $\frac{d^2}{r^2}$ = 0, 15407	9,187732
Donc $1-\frac{d^2}{r^2}$ = 0, 84593, log.	9,927334
La moitié de ce logar. ſera celui de $\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}$	9,963667
Ajoutant celui de $\frac{13}{14}$	9,967815
On aura le logarithme de AC ou $\frac{13}{14}\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}$	9,931482
Otez le logarithme de u ou $\frac{t}{r}$ (2930)	1,186099
Il reſte celui de ſin. I ſin. D.	8,745383

Il auroit fallu en ôter auſſi le ſinus de D, mais dans ce cas il eſt égal à zéro, puiſque $D = 90°$, la demi-durée de 42′ étant ſuppoſée la plus petite de toutes ; ainſi ayant cherché ce logarithme parmi ceux des ſinus, on aura 3° 11′ 22″ pour l'inclinaiſon, dans ce cas-là, en employant la ſection elliptique. Si de ce même logarithme l'on ôtoit le log. ſinus de l'inclinaiſon ſuppoſée connue, l'on trouveroit le log. ſinus de D ou de la diſtance de Jupiter au nœud ;

& connoissant d'ailleurs le lieu de Jupiter, il seroit aisé d'en conclure le lieu du nœud.

2938. Pour avoir l'inclinaison du 4ᵉ satellite, supposons avec M. Wargentin, que ses éclipses finissent quand Jupiter est à 55° 11′ 10″ des nœuds, comme on le trouve en supposant l'inclinaison dans le cercle de 2° 36′, il faudra que CA ou t. sin. I. sin. D soit égal à $CD = \frac{13}{14}$; or ajoutant le logarithme de t, c'est-à-dire, 1, 428954 avec celui du sinus de $55° 11' 10'' = D$, & les retranchant de celui de $\frac{13}{14}$, on a sin. I, ou le sinus de 2° 24′ 51″, c'est l'inclinaison véritable de cette orbite, au lieu de 2° 36′ que l'on auroit trouvé dans l'hypothèse circulaire (2933) (Voyez aussi 2957).

Inclinaison du quatrième satellite.

2939. Au reste les inclinaisons déduites de ces deux hypothèses sont à très-peu près dans le rapport de 13 à 14; ainsi il est aisé de conclure l'une de l'autre; on verra dans la table des élémens (2972), que la différence va à 16′ 18″ pour le second satellite, & cela est important dans les calculs de la réduction, ou du mouvement des nœuds; il n'en résulte pas de différence dans la table des demi-durées des éclipses, comme l'observe M. Bailly (*p.* 71); c'est pourquoi j'ai conservé dans les tables les inclinaisons que M. Wargentin ou M. Maraldi ont calculées dans le cercle, cependant le calcul n'est pas sensiblement plus long en employant l'hypothèse exacte de l'ellipse, de la manière suivante.

Différence des deux hypothèses.

2940. Lorsque l'inclinaison est donnée aussi bien que la distance au nœud, on peut trouver aisément la demi-durée d'une éclipse, puisque par la propriété de l'ellipse, (3254) CD est à CF, ou 13 est à 14, comme $\sqrt{AD.AE}$ est à la demi-durée AB; on cherche d'abord AC qui est égal au temps par 57° multiplié par sin. I. sin. D (2929) quelle hypothèse que l'on prenne; on connoît aussi CD qui est égal à $\frac{13}{14} r$, on en prend la somme & la différence, & l'on a AD & AE en temps; la moitié de la somme des logarithmes de AD & AE, en y ajoutant le logarithme de $\frac{14}{13}$ qui est 0,032185, donne la demi-durée AB

Calcul de la demi-durée.

dans la section elliptique. Car puisque sin. $I = \frac{\frac{13}{14}\sqrt{rr-dd}}{t \text{ sin. } D}$ (2936) on a $d = \sqrt{r^2 - (\frac{14}{13} t \text{ sin.} D \text{ sin.} I)^2} = \sqrt{r^2 - (\frac{14}{13} CA)^2}$ $= \frac{14}{13} \sqrt{(\frac{13}{14} r - AC)(\frac{13}{14} r + AC)}$.

Exemple. Soit l'inclinaison du 3ᵉ = 3° 11′ 22″ calculée dans l'ellipse (2937), la distance au nœud 90°, le demi-petit axe $CD = 5961''$ de temps $= \frac{13}{14} r$.

Log. du temps pour 57°.	4,993634
Log. sin. *I* dans l'ellipse.	8,745383
Log. sin. dif. au nœud.	0,000000
Log. *AC* 5483.	3,739017
CD . . 5961,4	
AC . . 5483,0.	
Somme . . . 11444,4 logarit.	4058593
Différence . . . 478,4	2679791
Somme des logarithmes.	6738384
Moitié.	3369192
Logar. de $\frac{14}{13}$.	0032185
Demi-durée 42′ 0″.	3401377

Cette demi-durée dans l'ellipse est en effet celle qui nous a fait trouver ci-dessus l'inclinaison de 3° 11′ 22″.

Des inclinaisons observées dans les quatre Satellites.

2941. En observant ainsi les durées des éclipses, on a déterminé les inclinaisons des quatre satellites de Jupiter. M. Cassini en 1693, estimoit qu'elles étoient toutes de 2° 55′, mais après un plus grand nombre d'observations, on y a trouvé des différences sensibles. L'inclinaison du premier satellite est suivant les nouvelles tables de 3° 18′ 38″ calculée dans le cercle (2928), on la suppose constante parce que ses variations sont peu considérables.

Changemens d'inclinaison. Le second satellite a un changement d'inclinaison dont la période est de 30 ans, mais qu'on a eu beaucoup de

peine à démêler ; les demi-durées de ses éclipses observées dans les limites, varient depuis 1h 7′ jusqu'à 1h 16′ environ, comme le remarqua M. Maraldi, (*Mém. acad.* 1729).

2942. M. Maraldi dans un mémoire intéressant, lu en 1768, a déterminé le demi-diamètre de l'ombre où la plus grande demi-durée des éclipses du second satellite de 1h 25′ 45″ par les observations des années 1688, 1689, 1707, 1712, 1718, 1724, 1730, 1736, 1742, 1748, 1754, 1760 & 1766. Il a trouvé la plus petite inclinaison de son orbite de 2° 48′ 0″ pour le commencement des années 1672, 1702, 1732 & 1762, c'est-à-dire, avec une période de 30 ans. Il a employé à cette recherche les observations faites dans les années 1673, 1702, 1703, 1732, 1733, 1762 & 1763 ; le milieu entre 14 déterminations est de 2° 47′ 56″ ou 2° 48′ 53″, suivant qu'il emploie dans le calcul la demi-durée vraie qu'on déduit immédiatement de l'observation, ou la demi-durée moyenne (2934), c'est-à-dire, corrigée de l'équation que donne la théorie, & qui auroit lieu, si le satellite étoit toujours à la même distance de Jupiter, & si son mouvement n'étoit pas troublé par l'action des satellites voisins. Cette inclinaison, la plus petite de toutes, n'étoit suivant les premières tables de M. Wargentin que de 2° 29′, mais il la fait actuellement de 2° 46′. La plus petite.

La plus grande inclinaison est, suivant M. Maraldi, de 3° 48′ 0″ pour le commencement des années 1687, 1717, 1747 & 1772 ; il a tiré cette détermination des observations de 1685, 1686, 1715, 1716, 1745 & 1746 ; il trouvoit 3° 44′ 43″ ou 3° 44′ 40″ suivant qu'il faisoit entrer dans le calcul la demi-durée vraie (2934) ou la moyenne, mais dans ces années-là l'inclinaison n'étoit pas encore la plus grande ; suivant son hypothèse elle ne devoit l'être qu'un an ou deux après, temps où Jupiter étant trop près des nœuds, il n'auroit pas été sûr de déterminer l'inclinaison par la demi-durée des éclipses. M. Maraldi a donc adopté l'inclinaison de 3° 48′, d'autant plus volontiers que par-là l'inclinaison de l'orbite du premier La plus grande.

ſatellite, ſur laquelle ſe fait le mouvement des nœuds du ſecond ſatellite, & qui eſt de 3° 18′, tient un milieu exact entre la plus grande & la plus petite inclinaiſon du ſecond, ce qui rend le calcul de la variation annuelle de l'inclinaiſon du ſecond, & de la libration de ſes nœuds (2965) plus ſimple & plus facile à calculer.

Les demi-diamètres des éclipſes du ſecond ſatellite que M. Maraldi a concluës des élémens précédens, combinés avec la libration du nœud, s'accordent avec celles qu'il a conclues des obſervations, d'une manière très-exacte; de 122 éclipſes il n'en trouve que 12 où l'erreur ſoit de plus d'une minute, & elle ne paſſe qu'une ſeule fois 1′ 43″, (*Mém.* 1768, *pag.* 305). Suivant les nouvelles tables de M. Wargentin l'inclinaiſon dans le cercle varie depuis 2° 46′ juſqu'à 3° 46′. (Voy. *pag.* 180).

Cauſe de ces variations.

2943. Pour expliquer la cauſe de cette variation ſingulière de l'inclinaiſon, je ſuis obligé de dire quelque choſe du mouvement des nœuds, dont il ſera bientôt queſtion plus en détail (2965). Dans un mémoire préſenté à l'académie le 27 Avril 1765, M. Maraldi annonça des variations qu'il avoit remarquées dans le nœud du ſecond ſatellite : après avoir déterminé l'inclinaiſon, par une obſervation du 17 Septembre 1715, de 3° 44′ 53″, le lieu du nœud calculé par une obſervation du 18 Octobre 1714, en ſuppoſant la plus grande inclinaiſon de 3° 44′ 53″, comme elle étoit le 17 Septembre 1715, étoit à 10^s 21° 45′. Mais en 1751, après avoir déterminé l'inclinaiſon de 3° 44′ 30″, directement par une obſervation du 9 Janvier, il trouva par une obſervation du 11 Septembre 1751, que le nœud devoit être dans 10^s 0° 54′ 9″, la différence produit 20° 27′ 36″, ce qui dénotoit une libration ou un changement en plus & en moins de 10° 13′ 48″; le lieu moyen du nœud ſe trouvoit par-là dans 10^s 11° 8′, au lieu que M. Wargentin le plaçoit dans 10^s 12° 15′.

M. Maraldi ajoutoit que ſi l'on vouloit attribuer au changement d'inclinaiſon, la différence des durées obſervées, & ſuppoſer que le nœud fût fixe, il faudroit

ſuppoſer ſur l'angle d'inclinaiſon une augmentation de 20′ en onze mois de 1714 à 1715, & enſuite une diminution de $18'\frac{1}{3}$. Tel étoit le phénomène obſervé, il étoit une ſuite néceſſaire de la théorie que j'avois déja donnée à ce ſujet.

2944. En effet, j'avois montré que les nœuds des ſatellites devoient avoir un mouvement tantôt direct & tantôt rétrograde, & qu'il en réſultoit une variation dans leurs inclinaiſons ſur l'orbite de Jupiter (*Mém. de l'acad.* 1762, *pag.* 233. Hiſtoire, *pag.* 133), & c'eſt la première idée qui ait été donnée de la cauſe d'un phénomène ſi ſingulier; en même temps j'avois promis de diſcuter dans un autre mémoire ces changemens d'inclinaiſon. J'avois parlé des inégalités de l'inclinaiſon du 3e ſatellite, aux *pag.* 1052 & 1130 de la première édition de cette *Aſtronomie*, en diſant qu'il faudroit recourir au mouvement des nœuds pour les expliquer; enfin j'avois démontré de ſemblables variations dans les inclinaiſons & dans les nœuds des planètes, aux *pag.* 507 & 519. Ainſi la cauſe de ces inégalités étoit trouvée dès 1762. Découverte de la cauſe.

2945. En conſéquence, M. Bailly, a qui M. Maraldi avoit communiqué ſon obſervation, propoſa en 1765 d'expliquer le changement d'inclinaiſon & la libration du nœud du 2e ſatellite ſur l'orbite de Jupiter, en ſuppoſant que le nœud du 2e ſur l'orbite du 1er ou du 3e, eut un mouvement périodique d'environ trente ans; c'eſt ainſi que j'avois expliqué le changement d'inclinaiſon des planètes (1377). Soit *BC* (*fig.* 75) l'orbite de Jupiter, *CA* l'orbite du ſatellite perturbateur, ſuppoſée fixe; *BA* celle du ſatellite troublé; l'angle *A* qui eſt l'inclinaiſon mutuelle de deux orbites étant ſuppoſé conſtant, de même que l'orbite *BA*, l'orbite *CA* eſt tranſportée contre l'ordre des ſignes, le nœud *A* rétrogradant change de ſituation, & le nœud *C* que nous obſervons, changera de même que l'angle *B*, dont nous obſervons les variations. Suivant les formules de trigonométrie (3727 & 3717) tang. $BC = \frac{\text{ſin.}\, A\, C\, \text{tang.}\, A}{\text{coſ.}\, AC\, \text{coſ.}\, C\, \text{tang.}\, A + \text{ſin.}\, C}$; Planche VI. Fig. 75.

cos. $B = -$ cos. A (cos. $C -$ sin. C tang. A cos. AC). Ainsi la valeur de BC ne change pas beaucoup, quoi que CA prenne toutes les valeurs possibles par le mouvement de A.

2946. Tant que le point A parcourra le premier quart de sa révolution, & jusqu'à ce que sin. AC soit $\sqrt{1-\left(\frac{\text{tang.}A^2}{\text{tang.}C^2}\right)}$, comme je vais bientôt le démontrer (2948), le nœud B s'éloignera du point C, & aura un mouvement rétrograde; il deviendra ensuite direct, & se rapprochera du point C, ou il coincidera lorsque le nœud A aura parcouru 180°; enfin ce nœud A faisant le troisième quart de sa révolution, le nœud B continuera d'être direct & s'éloignera du point C dans l'autre sens.

2947. L'angle B, inclinaison du satellite troublé sur l'orbite de Jupiter, diminue pendant la première moitié de la révolution du nœud A, en commençant du point C où elle est la plus grande. Lorsque le nœud A est parvenu à 180° du point C; l'angle CB est plus petit que l'angle C de la même quantité qu'il étoit plus grand au commencement de la révolution; ainsi le nœud & l'inclinaison C reviendront les mêmes au bout de trente ans, si le nœud A rétrograde de 12° par an, comme l'exige l'observation, puisqu'on trouve que les nœuds du second satellite sur l'orbite de Jupiter, sont encore sensiblement aux mêmes points depuis un siècle, & que l'inclinaison reparoît la même tous les trente ans.

2948. Pour démontrer que le *maximum* de BC arrive, suivant la formule de M. Bailly, lorsque sin. $AC = \sqrt{1-\frac{\text{tang.}A^2}{\text{tang.}C^2}}$, soit tang. $BC = y$; sin. $AC = x$, cos. $AC = \sqrt{1-xx}$, tang. $A = a$; cos. $C = b$; sin. $C = m$; alors $y = \frac{ax}{ab\sqrt{1-xx}+m}$, dont il faut faire la différentielle égal à zéro, suivant la règle du *maximum* (3299); or $dy = adx\,(ab\sqrt{1-xx}+m) + \frac{a^2bx^2dx}{\sqrt{1-xx}}$ (3295), $= dx\,\frac{a^2b+am\sqrt{1-xx}}{\sqrt{1-xx}}$, ainsi $ab+m\sqrt{1-xx} = 0$; $\frac{a^2b^2}{m^2} =$

$1-xx$,

$1 - xx$, $x = \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{m^2}}$; c'est-à-dire, sin. $AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang.}\,A^2\,\text{cos.}\,C^2}{\text{sin.}\,C^2}}$ ou $\sqrt{1 - \frac{\text{tang.}\,A^2}{\text{tang.}\,C^2}}$, comme je l'ai supposé (2946).

2948. Il est très-rare d'avoir immédiatement & par observation la durée des éclipses du 3e satellite; jusqu'ici (c'est-à-dire, en 1771) on n'a vu que neuf fois l'immersion & l'émersion; cela devroit arriver tous les 12 ans, quand les quadratures de Jupiter arrivent vers $1^s\,12^\circ$ de longitude, comme en 1751, 1763, 1774, &c. mais les mauvais temps nous empêchent souvent de faire ces observations importantes. Dans les quadratures qui arrivent vers l'autre limite, comme dans les années 1745, 1757, 1769, Jupiter n'étant qu'à 23° de son aphélie, la parallaxe annuelle est trop petite, & l'on ne peut voir les deux phases; mais comme ces observations sont importantes & curieuses, je vais expliquer ici la méthode qui peut servir à les prédire, je l'ai donnée d'une manière plus rigoureuse & plus étendue dans les mémoires de 1765, *pag.* 465.

Pour calculer les temps ou l'on peut voir les immersions & les émersions du 2e satellite, il faut d'abord trouver quelle est la portion de la section de l'ombre que l'on voit de la terre, dans une direction oblique, c'est-à-dire, la valeur de DF (*fig.* 244); la portion ED de l'ombre de Jupiter étant cachée par son disque. Soit la parallaxe annuelle (1141), ou l'angle $SPT = P$; $IP = \frac{CI}{\text{sin.}\,P}$ (3611); $PB = IB - IP = 9 - \frac{1}{\text{sin.}\,P}$ (la distance du satellite étant de 9 demi-diamètres de ♃). Dans le triangle PBD, $BD = PB.\,\text{tang.}\,P$; donc $BD = \left(9 - \frac{1}{\text{sin.}\,P}\right)$ tangen. $P = \frac{9\,\text{sin.}\,P - 1}{\text{cos.}\,P}$; il faut la multiplier par cos. P pour avoir sa valeur BX perpendiculairement au rayon visuel, $= 9\,\text{sin.}\,P - 1$; c'est la partie de l'ombre qui se voit de la terre, à côté du disque de Jupiter.

Temps où l'on voit les deux phases.

Fig. 244.

Fig. 253. 2949. On ſuppoſe deux cercles *DKL*, *FHE* (*fig.* 253), le premier qui repréſente le diſque de Jupiter, le ſecond qui repréſente la ſection de l'ombre = 0,9466 (art. 2919); connoiſſant $BD = 9$ ſin. P — 1, on l'ajoutera avec le demi-diamètre *ID* de Jupiter = 1, & l'on aura $BI = 9$ ſin. P, d'où l'on conclura *NM*, qu'on peut ſuppoſer = *BA*, parce que l'orbite *AN* du ſatellite eſt preſque parallèle à celle de Jupiter, ſur-tout quand il eſt près des limites; la valeur de $BA = 9$ ſin. I. ſin. D (2926), fera connoître la diſtance de Jupiter au nœud (2931). Mais pour plus d'exactitude, il faut employer la différence de latitude entre Jupiter & ſon ombre qui vient de la latitude de la terre par rapport à l'orbite de Jupiter; elle eſt à peu-près égale à la ſeptième partie de l'équation de l'orbite ſolaire, du moins vers le temps où Jupiter eſt en quadrature (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 470), parce que la latitude de la terre vue de Jupiter, qui eſt alors à la même diſtance du ſoleil que de la terre, puiſque c'eſt dans les quadratures, eſt cinq fois plus petite que l'inclinaiſon de Jupiter = 79′; c'eſt-à-dire, qu'elle ne va qu'à 16′, qui eſt la ſeptième partie de 1° 56′, & elle croît comme le ſinus de la diſtance au nœud de Jupiter, ou à 3^s 8°, de même que l'équation du ſoleil eſt proportionnelle au ſinus de ſon anomalie qui eſt auſſi la diſtance à 3^s 8°; ainſi la quantité dont le centre *C* de l'ombre doit nous paroître plus méridional que Jupiter, dans les ſix premiers mois de l'année forme un arc *BC* qui vu du centre de Jupiter, eſt égal à 16′ tout au plus, tandis que *IB* eſt la parallaxe annuelle exprimée en minutes; connoiſſant *IB* & *BC*, on cherche *BIC* & le côté *IC* en degrés & minutes, on prend 9 fois ſon ſinus pour l'exprimer en demi-diamètres de Jupiter. Dans le triangle *CNI* on connoît *CN* qui eſt toujours le demi-diamètre de l'ombre, parce que ſon centre eſt ſuppoſé vu en *C*; on connoît également les deux autres côtés $IN = 1$, $IC = 9$ ſin. IC; on trouvera l'angle *NIC*, l'on aura par conſéquent *NIB*, & la latitude *NM* de l'interſection *N*, qui doit être égale au moins à 9 ſin. I.

fin. *D*, latitude du satellite, pour qu'on puisse voir les deux phases. Si l'on veut avoir cette latitude du satellite plus exactement, il ne faut pas prendre la simple distance *D* de Jupiter au nœud; mais y ajouter ou en ôter l'arc *AN* de l'orbite du satellite, qui est de 5° environ pour le second satellite, l'on aura sa distance au nœud; ainsi l'on connoîtra 9 fin. *I*. fin. *D*, & l'on verra si dans le jour proposé la hauteur *MN* du satellite est assez grande pour qu'il paroisse au-dessus de l'intersection *N* du disque de Jupiter & de la section de l'ombre.

2950. On peut représenter sur une grande figure, avec une précision suffisante pour la pratique, les cas où le second satellite peut paroître dans l'immersion & l'émersion. Le cercle *OB* (*fig.* 254), qui représente l'ombre de Jupiter doit avoir 302′ de rayon (2919); on porte à l'occident du centre *C*, (si Jupiter passe au méridien le soir), un nombre *CF* de minutes égal à la parallaxe du grand orbe (2989), & du point *F* comme centre, on décrit un autre cercle *IK*, dont le rayon *FI* soit = 320′, & qui représente le disque de Jupiter. Figure qui peut les faire connoître. *Fig.* 254.

2951. Pour tracer sur cette figure l'orbite du second satellite, on prendra *CA* égal à l'inclinaison de son orbite, qui change depuis 166′ jusqu'à 228′ (2942), & l'on tirera l'orbite *AEDG*; s'il y a un intervalle *DE* entre l'ombre & le disque de Jupiter, on verra l'immersion & l'émersion.

2952. Quand le second satellite plus près de son nœud décrira l'orbite *LMR*, ce sera le temps où les deux phénomènes se confondant au point *M*, on cessera de voir l'émersion, (ou l'immersion si c'étoit après l'opposition): pour trouver à quelle distance du nœud cela doit arriver, on décrira sur *CA* un quart-de-cercle *APN*, que l'on divisera en degrés, en mettant en *N* $4^s\ 12°$ & $10^s\ 12°$, c'est-à-dire, les lieux des nœuds, & en *A* $1^s\ 12°$ & $7^s\ 12°$. Alors la ligne *ML* prolongée marquera au point *P*, sur la circonférence *APN*, la longitude héliocentrique de Jupiter pour le temps où les émersions cesseront de paroître, & l'arc *PN* marquera les quatre distances au

nœud qui dans chaque révolution de Jupiter indiquent le commencement & la fin des temps où l'on peut voir les durées entières de ses éclipses, en supposant la parallaxe *C F*.

2953. Il y aura cependant encore quelques éclipses de plus où l'on ne verra pas les deux phases, parce que si le satellite en disparoissant à nos yeux est confondu avec la lumière de Jupiter, ou si le point de l'ombre *EM* où entre le satellite n'est pas encore assez détaché de Jupiter, le satellite ne sera pas sensible à nos yeux.

Inclinaison du troisième.

2954. L'inclinaison du troisième satellite a été long-temps un autre objet de difficulté ; elle ne parut que de 3° dans le dernier siècle, & elle a paru en 1763 de près de 3° 26′. Dans l'éclipse du 25 Janvier 1763, la demi-durée a été de 43′, d'où M. Maraldi conclut l'inclinaison de 3° 25′ 41″, en supposant le demi-diamètre de l'ombre 1h 47′ 10″, & la section circulaire ; cette inclinaison se trouvoit plus grande qu'en 1745 de 7′ ½ ; mais il semble que depuis 1763 elle a cessé d'augmenter, car en 1769 elle n'a été que de 3° 23′ 33″; si elle eût augmenté jusqu'à 3° 44′, le 3e satellite se seroit trouvé dans le même cas que le 4e, qui n'est plus éclipsé lorsque Jupiter s'éloigne des nœuds (Voy. M. Maraldi, *Mém. acad.* 1745). J'ai fait voir que cette augmentation de l'inclinaison étoit une suite naturelle du mouvement des nœuds, & de l'attraction des autres satellites, sur-tout du premier & du troisième (*Mém. acad.* 1765, *pag.* 608).

2955. M. de la Grange en partant de quelques suppositions, a jugé que la période de cette augmentation pouvoit être de 195 ans ; M. Bailly, en 1766, la jugeoit de 200 ans, mais en convenant qu'il y avoit dans ces résultats beaucoup d'incertitude. M. Wargentin, en 1768, supposoit que la plus petite inclinaison avoit été de 3° 0′ en 1697, & qu'elle seroit la plus grande en 1782. M. Maraldi trouve que la période est de 132 ans ; il juge, d'après les observations de 1763, que l'inclinaison étoit alors de 3° 25′ ⅔, mais qu'elle a dû augmenter encore

pendant deux ans, & jusqu'à 3° 25′ 57″, c'est la plus grande inclinaison, & elle répond aux années 1633 & 1765. La plus petite inclinaison est, suivant M. Maraldi, de 3° 2′, & répond à l'année 1697. Sur ces données, & avec les principes de l'art. 2946, il a calculé une table des inclinaisons pour toute la durée de la période, avec la libration du nœud produite par l'action du premier satellite, qui est la principale cause de ce mouvement. Mais parmi le grand nombre d'observations que M. Maraldi a calculées dans cette hypothèse, il y en a plusieurs où la demi-durée s'écarte de 3′ du calcul, ce qui fait qu'il ne regarde point sa période comme certaine. On aura en 1775 des occasions de résoudre cette difficulté; en attendant, je me suis servi de cette hypothèse dans les tables du 3e satellite (*p.* 191), & M. Wargentin lui-même en diffère peu, (*Nautical almanach for* 1771), si ce n'est pour le lieu du nœud où la correction du nombre *A*, qu'il n'a fixée que sur les observations, sans y introduire aucune loi.

2956. L'inclinaison du 4e satellite est constamment de 2° 36′, ou à peu-près, en la calculant dans l'hypothèse circulaire. (M. Maraldi, *Mém.* 1758, *pag.* 191). Le mouvement des nœuds de ce satellite qui est de 4′ 19″ par an, suivant M. Wargentin (2967), doit produire un changement dans cette inclinaison, & M. Bailly pense qu'elle a dû être la plus petite en 1720, les nœuds du premier & du 4e s'étant trouvés au même point de l'orbite de Jupiter; mais ses accroissemens sont lents, & il faudra peut-être encore bien du temps avant qu'ils deviennent sensibles, (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 363). Inclinaison du quatrième,

2957. M. Maraldi fit voir en 1750 qu'il étoit presque impossible de concilier toutes les observations des demi-durées du 4e satellite, en combinant le changement de l'inclinaison avec le mouvement du nœud, (*Mém. acad.* 1750, *pag.* 119); cependant il en approche beaucoup (2967), en supposant l'inclinaison constante de 2° 36′, le demi-diamètre de l'ombre 2° 8′ 2″, & le lieu du nœud en 1745, 4s 16° 11′, avec un mouvement pro-

greſſif de 5′ 33″ par an; il eſt étonnant qu'il ait pu, avec une hypothèſe auſſi ſimple, repréſenter auſſi exactement toutes les obſervations que l'on a faites depuis un ſiècle. Cette inclinaiſon de 2° 36′ eſt aſſez grande pour que le 4ᵉ ſatellite ſoit élevé au-deſſus du cone d'ombre auſſi-tôt que les éclipſes arrivent à 55° des nœuds; par exemple, depuis le mois de Janvier 1768 juſqu'au mois de Juillet 1770, il n'y a point eu d'éclipſes du 4ᵉ ſatellite.

Trouver l'inclinaiſon des ſatellites de Saturne.

2958. Lorſqu'il s'agit des ſatellites dont on ne peut point obſerver les éclipſes, tels que ceux de Saturne (2998), on détermine l'inclinaiſon de leurs orbites par l'ouverture des ellipſes qu'ils paroiſſent décrire. Dans la *figure* 247, on voit l'ellipſe décrite par le 4ᵉ ſatellite lorſque Jupiter eſt à 90° du nœud; ſi l'on meſure alors la diſtance apparente du ſatellite à Jupiter, au nord & au ſud, dans ſes conjonctions ſupérieures & inférieures, on aura le petit axe de l'ellipſe, & par conſéquent l'inclinaiſon de l'orbite (2927).

Des Nœuds des Satellites.

2959. La durée d'une éclipſe, lorſqu'elle eſt la plus longue, indique à peu-près le lieu du nœud; par exemple, le 30 Avril 1742, M. Maraldi & M. Caſſini trouvèrent la durée d'une éclipſe du 3ᵉ ſatellite, la plus longue que l'on eût jamais obſervée; ce jour-là le lieu de Jupiter vu du ſoleil, étoit à 15° 42′ du Lion; l'on peut donc ſuppoſer que c'eſt dans ce point-là que l'orbite de Jupiter étoit coupée par le plan de l'orbite du 3ᵉ ſatellite.

Méthode pour le lieu du nœud.

2960. Mais la meilleure méthode pour déterminer le lieu du nœud d'un ſatellite, eſt d'obſerver deux éclipſes d'égale durée, avant & après le paſſage de Jupiter par les nœuds ou par les limites de l'orbite du ſatellite: le 12 Mars 1687, Flamſteed obſerva la durée d'une éclipſe du 3ᵉ ſatellite 2^h 33′ 0″, la longitude héliocentrique de Jupiter étoit alors 8^s 11° 58′; le 6 Décembre 1702 la durée fut exactement la même, la longitude héliocentrique de Jupiter étant de 0^s 15° 21′; la différence entre cette lon-

gitude & la précédente est de $4^s\ 3^\circ\ 23'$, dont la moitié étant ajoutée à la première longitude, donne le lieu du nœud ascendant du satellite à $10^s\ 13^\circ\ 29'$, en supposant que le nœud n'eût pas varié dans l'intervalle de ces deux observations.

2961. L'on pourroit, au défaut des éclipses, observer le passage de l'ombre du satellite le long des bandes qui sont sur le disque de Jupiter; lorsque cette ombre traversera Jupiter par le centre, ce sera une preuve que Jupiter est dans le lieu du nœud du satellite. (*Mém. de l'acad.* 1717). Nous en parlerons ci-après (2986).

2962. On peut encore déterminer le lieu du nœud d'un satellite sans le secours de ses éclipses, ou de ses passages sur le disque de la planète, en faisant les observations suivantes, auxquelles on est obligé d'avoir recours lorsqu'il s'agit des satellites de Saturne. On compare le satellite ou à la ligne des bandes si c'est Jupiter, ou à la ligne des anses (3227) si c'est Saturne, & l'on examine soit dans la partie inférieure de l'orbite, soit dans la partie supérieure, à quelle distance le satellite passe de la planète lorsqu'il est sur la même ligne. Méthode pour les satellites de Saturne.

Lorsque Saturne passe dans le nœud du satellite vu de la terre; c'est-à-dire, lorsque Saturne est placé de manière que le plan de l'orbite du satellite passe par la terre, & soit dirigé vers notre œil, l'orbite du satellite doit paroître comme une ligne droite inclinée sur l'orbite *AB* de Saturne (*fig.* 255), mais quelques jours avant, l'orbite du satellite paroît une ellipse *KICD*; cette ellipse est encore ouverte, & coupe la ligne des anses en deux points *G* & *H*, l'un au-delà de Saturne vers la conjonction supérieure; l'autre en-deçà & vers la conjonction inférieure du satellite. Ces deux intersections *G* & *H* se rapprochent ensuite peu-à-peu du centre de Saturne, & se confondent au centre de la planète dès que Saturne arrive dans le nœud du satellite vu de la terre; il n'est donc pas difficile de juger par-là, de la situation du nœud du satellite de Saturne. Je suppose qu'on ait estimé ou mesuré la distance du satellite au centre de Saturne, & *Fig. 255.*

la quantité dont il eſt au-deſſus ou au-deſſous de la ligne des anſes, quelques jours avant & après ſes conjonctions inférieures & ſupérieures : on aura la ſituation du ſatellite dans les points *C*, *D*, *E*, pendant pluſieurs jours de ſuite, & les rapportant exactement ſur un carton, l'on trouvera quel jour le ſatellite a du paſſer en *G* ſur la ligne des anſes *HG*, & à quelle diſtance il étoit alors du centre *S* de Saturne. Lorſqu'après une demi-révolution le ſatellite parcourra *IK*, l'on obſervera de même pluſieurs jours de ſuite ſa ſituation par rapport à la ligne des anſes *HSG*; on eſtimera facilement le temps où le ſatellite a du ſe trouver en *H* ſur la ligne des anſes, ſuppoſé qu'on n'ait pu l'obſerver exactement dans ce point-là; l'on connoîtra ainſi la diſtance *GH* des deux interſections; ſi l'on continue ces obſervations, d'une révolution à l'autre, pendant que les points *G* & *H* ſe rapprocheront peu-à-peu, on jugera facilement du jour où ces deux interſections ont dû ſe confondre vues de la terre; on calculera pour cet inſtant le lieu de Saturne vu de la terre; le point oppoſé ſera le lieu de la terre vu de Saturne. Mais ce ne ſera point-là le nœud de l'orbite du ſatellite ſur l'écliptique, car la terre n'eſt point dans le plan de l'écliptique, vue de Saturne, ſuivant la définition de l'écliptique; à moins que Saturne vu de la terre ne ſoit ſans latitude, & ne paroiſſe dans l'écliptique.

Lieu du nœud vu de Saturne. *Fig.* 257.

Il faut donc en conclure le lieu du nœud vu de Saturne, & ſur l'orbite de Saturne; pour cela ſuppoſons un obſervateur au centre de Saturne; ſoit *OR* (*fig.* 257), l'orbite de Saturne, ou plutôt l'orbite que le ſoleil lui paroît décrire en 30 ans autour de Saturne; *ATNL* l'orbite du ſatellite qui coupe au point *N* l'orbite de Saturne, enſorte que le point *N* ſoit le nœud qu'il s'agit de trouver. Soit *T* le lieu de la terre qui eſt dans le plan de l'orbite du ſatellite au temps de l'obſervation que nous venons de ſuppoſer; la longitude du point *T* réduite à l'orbite *OR* de Saturne, (c'eſt-à-dire, la longitude du point *X* marqué par un arc *TX* perpendiculaire à *OR*), eſt à peu-près oppoſée à la longitude géocentrique de Saturne, ou plutôt c'eſt

la

la longitude de la terre vue de Saturne (1144), & réduite à l'orbite de Saturne, TX eſt égale à la latitude de la terre par rapport à l'orbite de Saturne vue du centre de Saturne (1144); NX eſt la différence entre le lieu X de la terre & le lieu N du nœud, que l'on cherche; l'angle N eſt l'inclinaiſon de l'orbite du ſatellite que je ſuppoſe connue (2958); ainſi par le moyen de TX & de l'angle N, dans le triangle ſphérique rectangle TXN, on trouvera NX diſtance entre le lieu oppoſé au lieu géocentrique de Saturne, & le lieu du nœud N; d'où l'on conclura le lieu du nœud du ſatellite ſur l'orbite de Saturne. Je crois cette méthode plus ſimple que celles qui ont été employées juſqu'ici. On pourroit repréſenter l'écliptique par un autre cercle tel que $ECTM$, mais la terre étant vue de Saturne en T, le grand cercle $ECTM$ (qui paſſe par la terre faiſant en C un angle de $2^\circ \frac{1}{2}$, égal à l'inclinaiſon de l'orbite de Saturne), n'eſt pas exactement l'écliptique, c'eſt-à-dire, l'orbite de la terre (3234).

2963. M. J. D. Caſſini ſuppoſoit en 1693 que les nœuds des 4 ſatellites de Jupiter étoient à $10^s\ 14^\circ \frac{1}{2}$ de longitude; M. Caſſini ſon fils, en 1740 n'y avoit encore rien changé (*Elem. d'aſtr. pag. 637*); M. Bradley penſoit en 1718 qu'ils étoient à $10^s\ 11^\circ \frac{1}{2}$, & il ne faiſoit aucune différence entre les nœuds des 4 ſatellites; mais un plus grand nombre d'obſervations a montré que les nœuds des différens ſatellites ne ſont pas au même point du ciel; on trouvera dans la table des élémens (2972) les nœuds, tels que M. Wargentin les a ſuppoſés dans ſes tables, d'après les demi-durées obſervées (2960).

2964. Le nœud du premier ſatellite eſt à $10^s\ 14^\circ\ 30'$, & les obſervations n'y font appercevoir aucun mouvement. Cependant l'aplatiſſement ſeul de Jupiter devroit produire dans le nœud du 1er ſatellite un mouvement de $104^\circ 9' 31''$ par an, ſuivant les calculs de M. Bailly, en ſuppoſant le globe de Jupiter homogène (*Mém. acad. 1766, pag. 353*). Mais on concilie à cet égard l'obſervation avec la théorie, en ſuppoſant que l'équateur de Jupiter ſoit ſenſiblement dans le même plan que l'or- Nœud du premier ſatellite.

bite du premier satellite, car alors le mouvement du nœud provenant de cette cause doit être nul. Cependant il y a un mouv. rétrog. produit par le soleil, de 33″ par an, mais on n'en tient pas compte, non plus que de celui de l'aphélie de Jupiter qui doit être commun à ces nœuds.

Du second. 2965. Le nœud du second satellite, suivant les premières tables de M. Wargentin, étoit constamment à 10^s $11^\circ 48'$; cependant l'aplatissement seul de Jupiter devroit occasionner un mouvement annuel du nœud sur l'équateur de Jupiter, qui, suivant les calculs de M. Bailly est de $20^\circ 34'$, en supposant le globe de Jupiter homogène, & de $9^\circ 26'$, en supposant que la densité décroît du centre à la circonférence, comme le carré des distances, & que les ellipticités croissent comme la racine carrée du cube de la même distance; ainsi qu'exige l'aplatissement observée de $\frac{1}{14}$ (*Mém. acad.* 1766); mais ce mouvement peut être insensible sur l'orbite de Jupiter. M. Wargentin, dans ses nouvelles tables admet un mouvement progressif du nœud sur l'orbite de Jupiter de $1^\circ 42'$ par siècle, par rapport à l'aphélie de Jupiter; il est représenté au bas de la table CXXXVII. *pag.* 180, par une correction du nombre *A*, qui est nulle en 1770, & — 5, en 1800. J'en expliquerai le fondement, art. 2968. Il paroît aussi qu'il faut admettre une libration de 8 à 9°, dans le nœud du second satellite, en vertu de l'attraction du premier, c'est-à-dire, supposer que le nœud du second fasse une révolution en 30 ans sur l'orbite du premier (2945). M. Bailly fait voir que l'action du 4e satellite peut être négligée dans cette recherche, & que le mouvement du nœud du second qui a lieu sur l'orbite du 3e peut être considéré, comme s'il avoit lieu sur l'orbite du premier, dont l'inclinaison est presque la même, ensorte que de ces deux attractions, jointes à la différence qui vient de l'aplatissement de Jupiter, il résulte un mouvement du nœud de 12° par an, & une libration ou équation analogue au changement de l'inclinaison. Cette libration est de $8^\circ 42' \frac{1}{2}$, suivant M. Maraldi, de $9^\circ 21'$, suivant M. Bailly, & de 11°

27′, ſuivant M. de la Grange. Elle eſt exprimée dans la table des inclinaiſons par la correction que l'on applique au nombre *A*, quand on cherche les demi-durées, & qui monte à 87, ou 8° 42′. Ce mouvement des nœuds du ſecond ſatellite ſur l'orbite de Jupiter, autour du nœud du premier eſt commun à tous les ſatellites; leurs nœuds oſcillent tous autour des nœuds du premier, tandis que les nœuds du premier oſcillent eux-mêmes autour d'un point qu'on peut regarder comme leur lieu moyen. (2946). Le lieu moyen du nœud aſcendant du ſecond ſatellite eſt 10ˢ 13° 52′, ſuivant M. Maraldi (*Mém. acad.* 1768, *pag.* 305); c'eſt auſſi le lieu du nœud du 3ᵉ ſatellite pour l'année 1697; ſuivant M. Wargentin, il y a 7′ de moins.

2966. Le nœud moyen du 3ᵉ ſatell., ſuivant M. Wargentin, eſt conſtamment à 10ˢ 14° 24′, cependant le calcul des inégalités qui proviennent de l'aplatiſſement de Jupiter donne, ſuivant M. Bailly, un mouvement annuel de 4° 1′ 32″, en ſuppoſant Jupiter homogène, & de 1° 50′ 45″ dans l'hypothèſe que j'ai expliqué ci-deſſus. M. Maraldi n'admet qu'un mouvement progreſſif d'environ 3′ par an, d'après les obſervations. Il doit y avoir auſſi un balancement analogue au changement de l'inclinaiſon dont nous avons parlé (2955). V. M. Bailly, *pag.* 143. Cette libration du nœud ſe voit dans la table CXLVI. d'après l'hypothèſe adoptée par M. Maraldi. Du troiſième.

2967. Le 4ᵉ ſatellite eſt celui dans lequel on a le mieux obſervé juſqu'ici le mouvement du nœud. M. Bradley avoit cru que par la théorie de l'attraction, ce mouvement devoit être rétrograde, mais les obſervations ont forcé M. Wargentin & M. Maraldi à faire ce mouvement direct, & j'ai fait voir le premier que l'attraction des autres ſatellites devoit réellement le produire (*Mém. acad.* 1762, *pag.* 230), ainſi que dans les autres planètes (1348). Suivant M. Maraldi, le lieu du nœud étoit à 4ˢ 16° 11′ en 1745, & le mouvement eſt de 5′ 33″ par an. (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 86). M. Bailly le trouve de 5′ 15″ (*pag.* 12). La conſidération de l'aplatiſſement de Jupiter donnoit auſſi à M. Bailly un mouvement annuel Nœud du quatrième.

de 33′ 8″ ſur l'équateur de Jupiter, en ſuppoſant Jupiter homogène, & de 15′ 12″ en faiſant varier les denſités; mais pour le rapporter à l'orbite de Jupiter, il faudroit connoître exactement l'inclinaiſon de l'équateur de Jupiter ſur ſon orbite, que l'on ne peut obſerver que groſſiérement (3222). M. Wargentin avoit cru que le mouvement du nœud étoit irrégulier, (*Connoiſ. des mouv. céleſt.* 1766, *pag.* 221). Mais en rejettant l'obſervation du 12 Juillet 1687, ce mouvement devient aſſez régulier; il le ſuppoſe donc dans les nouvelles tables de 3′ 18″ par rapport à l'aphélie de Jupiter, ce qui fait 4′ 19″ par rapport aux équinoxes, & la longitude du nœud en 1760, 10ˢ 16° 39′.

2968. Le nombre *A* qui dans les tables exprime l'anomalie moyenne de Jupiter, & ſert d'argument à la grande équation (2893), ſert auſſi d'argument à la table des demi-durées; par exemple, le nœud du 4ᵉ ſatellite de Jupiter eſt à 10ˢ 1° ½ de l'aphélie de Jupiter, & quand Jupiter eſt dans ce nœud, ſon anomalie moyenne exprimée en dixièmes de degré eſt 3015, ainſi en augmentant le nombre *A* de 3015 il indiquera le nœud; il ſuffira donc de mettre la plus grande demi-durée vis-à-vis de 3015, & ainſi des autres, pour que le nombre *A* ſoit l'argument des demi-durées; voici la manière dont on peut reconnoître quel lieu du nœud ſuppoſent les tables. Le nombre *A* vis-à-vis de la plus grande demi-durée, *p.* 201,

eſt de 130° ½ & 301° ½ ou en nomb.	1305	3015
Ainſi l'anom. moy. de Jupiter eſt	4ˢ 10° 30′	10ˢ 1° 30′
L'équation pour cette anom...	— 4 24	+ 4 36
Donc les anom. vr. de Jupiter,	4 6 6	10 6 6
Ajoutant l'aphélie en 1760,	6 10 33	6 10 33
On a le lieu vrai du nœud,	10 16 39	4 16 39

Tel eſt donc le lieu du nœud que M. Wargentin a ſuppoſé dans ſes tables pour 1760. M. Maraldi le trouve de 4ˢ 17° 34′, c'eſt-à-dire, plus avancé de 55′ (2967). Lorſqu'on veut faire ſervir la même table pour d'autres années, il faut pour chaque degré ôter 10 du nombre *A*, avant que de chercher les demi-durées. En effet, ſi dans

la table le nombre *A* eſt de 1305, quand Jupiter eſt dans le nœud du quatrième ſatellite, & que la durée eſt la plus grande; ce nœud avançant enſuite de 1° par rapport à l'aphélie, Jupiter ſera dans le nœud, & la durée la plus grande, quand le nombre *A* ſera réellement de 1315, il faudra donc en ôter 10 pour chercher dans la table cette demi-durée dans le nœud, qui eſt toujours correſpondante à 1305. Ainſi le mouvement du nœud du 4e ſatellite étant de 3′ 18″ pour chaque année, par rapport à l'aphélie, il faut ôter $5\frac{2}{5}$ tous les dix ans du nombre *A*. Si l'on vouloit ſavoir quelle demi-durée doit répondre dans nos tables à un nombre *A* donné, il faudroit de ce nombre *A* donné, qui eſt l'anomalie moyenne de Jupiter, déduire l'anomalie vraie de Jupiter, ſa longitude vraie, & par conſéquent ſa diſtance au nœud du ſatellite, qui eſt ſuppoſé connu (2967), d'où il ſeroit aiſé de conclure la demi-durée (2940).

Attractions réciproques des Satellites.

2969. La loi de l'attraction générale qui ſe vérifie dans toutes les parties de l'aſtronomie (3383), ſe reconnoît évidemment dans les inégalités des ſatellites de Jupiter; on a vu (2900) que l'inégalité la plus ſenſible du premier ſatellite ſe rétablit au bout de 437 jours, ſuivant la remarque de M. Bradley; l'action mutuelle des ſatellites lui parut ſur-tout remarquable dans les inégalités du 2e ſatellite, mais il vit qu'elle avoit auſſi lieu dans le mouvement du premier.

Inégalités périodiques.

Les inclinaiſons du 2e & du 3e ſatellite, forment une autre preuve bien marquée de l'attraction mutuelle; on a vu le changement ſingulier & alternatif de leurs inclinaiſons (2943, 2954), dont il ſeroit impoſſible de rendre raiſon ſans cela.

Changement d'inclinaiſon.

2970. Quoiqu'on ait ſuppoſé fixe le nœud du premier, & qu'on ait employé une inclinaiſon conſtante pour le premier & le quatrième, cependant les obſervations indiquent aſſez que cela n'eſt vrai qu'à peu-près : toutes les

Mouvement des nœuds.

fois qu'on a voulu concilier les demi-durées des éclipses; on a trouvé des incertitudes & des variétés, qui donnent lieu de croire que les nœuds des 3 premiers satellites ont un mouvement (2965, 2966), & que l'inclinaison du 4e n'est pas constante, (*Mém. acad.* 1750, *pag.* 119, & 1761, *pag.* 378).

Le mouvement direct du nœud du 4e satellite est sur-tout une preuve manifeste de l'attraction des trois autres (2967); ce mouvement du nœud seroit rétrograde s'il étoit produit par l'attraction du soleil (1348); cependant les observations prouvent évidemment qu'il est direct, & cela est conforme à l'effet que doivent produire les attractions des autres satellites, comme je l'ai fait voir, (*Mém.* 1762, *pag.* 230).

Dérangemens irréguliers.

2971. Le 3e satellite a des inégalités considérables qu'on n'a point encore déterminées, & dont la marche irrégulière fait voir qu'elles dépendent nécessairement des attractions réciproques des satellites. M. Maraldi qui s'occupoit en 1764 de la théorie du 3e satellite me fit voir la comparaison qu'il avoit faite de ses tables avec un grand nombre d'observations; entre le 22 Mai 1743, & le 6 Janvier 1744, il y avoit un saut de 10′ de degré; entre le 4 Février & le 15 Juillet 1755, 18′; entre le 9 Janvier & le 21 Juillet 1726, 17′; entre le 7 Février & le 12 Août 1727, 14′; entre le 10 Mars 1740, & le 25 Octobre 9′; enfin il y avoit entre le 28 Février & le 25 Août 1751, 15′ de différence dans l'erreur des tables; il n'y a que les attractions mutuelles des satellites qui puissent changer aussi considérablement dans de si courts intervalles; le 4e satellite paroît y devoir entrer (2903). Ce sont ces irrégularités qui ont empêché M. Maraldi de publier le résultat de son travail.

Le 4e satellite étant le plus petit (2979), & le plus éloigné de tous, son attraction ne doit pas altérer beaucoup le mouvement des trois autres; aussi leurs inégalités dépendent principalement de la position respective de ces trois satellites intérieurs, sur-tout du 1er & du 3e, qui sont les plus considérables. (2981)

Telles sont à peu-près les réflexions que j'exposai en 1764, dans le comité qui étoit chargé de fixer le sujet du prix de 1766, afin d'établir la nécessité de proposer les inégalités que les satellites de Jupiter éprouvent par leur action mutuelle; c'étoit en effet une des questions les plus curieuses de l'astronomie physique. M. de la Grange qui remporta le prix, composa sur ce sujet un très-beau mémoire que j'ai cité plusieurs fois, & qui sera imprimé parmi les pièces des prix.

Observations des satellites.

2972. La table suivante est l'abrégé de toutes les recherches que j'ai données jusqu'ici, l'extrait de nos meilleures tables, & le tableau de toute la théorie des quatre satellites de Jupiter. Ces élémens auront besoin d'être encore vérifiés par un grand nombre d'observations; on les trouvera pour le premier satellite dans les actes d'Upsal, année 1742, & dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, année 1767; pour le second satellite dans les actes d'Upsal, année 1743, & les *Mémoires de l'académie* 1768; pour le 3ᵉ dans la *Connoissance des temps*, année 1768; pour le 4ᵉ dans les mémoires de 1750, & dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, année 1766. Il y a aussi quelques observations à la fin des tables de M. Bailly; il y en a beaucoup dans les transactions philosophiques de la société royale de Londres; dans les mémoires de l'académie de Pétesbourg; dans les éphémérides du P. Hell, &c. personne n'en a fait un plus grand nombre que M. Maraldi, qui, à l'exemple de M. son Oncle s'est, pour ainsi dire, voué à cette partie importante de l'astronomie; M. Wargentin, astronome célèbre de l'académie royale des Sciences de Stockolm, a suivi cet exemple, & depuis plus de 25 ans, il n'a laissé passer aucune occasion d'observer les satellites, & de perfectionner leur théorie. M. Messier a fait aussi une quantité immense d'observations de même espèce. Mais jusqu'ici la différence des lunettes, & les inégalités optiques provenantes du degré de lumière des satellites, & qu'on a été obligé de négliger, ont mis dans les observations bien des discordances qu'il faudroit faire disparoître, par l'examen de ces différentes causes; M. Bailly s'en occupe actuellement (Janvier 1771).

Table de tous les Élémens qui servent à la théorie & au calcul des quatre Satellites de Jupiter, sur lesquels sont fondées les Tables CXXVI *& suivantes, ou les corrections dont j'ai parlé dans les Articles précédens.*

ÉLÉMENS.	I.	II.	III.	IV.
Révolution périodique (2883).....	1j 18h 27′ 33″	3j 13h 13′ 42″	7j 3h 42′ 33″	16j 16h 32′ 8″
Révol. synodiques (2882. 2973)....	1 18 28. 36	3 13 17 54	7 3 59 36	16 18 5 7
La même réduite en secondes	152915″9479	307073″7489	619175″8675	1447507″0917
Log. de cette révolution en temps...	5, 1844528	5, 4872427	5, 7918140	6,1606207
Demi-diam. de l'ombre en d. (2919).	9°35′ 37″	6° 1′ 33″	3° 43′ 58″	2° 8′ 2″
Log. du demi-d. de l'omb. en temps.	3, 610128	3, 710963	3, 807535	3, 933487
r ou demi-d. de l'om. en temps (2918).	1h 7′ 55″	1h25′ 40″	1h47′00″	2h 23′ 0″
Demi-d. de l'ombre, celui de Jupiter étant, 1. (2919)	0, 9941	0, 9967	0, 9857	0, 9913
Demi-durée des écl. à 90° des nœuds lorsque l'incl. est la moindre (2941).	1 3 45	1 16 5	1 2 25	0 0 0
Lorsque l'incl. est la plus grande	1 3 45	1 6 49	0 42 8	0 0 0
La plus gr. inclinaison dans le cercle ..	3°18′38″	3°48′ 0″	3°25′57″	2° 36′ 0″
L'inclinaison moyenne	3 18 38	3 18 0	3 13 58	2 36 0
La plus petite inclinaison	3 18 38	2 48 0	3 2 0	2 36 0
Dans l'ellipse (2937) la plus grande	3 4 27	3 31 42	3 11 14	2 24 51
Dans l'ellipse (2937) la plus petite	3 4 27	2 36 0	2 49 0	2 24 51
Logarith. de la distance en temps, ou log. du temps pour 57°, = *t* (2928).	4, 3862729	4, 6890628	4, 9936342	5, 3624408
Logarithme de *u* (2930)	0, 7761453	0, 9780995	1, 1860992	1, 4289538
Lieu moy. du nœud en 1760, (2963).	10s 14° 30′	10s13°45″	10s14°24′	10 16° 39′
Mouvement annuel du nœud	0	2′ 3″	0	4′ 19″
Distances en demi-diamètres de Jupiter suivant Cassini (2884)	5, 67	9, 00	14, 38	25, 30
Suivant Newton.	5, 965	9,494	15,141	26, 630
Distances en min. dans les moyennes distances de Jupiter (2884)......	1′ 51″	2′ 57″	4′ 42″	8′16″
Epoques des conjonct. 1760 (2977)...	0j 10h 44′ 20″	1j 14h 58′ 56″	2j 5h 41′ 49″	1j 7h 30′ 10″
Nomb. *A* ou anomalie de Jupiter	1172	1173	1174	1175
Nombre *B* ou distance de Jupiter à la conjonction (2916).	911	914	915	913
La plus grande équation (2893)....	0h 39′ 25″	1h 19′ 9″	2h39′ 35″	6h 13′ 4″
Equat. particuliere (2899)	3 30	16 0	9 30	1 0 30
Chang. des conj. en cent années Jul.	1j 9h 8′ 53″	0j 10h 15′18″	2j 1h 49′ 57″	14j 12h 2′ 47″
Chang. correspon. du nombre *A*	1548	1548	1550	1560
Chang. correspon. du nombre *B*	569	568	572	604
Long. moy. Jovicentrique, 1700 ...	2s 12° 12′ 10″	2s 12° 28′ 11″	5s 12°47′16″	7s 17° 5′ 44″
Mouv. diurne Jovicentrique	6 23 29 20	3 11 22 29	1 20 19 3	0 21 34 16
Mouvement séculaire (2915).....	7 24 47 45	3 22 31 40	1 21 19 37	6 24 50 0

Explication des tables des Satellites.

2973. Pour avoir les révolutions des satellites de Jupiter, avec une exactitude suffisante, il faut connoître en décimales de secondes la durée d'une révolution, puisque les conjonctions du premier satellite retardent de 1j 9h 8′ 53″ en cent ans (table CXXVI.), la révolu-tion

tion étant de 1j 18h 28′ 36″, il y a 9h 19′ 43″ de différence, qu'il faut ôter de l'intervalle de 100 ans, pour avoir le temps que ce satellite emploie à faire 20637 révolutions completes; ce nombre de 20637 est facile a trouver, car il suffit de diviser 36525 jours qu'il y a dans un siècle, ou 3155760000″, par 1j 18h 28′ 36″ ou 152916″. On trouvera 20637 $\frac{1}{5}$, qui est le nombre de révolutions du premier satellite; mais il y aura un reste, & cela même nous apprend qu'il ne lui faut pas tout-à-fait un siècle pour faire 20637 révolutions. Ayant donc retranché les 9h 19′ 43″ ou 33583″ de l'espace d'un siècle, ou de 3155760000″, on divisera le reste par 20637 & l'on aura la durée de la révolution synodique 1j 18h 28′ 35″ 947909. Révolutions exactes.

Pour le second satellite, il faut retrancher 27015 6″ du siècle, & diviser par 10276 révolutions, & l'on a 3j 13h 17′ 53″ 74893, révolution du second satellite.

Pour le troisième, l'on retranchera 439779″, & divisant par 5096, l'on trouvera 7j 3h 59′ 35″ 86754.

Pour le quatrième, on ôte 194540″ de la durée du siècle, & l'on divise la différence par 2180, le quotient est 16j 18h 5′ 7″ 09174, révolution synodique du quatrième satellite.

2974. Si l'on ajoute continuellement 1j 18h 28′ 35″ 947909 deux cent & six fois, l'on aura 364j 14h 11′ 25″ 269254; qui répond au 30 Décembre 14h 11′ 25′; c'est ainsi que l'on a toutes les autres conjonctions qui dans nos tables répondent aux différens jours du mois pour le premier satellite (*pag.* 167 & suiv.), & par lesquelles on passe nécessairement en faisant ces 206 additions.

Si l'on ajoute encore une fois la révolution, l'on aura 366j 8h 40′ 1″ 21716, ce qui prouve qu'au bout d'un an les conjonctions avancent de 1j 8h 40′ 1″ si l'année a été commune; c'est en effet le nombre qu'on trouve (*pag.* 166), vis-à-vis d'une année commune. Ayant doublé ce nombre, on aura 2j 17h 20′ 2″ pour deux années; mais, puisque ce nombre excède une révolution du premier

ſatellite, il n'indiqueroit pas la première conjonction de l'année; il faut donc en ôter une révolution, & l'on aura $22^h\ 51'\ 26''$ pour deux ans; ſi l'on y ajoute encore $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$, l'on aura $2^j\ 7^h\ 31'\ 27''$ pour trois ans; mais il en faut ôter une révolution qui ſe trouve tout entière dans cette ſomme, (car il y a 619 révolutions dans trois ans); & il reſte $0^j\ 13^h\ 2'\ 52''$, changement pour trois ans. On ajoutera encore $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$, & l'on aura pour le retardement des quatre ans, $1^j\ 21^h\ 42'\ 53''$; on en ôtera un jour, que l'on met de plus dans les deux premiers mois des années biſſextiles, afin qu'il n'y ait rien à changer aux dix autres mois (1326), il reſte $0^j\ 21^h\ 42'\ 53''$ pour la quantité dont les époques doivent changer dans nos tables tous les quatre ans, en partant d'une année biſſextile, & tombant ſur une année biſſextile.

Jour que l'on ôte des époques des biſſextiles.

Si l'on ajoute $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$ avec $1^j\ 21^h\ 42'\ 53''$, & qu'on ôte une révolution, l'on aura pour la cinquième année, qui ſuit l'année biſſextile $1^j\ 11^h\ 54'\ 18''$; mais il faut en ôter un jour, parce que l'année précédente ayant été ſuppoſée biſſextile étoit plus longue d'un jour, ce qui fait que les conjonctions retardent moins; on aura donc $0^j\ 11^h\ 54'\ 18''$.

En doublant le nombre qui répond à quatre ans dans les tables, & ôtant une révolution, on a pour huit ans $0^h\ 57'\ 18''$, & ainſi des autres années de 4 en 4.

2975. Par-là on peut conſtruire ou prolonger la table des époques des conjonctions moyennes pour chaque année. L'époque du premier ſatellite pour 1700, eſt $1^j\ 0^h\ 49'\ 53''$; on y ajoutera pour quatre ans $0^j\ 21^h\ 42'\ 53''$, on ôtera une révolution, on trouvera $0^j\ 4^h\ 4'\ 10''$ pour 1704, & ainſi de ſuite. Les quatre années de la table ſuppoſent qu'on parte d'une année biſſextile & qu'on tombe ſur année biſſextile, en paſſant trois années communes; mais à cauſe de la réforme Grégorienne du calendrier, l'année 1700 étoit commune, donc les conjonctions ont retardé en 1701 d'un jour de plus, ou de $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$; il faudroit donc ajouter un jour, mais nous l'ôtons des époques des biſſextiles, afin qu'en ajoutant

un jour dans les deux premiers mois tout ſoit compenſé (1326).

Si l'on part d'une année biſſextile, par exemple, de 1760 à laquelle répond 0j 10h 44′ 20″, on y ajoutera pour 4 années 0j 21h 42′ 53″, & l'on aura pour 1764, 1j 8h 27′ 13″; il n'y a point ici de jour à ôter, puiſque l'on part d'une année biſſextile où le jour étoit déjà retranché.

2976. Ainſi pour prolonger la table des époques, il faut prendre le nombre ou l'époque d'une année biſſextile, y ajouter 1j 8h 40′ 1″, ôter une révolution ſi elle s'y trouve, & l'on aura l'époque de l'année commune ſuivante; il en eſt de même pour la ſeconde & la troiſième, mais pour la quatrième année, on ajoutera ſeulement 8h 40′ 1″, parce qu'elle eſt biſſextile, & qu'on diminue les époques d'un jour dans les années biſſextiles. Tout le reſte va dans le même ordre; à chaque fois on retranche une révolution quand elle s'y trouve de trop, avec les argumens correſpondans à une révolution. Si l'on prenoit pour époque une année commune, il ne faudroit pas ſe ſervir de la table des révolutions pour les années, par exemple, ſi à la conjonction de 1775 qui eſt 0j 3h 58′39″, on ajoutoit, pour cinq ans, 0j 11h 54′ 18″, on n'auroit point la conjonction de 1780, il faudroit en ôter un jour. De même lorſque de 4 en 4 ans l'on eſt parvenu à une centième année qui comme l'année 1800 eſt commune au lieu d'être biſſextile (1547), on ajoute un jour à la ſomme, ou au changement ſéculaire des conjonctions, ſans rien changer aux argumens; à moins qu'on ne ſoit obligé d'ôter une révolution de la ſomme, parce que ce jour ajouté eſt auſſi-tôt rétabli par l'addition d'un jour, dans les moyens mouvemens des années biſſextiles. Si l'on prenoit un nombre d'années terminé par une biſſextile, mais qu'on s'en ſervît pour un intervalle de temps, dans lequel il y eût une année ſéculaire commune, comme 1800, il faudroit auſſi mettre un jour de plus à l'époque, ſans changer les argumens *A*, *B*, *C*, à moins qu'on ne fût obligé après avoir ajouté un jour d'ôter une révolution entière, dans ce

cas, il faut toujours ôter les argumens correſpondans à une révolution, parce que ce jour d'addition n'eſt plus une ſimple notation des tables, lorſqu'il nous tranſporte à une révolution différente.

2977. Il nous reſte à expliquer la manière de trouver la première conjonction pour une certaine année (2913), & d'en conclure toutes les autres : il faut partir d'une obſervation ; je choiſis celle du premier ſatellite, dont l'émerſion fut obſervée le 2 Janvier 1764, à 10^h $23'$ du ſoir, temps vrai réduit au méridien de Paris, ou $10^h\ 27'\ 38''$ de temps moyen. Comme l'on veut que l'équation du temps ſoit toujours additive, il faut ôter $14'\ 42''$ qui eſt la plus grande équation du temps ſouſtractive, & l'on aura $10^h\ 12'\ 56''$ pour le temps moyen de l'obſervation, compté à la manière de nos tables.

Il en faut ôter la demi-durée de l'éclipſe qui calculée par les méthodes ci-deſſus (2940), étoit $1^h\ 4'\ 51''$, la diſtance au nœud étant de $50^\circ\ 17'$, le demi-diamètre de l'ombre $1^h\ 7'\ 55''$, & l'inclinaiſon $3^\circ\ 18'\frac{2}{3}$; il reſte pour le temps moyen du milieu de l'éclipſe $9^h\ 8'\ 5''$, d'où il faut déduire la conjonction moyenne en y appliquant toutes les équations qui avoient lieu ce jour-là. L'anomalie moyenne de Jupiter étant alors de $7^s\ 28^\circ\frac{1}{2}$ environ, l'équation de ſon orbite étoit de $4^\circ\ 51'\frac{1}{2}$ additive, & convertie en temps à raiſon du mouvement du premier ſatellite, elle donne $34'\ 39''$ à ôter de la conjonction.

2978. La même anomalie de Jupiter nous apprend que la diſtance de Jupiter au ſoleil étoit de 5079, & qu'elle ſurpaſſoit la moyenne 5201 de 122 ; c'eſt ce que la lumière parcourt en $58''\frac{1}{2}$, à raiſon de $8'\ 8''$ pour 1000 (2806), ainſi il faut ajouter $58''\frac{1}{2}$; mais il y a $2'\ 2''\frac{1}{2}$ à ôter pour la plus grande équation de la lumière provenant de cette cauſe-là, afin que l'équation ſoit toujours additive ; ainſi nous ôterons $1'\ 4''$ de la conjonction obſervée.

La diſtance de Jupiter à ſon oppoſition étoit alors de $\frac{77}{1000}$ du cercle ; ainſi la grande équation de la lumière

étoit de 7′ 0″ ½ additive, mais la plus grande est 8′ 7″ ½ qu'il faut ôter de toutes les époques, ainsi, il reste 1′ 7″ à ôter de l'époque trouvée par observation.

L'équation *C* particulière au premier satellite, & qui est de 3′ 30″ (2900) avoit été à son maximum le 10 Février 1763, elle recommence tous les 437 jours, elle se trouvoit alors de 0′ 27″, additive à la conjonction observée pour avoir la moyenne; mais il faut ôter les 3′ 30″, c'est-à-dire, la plus grande équation, il restera donc 3′ 3″ à ôter encore de la conjonction observée pour avoir la moyenne comptée à la manière de nos tables. Il faut faire la même opération sur les petites équations qui viennent des inégalités de Jupiter, & qui montent à 32″ pour ce jour-là (*pag.* 172 des tables); enfin l'on ôtera 17″ pour la différence entre le milieu de l'éclipse & la conjonction que nous voulons en conclure (2911), toutes ces soustractions étant faites, il reste 2ʲ 8ʰ 27′ 23″; mais comme dans les années bissextiles on écrit un jour de moins (2974), on aura 1ʲ 8ʰ 27′ 23″ pour la première conjonction, ou pour l'époque des conjonctions de 1764, elle diffère de 10″ de celle qui est employée effectivement dans les tables, parce qu'elles n'ont pas été faites précisément sur cette observation. Dans la table des élémens, art. 2972, les époques des quatre satellites ne sont diminuées que de la somme des petites équations; l'équation *A* reste soustractive dans le premier demi-cercle d'anomalie (2913). Toutes ces équations nécessaires pour réduire une observation en conjonction moyenne se prennent dans les tables des satellites, dont jusqu'ici nous avons expliqué la construction.

De la grosseur des Satellites.

2979. Je ne crois pas que personne puisse voir les satellites de Jupiter à la vue simple, quoiqu'ils paroissent dans nos lunettes avoir à peu-près autant de lumière que des étoiles fixes de 6ᵉ grandeur vues dans les mêmes lunettes; la lumière de Jupiter, dont ils sont toujours très- *On ne peut voir les satellites sans lunettes.*

proches & qui eſt très-vive, empêche qu'on ne puiſſe les appercevoir ; ainſi qu'on ne ſauroit voir les étoiles de 6e grandeur dans le temps de la pleine lune. Il ſuffit pour voir les ſatellites de Jupiter d'y employer une lunette de deux pieds ; mais pour les voir bien diſtinctement & pour les obſerver on eſt obligé d'y employer des lunettes ordinaires de 15 pieds, ou des téleſcopes de 2 pieds de foyer ; c'eſt ce qui ſe pratique généralement pour l'obſervation de leurs éclipſes.

Dans les meilleurs téleſcopes, les ſatellites paroiſſent trop petits pour pouvoir être meſurés avec le micromètre ; ce n'eſt guères que par le temps qu'ils employent à entrer dans l'ombre de Jupiter qu'on peut faire quelque conjecture ſur leur véritable diamètre ; mais le diamètre conclu de cette manière eſt évidemment trop petit, parce que nous ne pouvons obſerver le premier moment de l'immerſion, & parce que nous perdons de vue le ſatellite avant qu'il ſoit tout à-fait dans l'ombre.

Groſſeur des ſatellites.

M. Maraldi ayant examiné & calculé trois obſervations de M. Caſſini, faites en 1695, trouve que le premier ſatellite avoit employé 7′ à entrer ſur le diſque de Jupiter, & qu'il y avoit demeuré $2^h\,27'$, que le 2e avoit employé $9'\,40''$, & avoit demeuré ſur le diſque $3^h\,4'\,20''$; pour le 3e il trouve $12'\,6''$ & $3^h\,43'\,38''$. A l'égard du 4e M. Maraldi concluoit des tables qu'il devoit employer 15′ à entrer, & demeurer $5^h\,0'$ ſur le diſque ; par-là le diamètre du troiſième ſatellite ſe trouve $\frac{1}{18}$ de celui de Jupiter, & les trois autres $\frac{1}{20}$ (*Mém. acad.* 1734, *pag.* 364). Ainſi leurs diamètres ſont environ la moitié de celui de la terre. M. Whiſton a trouvé des réſultats fort différens, en employant la durée de leurs immerſions, (*The longitude diſcovered by the Jupiter's planets, London* 1738, *pag.* 7) ; ſelon lui le 3e ſatellite eſt le plus grand de tous, & il eſt à peu-près de la groſſeur de la terre ; le premier eſt le plus approchant du troiſième, quoique plus petit ; M. Whiſton le juge un peu plus gros que Mars. Le ſecond ſatellite eſt un peu plus petit que le premier, & paroît n'être guères plus grand que Mercure. Le 4e, ſuivant M. Whiſton,

est le moindre de tous, & n'est guères plus grand que la lune. Je parlerai ci-après des différences qu'on remarque dans ces grandeurs apparentes (2985); on verra que M. Cassini regardoit le 4e comme le plus grand des quatre satellites.

2980. Par les observations de M. *Lynn*, rapportées dans les transactions philosophiques (*n°.* 393, 394, 396, 401, 402, 440, depuis 1725, jusqu'à 1736), M. Whiston trouve que le premier satellite emploie 1′ 10″, le second 2′ 20″, le 3e 3′ 40″, le 4e 5′ 30″ à entrer dans l'ombre de Jupiter, lorsqu'ils y entrent perpendiculairement; (voyez aussi les *Mém. de* 1734). Delà il seroit aisé de conclure leurs diamètres apparens vus du centre de Jupiter; par exemple, le 4e satellite en 5′ 30″ de temps parcourt 6′ 7″ de son orbite; ainsi son diamètre fait environ un angle de 6′ vu du centre de Jupiter; or, la distance 25, 3 multipliée par le sinus de 3′ 3″ donne $\frac{1}{44}$; ainsi le diamètre du 4e satellite n'est que $\frac{1}{44}$ de celui de Jupiter, ce qui ne fait que le quart de celui de la terre. M. Wargentin m'écrivoit en 1767, qu'il avoit comparé les ombres des satellites sur Jupiter, & qu'il avoit trouvé le 3e & le 4e 5 à 6 fois plus larges que le premier, & le second deux fois moindre que le premier.

Temps qu'ils emploient à s'éclipser.

Diamètre du quatrième.

2981. Les masses des satellites, c'est-à-dire, leurs quantités de matière où leurs forces attractives sont encore plus difficiles à déterminer, parce qu'elles supposent la valeur des densités connue. On détermine celles des planètes par l'action qu'elles exercent sur leurs satellites (3403), & celle de la lune par son effet sur les marées; celle des satellites ne peut se connoître que par les inégalités qui proviennent de leurs attractions réciproques, observées & comparées avec le calcul que donne la théorie.

La masse du premier étant supposée égale à celle du 3e, M. de la Grange trouve par les inégalités, qui dans le second satellite sont l'effet des deux attractions, que ces masses sont 0,00006869; suivant M. Bailly, elles sont de 0,0000638, celle de Jupiter étant prise pour unité. Par le mouvement du nœud du second, M. Bailly

trouve pour le premier 0,00004247. La masse du second satellite trouvée par une inégalité du premier, dont il est à peu-près la seule cause, est 0,0000211, suivant M. Bailly, & 0,00002417, suivant M. de la Grange.

La masse du 3[e] déterminée par l'effet qu'il a conjointement avec le premier sur le mouvement du nœud du second, se trouve, suivant M. Bailly, 0,0000764; & par l'effet qu'il produit dans l'inégalité du second, en le supposant égal au premier, qui y contribue aussi, il trouve 0,0000638, & M. la Grange 0,0000687.

La masse du 4[e] est la plus difficile à déterminer, parce qu'il paroît que son action sur le 3[e] est peu sensible; mais par la comparaison d'un grand nombre d'observations, M. Bailly trouve qu'elle peut être environ 0,00005; (*Mém. acad.* 1766).

2982. Les temps que les satellites employent à s'éclipser deviennent beaucoup plus considérables quand les éclipses se font loin des nœuds, c'est alors que les observations sont les plus incertaines, sur-tout quand il s'agit du 4[e] satellite. Lorsqu'il arrive des éclipses où le 4[e] satel-
Fig. 256. lite parcourt dans l'ombre une ligne *MN* (*fig.* 256), telle que la distance *MO* approche beaucoup du demi-diamètre du satellite, la corde *Mf* qui marque la demi-demeure du centre du satellite diffère beaucoup de la corde *Ma* qui marque la demi-durée de l'éclipse totale, & de *Mc* qui marque la durée de l'éclipse, à compter du milieu *M* jusqu'au dernier contact du satellite; la ligne *ac* répond au temps que le satellite emploie à entrer ou à sortir; & comme nous ne savons point quelle partie du disque du satellite doit être sortie de l'ombre pour que nous commencions à l'appercevoir, nous pouvons nous tromper de beaucoup sur la valeur de la corde *Mf* conclue de l'observation, & sur l'inclinaison qu'on en déduit.

Différences des lunettes.

2983. Cette difficulté est encore augmentée par la différence des lunettes, qui produit sur les observations une différence énorme. L'immersion du 4[e] satellite observée le 25 Janvier 1762, parut à $6^h\ 16'\frac{1}{2}$ avec une bonne lunette de 15 pieds dont M. Maraldi se servoit, & à $6^h\ 29'$ avec

avec un télescope Grégorien de 30 pouces de foyer dont se servoit M. Messier; cette observation étoit très-difficile à faire, car le satellite mettoit plus de 30′ à perdre sa lumière.

Le 3e satellite disparut le 25 Janvier 1763 à 5h 38′ 49″ avec un télescope Newtonien de 4 pieds & demi, d'une bonté médiocre, & il ne disparut qu'à 5h 41′ 39″, c'est-à-dire, 2′ 50″ plus tard avec un excellent télescope Grégorien de 30 pouces de foyer, (V. les *Mém. présentés*, tom. V, *pag.* 616), le satellite étoit alors dans ses limites, & il employoit plus d'un quart-d'heure à perdre sa lumière; voyez sur ces différences l'art. 2494; ainsi l'on ne doit pas essayer, ce me semble, de calculer l'effet des lunettes quand il s'agit du 4e satellite; pour ce qui est du premier satellite, j'ai parlé ailleurs de l'effet que produit ordinairement la différence des lunettes (2494).

2984. M. de Fouchy remarqua, (*Mém. de l'acad.* 1732), qu'il devoit y avoir une inégalité optique dans les éclipses des satellites, à raison des distances; car la lumière des satellites étant moindre quand ils sont plus éloignés du soleil ou de la terre, ils disparoissent plutôt & reparoissent plus tard: M. de Fouchy propose pour en éviter l'effet, de se servir, autant qu'on le pourra, des conjonctions inférieures des satellites sur le disque de Jupiter pour en déduire leurs mouvemens. M. de Barros a aussi observé que l'opacité de l'atmosphère à différentes hauteurs devoit influer dans ces observations, de même que la proximité des satellites par rapport à Jupiter, & il a rapporté des expériences qui peuvent servir à introduire cet élément dans le calcul, (*Mémoires de Berlin* 1755, *pag.* 362). Ces équations sont peut-être assez considérables pour causer la discordance qu'on observe souvent entre des observations peu éloignées (2971).

Différences des distances.

2985. On observe aussi les satellites lorsqu'ils disparoissent étant cachés par le disque de Jupiter, & lorsqu'ils passent sur ce même disque dans la partie inférieure de leur orbite, parce qu'ils jettent alors des ombres ou taches noires, dont on observe le mouvement, égal à

Passage des satellites sur le disque de Jupiter.

celui des satellites qui les produisent, (*Phil. transf. n°* 1; 359); M. Cassini fut le premier qui en 1664 observa ces sortes de taches. Lorsque Jupiter est à l'occident du soleil elles doivent paroître sur la planète avant le satellite lui-même ; on y distingue aussi quelquefois le satellite sous la forme d'une petite tache, plus petite que n'est son ombre lorsqu'on l'y apperçoit.

Rotation des satellites.

M. Cassini le fils (*Elém. d'astron. pag.* 622), conclut en partie de-là que les satellites ont un mouvement de rotation sur eux-mêmes, aussi bien que les planètes ; en effet puisque les taches obscures qui rendent quelquefois le satellite visible sur le disque même de Jupiter, ne s'y rencontrent pas toujours, il faut qu'elles soient tantôt dans l'hémisphère visible du satellite, tantôt dans l'hémisphère opposé ; de-là vient aussi que le 4e satellite paroît souvent plus petit que les autres (2979), quoiqu'il soit plus grand que les deux premiers au jugement de M. Cassini, & que son ombre soit toujours plus grande que la leur. Le troisième sur-tout paroît ordinairement le plus grand de tous & quelquefois on le voit égal aux deux premiers, suivant que les grandes taches obscures qui occupent une partie de la surface, sont tournées vers nous, ou du côté opposé, (Voy. les *Mém. ac.* 1707, 1712, 1714 & 1734, *pag.* 366. M. Duhamel & M. Godin, *Hist. de l'acad. à l'année* 1694. *Anciens Mémoires, T. II, pag.* 226).

M. Pound observant en 1719 les satellites de Jupiter sur le disque de cette planète, remarqua qu'ils étoient beaucoup plus lumineux dans des temps que dans d'autres ; il en conclut aussi que les satellites tournent sur leur axe, & qu'il y a des parties de leur surface qui réfléchissent très-peu les rayons du soleil, (*Phil. transf. n°.* 359, *Abrégé* IV. 308).

C'est peut-être pour cette raison que le 3e satellite, paroît quelquefois employer dix minutes à entrer dans Jupiter, ou à en sortir, & d'autres fois 6′ seulement, quoique la diversité des lunettes, sa latitude plus ou moins grande, & son mouvement plus ou moins rapide ne puissent pas produire une si grande différence, on est confirmé

dans cette opinion par le 5e fatellite de Saturne qui non-feulement diminue, mais difparoît totalement dans la partie orientale de fon orbite (2994).

2986. Les paffages de l'ombre des fatellites fur le difque de Jupiter fe calculent à peu-près comme leurs éclipfes; car quand le fatellite eft dans fa conjonction inférieure vue du foleil, fon ombre répond au centre de Jupiter, à moins que la latitude du fatellite ne lui faffe décrire une corde au lieu d'un diamètre (2928). Cependant ces paffages font fujets à l'effet de la parallaxe annuelle; car quand le fatellite eft en conjonction au point *H* de fon orbite (*fig.* 244) fon ombre eft en *A* fur le difque de Jupiter, mais il faut que le fatellite arrive en *M* pour que fon ombre paroiffe en *L* fur la ligne menée de la terre *T* au centre *I* de Jupiter; l'arc *MH* eft à l'arc *LA*, comme *IA* eft à *IH*. Le 1 Mars 1765, la conjonction héliocentrique du 4e fatellite n'a dû arriver, fuivant la remarque de M. Maraldi, que 25′ après que M. Wargentin eût vu l'ombre de ce fatellite au milieu du difque de Jupiter; car la parallaxe annuelle *AL* étoit de 9° 33′ 35″, or *IA* eft à *IH*, ou 76 eft à 3, comme le finus de cet arc eft à celui de *HM*=22′ 32″, que le 4e fatellite parcourt en 25′ 9″ de temps.

Le paffage du fatellite fur le difque de Jupiter n'arrive que quand il eft au point *N* de fon orbite, après avoir parcouru un arc *HN* égal à la parallaxe annuelle; & il fuffit pour le calculer d'ajouter ou de retrancher l'effet de cette parallaxe. Cependant la corde décrite fur le difque de Jupiter dépend non-feulement de fa latitude, mais auffi un peu de l'élévation de notre œil au-deffus du plan de l'orbite de Jupiter, ou de la latitude de la terre vue de Jupiter, dont nous avons parlé (2949). La durée du paffage d'un fatellite eft auffi un peu plus grande que celle des éclipfes; M. Whifton ajoute 6′ pour le premier, 7′ pour le fecond, 8′ pour les deux autres, ce qu'il attribue à la pénombre & en partie à la réfraction produite dans l'atmofphère de Jupiter, qui rétrecit le cône d'ombre. (*The. long. difcov. pag.* 4 & 18). Nous avons

vu un exemple de cette différence entre Jupiter & son ombre (2919).

DES CONFIGURATIONS DES SATELLITES, & de l'effet des Parallaxes annuelles.

2987. Pour distinguer les satellites de Jupiter l'un de l'autre dans différentes positions, & sur-tout pour observer les satellites de Saturne, qui se voyent si difficilement, il est nécessaire d'avoir leur situation apparente vue de la terre par rapport à la planète principale. M. de Peiresc avoit eu l'idée de représenter graphiquement, c'est-à-dire, par des figures, les éclipses des satellites de Jupiter, (*Gassendi in vitâ Peir.*); M. Cassini y trouva aussi une très-grande commodité, & il se forma un instrument composé de cercles mobiles de carton; M. Weidler en a donné la description & l'usage, d'après celui que M. Maraldi lui communiqua dans un voyage qu'il fit à Paris. (*Explicatio Jovilabii Cassiniani* 1727, *in-4°. Witembergæ*).

Flamsteed forma aussi un instrument en 1685, pour trouver en tout temps la situation des satellites, & leurs configurations (*Phil. trans.* n°. 178), M. Whiston, en décrit un dans l'ouvrage que j'ai cité (2979); j'ai moi-même donné la construction & l'usage de celui de M. Cassini, dans mon *Exposition du calcul astronomique*, *pag.* 79; j'en rapporte ici la figure, ainsi que d'un instrument semblable pour les satellites de Saturne, & j'en expliquerai l'usage en peu de mots.

Cercles qui représentent les orbites. *Pl. XXXIV. Fig.* 260.

On voit d'abord dans la *fig.* 260, l'écliptique divisée en 12 signes; une alidade transparente, que l'on fait ordinairement de corne, & qui est représentée par *ACB* tourne autour du centre *C*; elle se place sur le point *A*, où répond la longitude géocentrique de Jupiter, connue par une éphémeride, & s'arrête au moyen d'une pince marquée en *D*. La figure suppose la longitude de Jupiter $9^s\ 22^\circ$ pour le 1 Mai 1759. Les quatre cercles intérieurs sont des cercles de carton qui doivent être mobiles au-

tour du centre *C*; ils repréſentent les orbites des quatre ſatellites, diviſées en jours, par les tables des moyens mouvemens, (art. 2972; *tables de* M. Caſſini; *Exp. du cal. pag.* 243). On calcule par ces mêmes tables la longitude jovicentrique de chacun des quatre ſatellites pour le premier jour du mois; on trouve, par exemple, pour le 1 Mai 1759, les longitudes ſuivantes, $0^s\ 24°$ pour le 4[e] ſatellite, $2^s\ 25°$ pour le 3[e], $3^s\ 11°$ pour le ſecond, $10^s\ 13°$ pour le premier; on place le chiffre 1 de chaque cercle vis-à-vis de cette longitude calculée; le chiffre 1 de l'orbite du 4[e] ſatellite répond à $0^s\ 24°$, &c. alors la ſituation du point 1 par rapport à l'alidade *ACB*, fait voir la ſituation apparente de chaque ſatellite par rapport à Jupiter, le premier du mois, pour un obſervateur qui eſt ſitué ſur le prolongement de l'alidade *ACB* toujours dirigée vers la terre. La ſituation des points marqués 2 ſur chacune des quatre orbites, fait voir la poſition des 4 ſatellites, le 2 à pareille heure; il en eſt de même à tous les autres jours du mois. Par ce moyen l'on formera la configuration des quatre ſatellites telle qu'on la voit ſur la ligne *EF* au bas de la figure 260 ou Jupiter eſt ſuppoſé en *I*; le point 4 de l'orbite du troiſième ſatellite étant de 8 lignes à la droite de l'alidade *AB* m'apprend que je dois placer le troiſième ſatellite, de 8 lignes à gauche de Jupiter, ſur la ligne des bandes *EF* (3222), & ainſi des autres; l'on figurera ainſi Jupiter accompagné de ſes quatre ſatellites, tel qu'il paroît dans une lunette de 15 pieds, qui renverſe les objets. Les cercles ſont diſpoſés pour une figure redreſſée. *Fig.* 260.

Les ſatellites 1 & 3 ſont au-deſſus de la ligne des bandes, parce que à cauſe de l'inclinaiſon des orbites, les ſatellites paroiſſent un peu vers le nord dans un des demi-cercles de leurs révolutions; tant que le ſatellite eſt entre $10^s\ 15°$, & $4^s\ 15°$ de longitude, ou au-deſſus de la ligne des nœuds *NN*, il paroît toujours un peu plus ſeptentrional que l'orbite de Jupiter, & cela d'autant plus qu'il eſt plus éloigné des points *N*. Latitudes des ſatellites.

Le chiffre qui indique le ſatellite, ſe met entre Ju-

Fig. 260. piter & le point qui marque la place du ſatellite, quand on voit ſur le jovilabe que le ſatellite ſe rapproche de Jupiter, comme dans la figure; au contraire on met le chiffre au-delà du point quand le ſatellite s'éloigne de Jupiter. On peut voir de ſemblables configurations pour tous les jours, dans la connoiſſance des temps de chaque année, dans les éphémérides du P. Hell, & dans le *Nautical almanach* de Londres.

Raiſon de cette opération.

On comprendra la raiſon de l'opération précédente en conſidérant que la ligne *CA* marque le rayon qui va de notre œil au centre de Jupiter; la ligne *CB* marque le rayon qui va de Jupiter à la terre; ainſi les ſatellites nous paroîtront plus ou moins éloignés de Jupiter, ſuivant qu'ils ſeront plus ou moins éloignés de l'alidade *BCA* ſur laquelle nous voyons toujours le centre de Jupiter, il n'importe point qu'ils ſoient plus ou moins avancés le long de cette ligne *CA*, il ne s'agit que de leur diſtance à l'alidade. On marque dans les configurations les temps ou chaque ſatellite paroît ſur le diſque de Jupiter, où ſe trouve caché derrière le diſque; cela eſt facile, parce que la largeur de l'alidade eſt égale à celle de Jupiter lui-même, ainſi quand le point eſt ſous l'alidade, on juge que le ſatellite eſt derriere Jupiter, ou qu'il eſt ſur ſon diſque.

On y marque auſſi les temps où le ſatellite eſt dans l'ombre; pour cet effet, il faut tendre un fil du centre *C* à la circonférence de l'écliptique; mais ſur un point différent du point *A*, de la quantité de la parallaxe annuelle, & à gauche ſi Jupiter a paſſé l'oppoſition; ce fil repréſentera l'axe du cône d'ombre qui eſt ſur la ligne menée du ſoleil à Jupiter, & on lui ſuppoſera la même largeur qu'à l'alidade *AB*.

Si l'on connoît l'heure du paſſage de Jupiter au méridien, on trouvera à très-peu-près la ſituation de cette ombre par le moyen du petit demi-cercle, où j'ai marqué l'effet de la parallaxe annuelle. Les heures du paſſage, à gauche ſont pour le ſoir, dans une figure redreſſée. Je ſuppoſe que Jupiter paſſe au méridien à 2 heures ou à

10 heures, du matin, on abaiſſera du point marqué 2 & 10 une perpendiculaire ſur le diamètre *POR*, la diſtance *OS* du centre à la perpendiculaire marquera la quantité dont l'axe de l'ombre eſt à droite de l'alidade *AC* ſur la circonférence extérieure *AV* de l'écliptique. *Fig.* 260.

La grandeur de la ligne *EF* ſur laquelle j'ai figuré les quatre ſatellites, au bas de la planche XXXIV, paroîtroit plus conſidérable ſi l'on ſe ſervoit d'un plus fort téleſcope; il y a même des perſonnes qui dans une lunette eſtiment les diſtances beaucoup plus grandes que moi, & jugent la plus grande diſtance du 4[e] ſatellite de trois pouces, tandis que je l'eſtime d'un pouce & demi; mais cela eſt indifférent; il ſuffit que dans la configuration qui eſt au bas de la planche XXXIV, toutes les parties ſoient bien proportionnées.

Il y a dans la planche XXXV un ſemblable inſtrument pour les configurations des ſatellites de Saturne, dont nous parlerons ci-après (2994).

Effet de la parallaxe annuelle.

2988. Le temps où il importe le plus de connoître la ſituation apparente des ſatellites, eſt celui des immerſions & des émerſions; c'eſt pourquoi je vais parler ſéparément des effets de la parallaxe annuelle ſur la ſituation des ſatellites au temps des éclipſes. On peut voir des tables à ce ſujet, données par Flamſteed (*Philoſ. tranſ.* 1686, *n*°. 184), & par Whiſton (*The longitude diſcovered*, &c.); mais je trouve que cet effet peut ſe repréſenter par une ſimple figure avec une préciſion ſuffiſante pour l'uſage des obſervateurs.

Soit *I*, le centre de Jupiter (*fig.* 258), environné des orbes de ſes quatre ſatellites; *IG* la ligne des ſyzygies ou l'axe du cône d'ombre; *GE* un arc de 11°, pris ſur la circonférence de l'orbite du 4[e] ſatellite; cet arc étant égal à la plus grande parallaxe annuelle de Jupiter, dans ſes moyennes diſtances, la ligne *IE* marquera la direction du rayon viſuel de la terre quand Jupiter eſt dans ſa quadrature, entre l'oppoſition & la conjonction, paſſant au méridien à 6 heures du ſoir; car alors nous voyons Jupiter 11° à l'occident de ſon vrai lieu héliocentrique, *Fig.* 258.

Fig. 258. marqué par la ligne *IG*. Si par les points *G*, *F*, *g*, *f*, ſur leſquels ſe trouvent les ſatellites en conjonction, on tire des parallèles à la ligne *IE*, telles que *GD*, *FC*, *gB*, *fA*, l'on aura les 4 points, *A*, *B*, *C*, *D*, où les ſatellites doivent paroître à côté de Jupiter, au moment de leur conjonction héliocentrique; c'eſt ſur la droite de Jupiter, après l'oppoſition dans une lunette qui renverſe, de même que dans la figure 258.

Dans les autres temps de l'année & lorſque la parallaxe annuelle ſera moindre que 11°, on trouvera la poſition du rayon viſuel *IE*, qui eſt la ligne des conjonctions géocentriques, en décrivant ſur l'arc *EG* comme rayon, un demi-cercle, diviſé en degrés, ou en heures; on prendra 30° en partant du point *E* de 6 heures, l'on y marquera 4^h & 8^h, parce que Jupiter étant éloigné de 30° de ſa quadrature, paſſe au méridien environ à 8^h du ſoir, où à 4^h du ſoir; & l'on tirera vers ce point de 4^h la ligne telle que *IE*; il eſt plus commode pour les aſtronomes d'avoir ce demi-cercle diviſé en temps que de l'avoir en degrés, parce que le temps du paſſage au méridien ſe trouve calculé dans les éphémérides, & que les aſtronomes en font un uſage continuel.

Lorſque Jupiter, après la conjonction paſſe au méridien le matin, c'eſt du côté droit ou dans la partie orientale qu'on doit tirer la ligne *IE* de la conjonction géocentrique; & les ſatellites nous paroîtront à gauche ou à l'occident de Jupiter dans le temps de leurs conjonctions héliocentriques.

Situations au temps des éclipſes.

2989. On trouvera par le moyen de cette figure la diſtance des ſatellites en émerſion, en prenant du côté de l'orient, c'eſt-à-dire, à droite des points *A*, *B*, *C*, *D*, une quantité égale au demi-diamètre de l'ombre, qui eſt à peu-près égal au demi-diamètre *IH* de Jupiter, & l'on aura la diſtance des ſatellites par rapport au bord de Jupiter, pour le temps de leurs émerſions; ou bien l'on examinera la diſtance *IA* d'un ſatellite au centre de Jupiter, pour le temps de la conjonction, & ce ſera ſa diſtance au bord occidental *H*, pour le temps de l'immerſion,

mersion, & au bord oriental X, pour le temps de l'émersion. Ces distances au bord X sont rapportées sur la figure 259, elles sont de $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{10}$, $1\frac{1}{2}$, & $2\frac{1}{2}$ diamètres de Jupiter, dans les émersions qui arrivent au temps des quadratures. Dans les autres temps ces distances diminuent comme les sinus des distances à la conjonction ou à l'opposition; ensorte qu'elles sont réduites à moitié quand Jupiter passe au méridien à 3^h ou à 9^h. *Fig.* 258.

Quantité de la parallaxe.

La même figure sert à trouver l'effet de la parallaxe annuelle en minutes, que nous avons supposé à peu-près connu (2950). Il suffit de diviser l'arc GE qui exprime la plus grande parallaxe de $11°$ en $660'$; quand on saura l'heure du passage de Jupiter au méridien, par exemple 2^h, on prendra la distance du point marqué 2^h, à la ligne GI, ou la valeur de la perpendiculaire sur GI, ce sera la parallaxe annuelle exprimée en minutes; parce que la parallaxe ayant pour base le sinus de l'arc de l'orbite terrestre qui exprime la distance de la terre à la conjonction, elle varie comme les perpendiculaires dont nous venons de parler.

Situation des satellites en latitud.

2990. Dans la construction de la *fig.* 258, je n'ai point eu égard aux latitudes des satellites, & je les ai rapportés sur une ligne ID qui traverse le centre de Jupiter parallélement à son orbite, & dans la direction des bandes (3222), ou de l'équateur de Jupiter, qui ne diffère pas sensiblement de la direction des 4 orbites; c'est le cas qui a lieu quand Jupiter est vers $4^s\frac{1}{2}$ & $10^s\frac{1}{2}$ de longitude; mais entre $4^s\frac{1}{2}$ & $10^s\frac{1}{2}$ de longitude, les satellites en conjonction paroissent au midi du diamètre de Jupiter ou de la ligne des bandes, à laquelle nous les avons rapportés, c'est-à-dire, en haut dans la figure renversée; au contraire entre $10^s\frac{1}{2}$ & $4^s\frac{1}{2}$ ils paroissent au nord ou au-dessous de la ligne des bandes vers le temps de leurs conjonctions supérieures; la quantité est la plus considérable quand Jupiter approche de $1^s\frac{1}{2}$ ou $7^s\frac{1}{2}$ de longitude; c'est alors que la latitude des satellites est la plus grande; j'en ai marqué l'effet au-dessous des nombres 1, 2, 3, 4, (*fig.* 259), en supposant l'inclinaison moyen- *Fig.* 259.

Fig. 259. ne de 3°, & les ſatellites ſeront aux points *p*, *q*, *r*, *s*, au lieu d'être aux points 1, 2, 3, 4 au temps de leurs émerſions, s'ils ſont vers $1^s\frac{1}{2}$ de longitude vus du centre de Jupiter; ou ce qui revient preſque au même, ſi la longitude de Jupiter eſt à peu-près à $1^s\frac{1}{2}$; ils ſeroient au-deſſus ſi Jupiter étoit à $7^s\frac{1}{2}$.

2991. Pour voir à peu-près ſur la figure 258 cette latitude des ſatellites en tout autre temps, on prendra ſur l'orbe du 4e, un arc *MN* égal à 3°, inclinaiſon moyenne entre celles des 4 ſatellites; on décrira un cercle *MKL*, on le diviſera en ſignes & degrés, marquant en *K* le lieu du nœud $10^s\frac{1}{2}$ & $4^s\frac{1}{2}$; en *L* $1^s\frac{1}{2}$; & en *M* $7^s\frac{1}{2}$; on tirera du point *I* une ligne au ſommet *M* du petit cercle; elle marquera en *O*, la plus grande latitude *OP*, que puiſſe avoir le 3e ſatellite; en *R* la plus grande latitude *RT* du ſecond, &c. ainſi l'on placera les ſatellites ſur la ligne *MORI* prolongée, au lieu de les placer ſur la ligne *NID*; ſi la conjonction arrive près de la limite, ce ſera ſur une ellipſe dont *MN*, *OP*, &c. ſoit le demi-petit axe.

Pour d'autres ſituations des ſatellites, on marque ſur le petit cercle *MKL*, la longitude, par exemple, du 3e ſatellite vue du centre de Jupiter, pour un jour donné, qu'il eſt aiſé d'avoir par les cercles de la *fig.* 260 (2987); on tire la ligne *IM* au point de cette longitude; elle indique la latitude *OP* du troiſième ſatellite en conjonction (pour le temps où il avoit la longitude donnée); c'eſt ſa diſtance au-deſſus ou au-deſſous de la ligne des bandes (3222). Il y auroit beaucoup de choſes à dire ſur les latitudes apparentes des ſatellites, vues de la terre; mais cette matière n'eſt pas d'un uſage aſſez fréquent pour devoir trouver place ici; au reſte les principes que j'ai employés ailleurs (2949, 2962, 3234), peuvent s'appliquer à tous les cas.

DES SATELLITES DE SATURNE.

2992. Une grande partie des principes que j'ai établis en parlant des 4 ſatellites de Jupiter, doit s'appliquer aux 5 ſatellites de Saturne, avec cette différence qu'on n'a point le ſecours de leurs éclipſes pour déterminer leur théorie. On les voit ſi difficilement que l'on n'a pas même encore déterminé leurs inégalités, quoiqu'elles paroiſſent conſidérables; M. Caſſini ſoupçonnoit des inégalités de 6° dans le mouvement du 5ᵉ ſatellite (*Mém. acad.* 1716, *pag.* 217), mais ſes tables, les meilleures que nous ayons, ne repréſentent que les mouvemens moyens. La table que l'on trouvera ci-après (2997), en contient tout le réſultat, car il ſuffit de ſavoir quelle eſt la longitude vue de Jupiter, comptée ſur l'orbite du ſatellite, pour une époque donnée, telle que 1760, avec le mouvement diurne du ſatellite, pour trouver ſa longitude en tout temps, & pour former l'inſtrument de la *fig.* 261, qui fera trouver la ſituation apparente des ſatellites.

2993. M. Huygens, le 25 Mars 1655, obſervant Saturne avec des lunettes de 12 & de 23 pieds, apperçut le 4ᵉ ſatelllite pour la première fois; c'eſt le plus gros de tous, & le ſeul qu'on puiſſe voir avec des lunettes ordinaires de 10 à 12 pieds; M. Caſſini apperçut le cinquième ſur la fin d'Octobre 1671, avec une lunette de 17 pieds; il vit enſuite le troiſième avec des lunettes de 35 & 70 pieds, le 23 Décembre 1672, & il publia pour lors un petit ouvrage à ce ſujet. Au mois de Mars 1684, il obſerva les deux intérieurs, c'eſt-à-dire, le premier & le ſecond, avec des lunettes de Campani de 34, 47, 100 & 136 pieds, avec celles de Borelli de 40 & de 70, & avec celles d'Artonquelli qui étoient encore plus longues. (*Journal des ſçav.* 15 Mars 1677 & 1686. *Phil. tranſ. n°.* 133, 154, 181. *Mém. acad.* 1714). L'on doutoit en Angleterre de l'exiſtence des quatre ſatellites que M. Caſſini avoit découverts; mais en 1718 M. Pound

Découverte des ſatellites de Saturne.

ayant élevé au-dessus du clocher de sa Paroisse (2796) l'excellent objectif de 123 pieds de foyer que M. Huygens avoit donné à la société Royale de Londres, il les observa tous les cinq; l'on fut assuré pour la première fois en Angleterre, que Saturne avoit réellement cinq satellites, comme M. Cassini l'avoit dit depuis long temps (*Philos. trans.* n°. 355. Abrégé IV, 322. *Act. erud. suppl.* T. VII.), & l'on vérifia les élémens de leur théorie, comme M. Cassini l'avoit fait à Paris en 1714. Dans le même temps M. Hadley, Vice-Président de la société Royale, ayant trouvé le moyen de faire d'excellens télescopes, à l'instigation de Newton, ce fut avec ces télescopes qu'on continua d'observer les satellites de Saturne. (*Philos. trans.* 1723, n°. 378. *Acta erud. feb.* 1730).

2994. Les satellites de Saturne sont si petits & si éloignés de nous qu'on ne peut les appercevoir qu'avec peine; il faut nécessairement avoir leur configuration, & pour cet effet, nous avons mis dans la planche XXXV, fig. 261, le modele d'un saturnilabe semblable à celui dont nous avons expliqué l'usage pour Jupiter (2987); mais il faut remarquer dans celui de Saturne, que le 5e satellite a réellement une distance double de celle qui est dans la figure; on a été obligé de s'écarter de la proportion pour celui-là, afin de ne pas rendre la figure trop grande pour ce volume, & même pour l'usage. On n'a marqué que 31 jours sur son orbite, parce qu'on suppose que les longitudes des satellites soient calculées pour le 1 de chaque mois par les tables. Pour le 4e satellite 5 jours & 21 jours répondent presque au même point, parce que tous les 16 jours il acheve une révolution.

Le premier & le second satellite ne se voyent qu'à peine avec des lunettes ordinaires de 40 pieds, le troisième est un peu plus gros, quelquefois on l'apperçoit pendant tout le cours de sa révolution; le 4e est le plus gros de tous, aussi fut-il découvert le premier (2993). Le 5e surpasse les trois premiers quand il est vers sa digression occidentale, mais quelquefois il est très-petit,

& disparoît même entiérement (*Mém. acad.* 1714, 1757, *pag.* 94). M. Wargentin m'a assuré les avoir vu tous avec une lunette acromatique de dix pieds (2298).

Des tables de ces satellites.

2995. Les tables que nous avons des mouvemens de ces satellites, ne sont destinées qu'à pouvoir reconnoître les satellites, & profiter des circonstances favorables pour les observer d'une manière plus suivie. Huygens avoit donné en 1659, des tables du 4e, que M. Halley corrigea par quelques observations faites en 1682 & 1683, (*Phil. transf. n°.* 145). M. Cassini en publia en 1693, pour tous les satellites; mais les meilleures sont celles qui se trouvent dans les *Mém. de* 1716, elles furent dressées par M. Cassini le fils, sur les observations qu'il avoit faites en 1713 & 1714, avec un objectif de 114 pieds de foyer, comparées avec les observations de 1684, &c. 1703, &c. Ces mêmes tables ont été imprimées dans le volume des tables astronomiques de M. Cassini, en 1740 & dans celles de Halley, qui les préféra, par l'avis même de Bradley, à celles que Pound avoit données dans les transactions philosophiques (n°. 356), & qui se trouvent, du moins pour le 4e satellite, dans les *Instit. astronom. pag.* 304.

2996. On détermine les révolutions des satellites en comparant ensemble des observations faites lorsque Saturne est à peu-près dans le même lieu de son orbe (2882), & les satellites à même distance de la conjonction; on choisit aussi les temps où leurs ellipses sont les plus ouvertes, c'est-à-dire, où Saturne est à 90° de leurs nœuds, parce qu'alors la réduction est nulle, & le lieu du satellite sur son orbite est le même que son vrai lieu réduit à l'orbite de Saturne; c'est ainsi que M. Cassini a déterminé en 1714 leurs périodes vues de Saturne à l'égard de l'équinoxe, telles qu'on les voit dans la table ci-jointe. Il détermina aussi les époques de leurs longitudes, vues du centre de Saturne, & comptées le long des plans de leurs orbites,

Epoques de leurs longitudes.

Satell.	Révol. périod.
I	$1^j\ 21^h\ 18'\ 27''$
II	2 17 44 22
III	4 12 25 12
IV	15 22 34 38
V	79 7 47 0

je les ai rapportées dans la table de l'article suivant, pour l'année 1760, afin qu'on puisse trouver aisément leur position en tout autre temps (1326), comme on les trouveroit par les tables détaillées, qui sont dans les mémoires de l'académie de 1716, ou dans le livre de M. Cassini ; si l'on veut avoir ces positions avec exactitude, il faut les réduire au plan de l'orbite de Saturne, comme nous avons réduit les planètes au plan de l'écliptique (1130). L'argument de latitude se trouve en retranchant de la longitude du satellite vue de Saturne celle du nœud, qu'on verra ci-après (2998), c'est-à dire, $5^s\ 4^o$ pour le 5e, & $5^s\ 22^o$ pour les quatre autres. Le sinus de la dist. de Saturne au nœud, multiplié par le sinus de l'inclinaison, donnera le sinus de l'angle que fait l'orbite avec notre rayon visuel ; & par conséquent la valeur du petit axe de l'ellipse que le satellite paroît décrire, le grand axe étant pris pour unité. Dans les six premiers signes de l'argument, la partie de l'orbite la plus éloignée de nous sera du côté du nord. On trouvera parmi les tables de M. Cassini, & celles de M. Halley, (édition de Londres), des tables de latitude & de réduction pour les satellites de Saturne. Nous négligeons ici la latitude de la terre, par rapport à l'orbite de Saturne, parce qu'elle n'excède guères un quart de degré ; nous avons donné la manière dont on pourroit y avoir égard (*2949*, *2962*, *3234*).

Des distances à Saturne.

2997. On a employé plusieurs méthodes pour déterminer les distances des satellites au centre de Saturne : il est fort difficile de les voir avec Saturne dans le même champ de la lunette, pour mesurer leurs plus grandes digressions ; d'ailleurs cette méthode ne peut guères servir que pour les deux premiers satellites. L'on emploie pour les autres l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de Saturne & celui du satellite par un fil horaire placé au foyer d'un télescope. M. Cassini observa que la règle de Képler (1224) se vérifioit très-bien dans les cinq satellites, (*Mém. ac.* 1716, *p.* 218). M. Pound s'en servit pour trouver, par la distance du 4e, celles des autres satellites ; il détermina, au moyen de l'objectif de 123 pieds, le plus

exactement & le plus ſouvent qu'il fût poſſible la diſtance du 4e au centre de Saturne dans ſes plus grandes digreſſions, qu'il trouva de 8, 7 demi-diamètres de l'anneau (3227), & connoiſſant d'ailleurs (*2996*) la durée de leurs révolutions, il en conclut par la règle de Képler les diſtances des 4 autres, comme je vais les rapporter en demi-diamètres de l'anneau, & en demi-diam. de Saturne, (ceux-ci étant comme 7 eſt à 3). J'y joindrai ces mêmes diſtances, ſuiv. les obſervations de M. Caſſini, en demi-diam. de l'anneau, & enſuite celles qu'il en a concluës par la loi de Képler, en ſuppoſant le diamètre de l'anneau de 45″ dans les moyennes diſtances de Saturne, & la diſtance du 4e de 4 diamètres de l'anneau, ou de 3′. (*Elem. d'aſtron. pag.* 642. *Tables de Halley, édit. de Lond. Phil. tranſ.* 1718, n°. 355. *Acta erud. ſuppl. T. VII*).

TABLE des longitudes & des diſtances des Satellites de Saturne.

SATELLIT.	Longit. en 1760, ſuiv. M. Caſſini.	Mouvement diurne.	Mouvement pour 365 jours.	Diſt. en demi-d. de l'Anneau ſuivant M. Bradley.	Diſt. en demi-d. de Saturne, ſuivant M. Bradley.	Diſt. en demi-d. de l'Anneau ſuivant M. Caſſini.	Diſt. en min. & ſec. déduites de celle du quatrième.
I.	11^s 5°41′	6^s 10°41′ 51″	4^s 4°35′ 15″	2,097	4,893	1 $\frac{14}{15}$	0′ 43″ $\frac{1}{2}$
II.	9 10 18	4 11 32 5	4 10 10 25	2,686	6,268	2 $\frac{1}{2}$	0 56
III.	4 25 57	2 19 41 25	9 16 57 5	3,752	8,754	3 $\frac{1}{2}$	1 18
IV.	0 0 43	0 22 34 37	10 20 37 7	8,698	20,295	8	3 0
V.	7 20 36	0 4 32 18	7 6 27 28	25,348	59,154	23	8 42 $\frac{1}{2}$

Les diſtances en demi-diamètres de Saturne étant multipliées par 13664 $\frac{1}{2}$, donneroient les diſtances en lieues (1398); mais il faudra rejetter trois chiffres du produit, à cauſe des trois décimales qui ſont jointes dans la table précédente au nombre des demi-diamètres.

Le 9 Juin 1719, à 10^h, M. Pound avec la lunette de 123 pieds, & un excellent micromètre, trouva que le 4e ſatellite, parvenu à peu-près à ſa plus grande digreſſion orientale, étoit à 3′ 7″ du centre de Saturne; ainſi la

distance du satellite à Saturne étoit à la distance moyenne du soleil à la terre, comme 825 est à 100000; d'où il seroit aisé de conclure les quatre autres distances, en parties de celle du soleil.

Inclinaison des 4 premiers satellites, 30°.

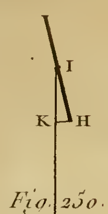
2998. En comparant les satellites avec l'anneau de Saturne en divers points de leurs orbites, & en examinant l'ouverture de ces ellipses (2958); on a vu que les quatre premiers décrivoient des ellipses semblables à l'anneau, & situées dans le même plan, c'est-à-dire, inclinées d'environ $31^\circ \frac{1}{2}$ à l'écliptique ou 30° sur l'orbite de Saturne. En effet le petit axe des ellipses que décrivent ces satellites, lorsqu'elles paroissent les plus ouvertes, est à peu-près la moitié du grand axe, de même que le petit diam. de l'anneau (3227) est alors la moitié de celui qui passe par les anses; ces satellites dans leurs plus grandes digressions sont toujours sur la ligne des anses; tout cela prouve qu'ils se meuvent dans le plan de l'anneau. Or, M. Maraldi trouva, en 1715, que le plan de l'anneau de Saturne coupoit le plan de l'orbite de Saturne sous 30° d'inclinaison (3237). Ainsi l'angle des orbites des 4 premiers satellites avec l'orbite de Saturne est de 30°.

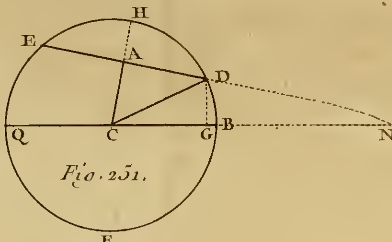
Inclinaison du cinquième satellite, 15° & demie.

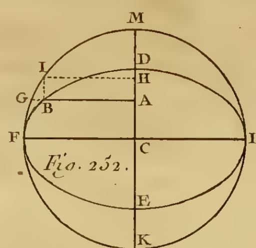
A l'égard du cinquième satellite, M. Cassini le fils, reconnut en 1714, que son orbite n'étoit inclinée, soit sur l'orbite de Saturne, soit sur le plan de l'anneau que de $15^\circ \frac{1}{2}$, (*Mém. acad.* 1714, *p.* 375), & il vit ce satellite décrire une ligne droite qui passoit à peu-près par le centre de Saturne, pendant que les autres s'en écartoient sensiblement au-dessus & au-dessous; ainsi l'orbite du 5e satellite étoit inclinée de 15 à 16° sur l'écliptique, & autant sur le plan de l'anneau & des orbites des 4 satellites intérieurs, mais dans un autre sens. J'ai oui dire que M. le Monnier ayant observé le 5e satellite de Saturne en 1757, avec un télescope de 5 pieds, l'inclinaison lui avoit paru un peu différente.

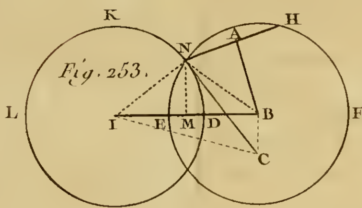
Nœuds des 4 premiers satellites.

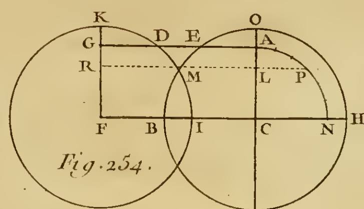
M. Maraldi détermina en 1716 la longitude du point d'intersection de l'anneau sur l'orbite de Saturne $5^s\ 19^\circ\ 48' \frac{1}{2}$, & sur l'écliptique $5^s\ 16^\circ \frac{1}{3}$; il trouvoit par les observations de 1685, $5^s\ 19^\circ\ 55'$; Huygens avoit trouvé cette

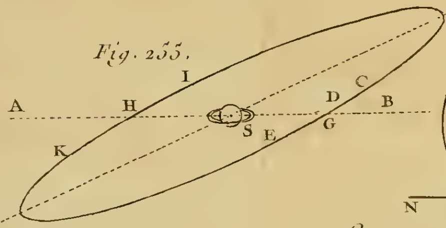

I
K
H
S
Fig. 250.

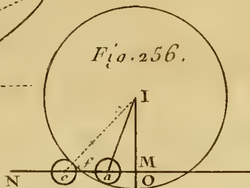

H
E
A
D
Q
C
G
B
N
F
Fig. 251.

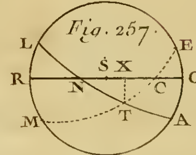

M
D
I
H
G
B
A
F
C
L
E
K
Fig. 252.

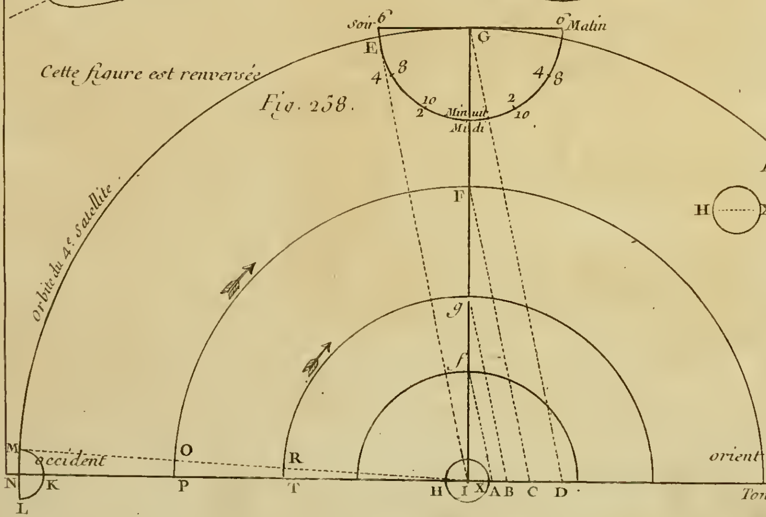

K
H
A
N
L
I
E
M
D
B
F
C
Fig. 253.


K
O
G
D
E
A
R
M
L
P
F
B
I
C
N
H
Fig. 254.


Fig. 255.
I
A
H
S
D
C
B
E
G
K


Fig. 256.
I
M
N
O


Fig. 257.
L
E
R
S
X
O
N
C
M
T
A


Soir 6
6 Malin
E
G
Cette figure est renversée
Fig. 258.
Minuit
Midi
F
g
f
Orbite du 4e. Satellite
M
occident
O
R
orient
N
K
L
P
T
H
I
X
A
B
C
D

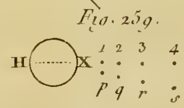

Fig. 259.
H
X
1 2 3 4
p q r s

Fig. 260.

Ecliptique

D

B

N

A

V

C

I le Taureau

II Gemeaux

III l'Ecrevisse

IV le Lion

V la Vierge

VI la Balance

VII Scorpion

VIII Sagittaire

IX Capricorne

X le Verseau

XI les Poissons

O le Belier

Orbite du 4.e Satellite de Jupiter

Orbite du 3.e Satellite

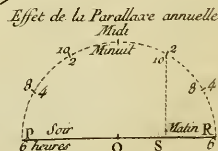
Orbite du 2.e Satellite de Jupiter

Orbite du 1.er Satellite de Jupiter

Satellites qui dessous de Jupiter réellement

Satellites au dessus de Jupiter

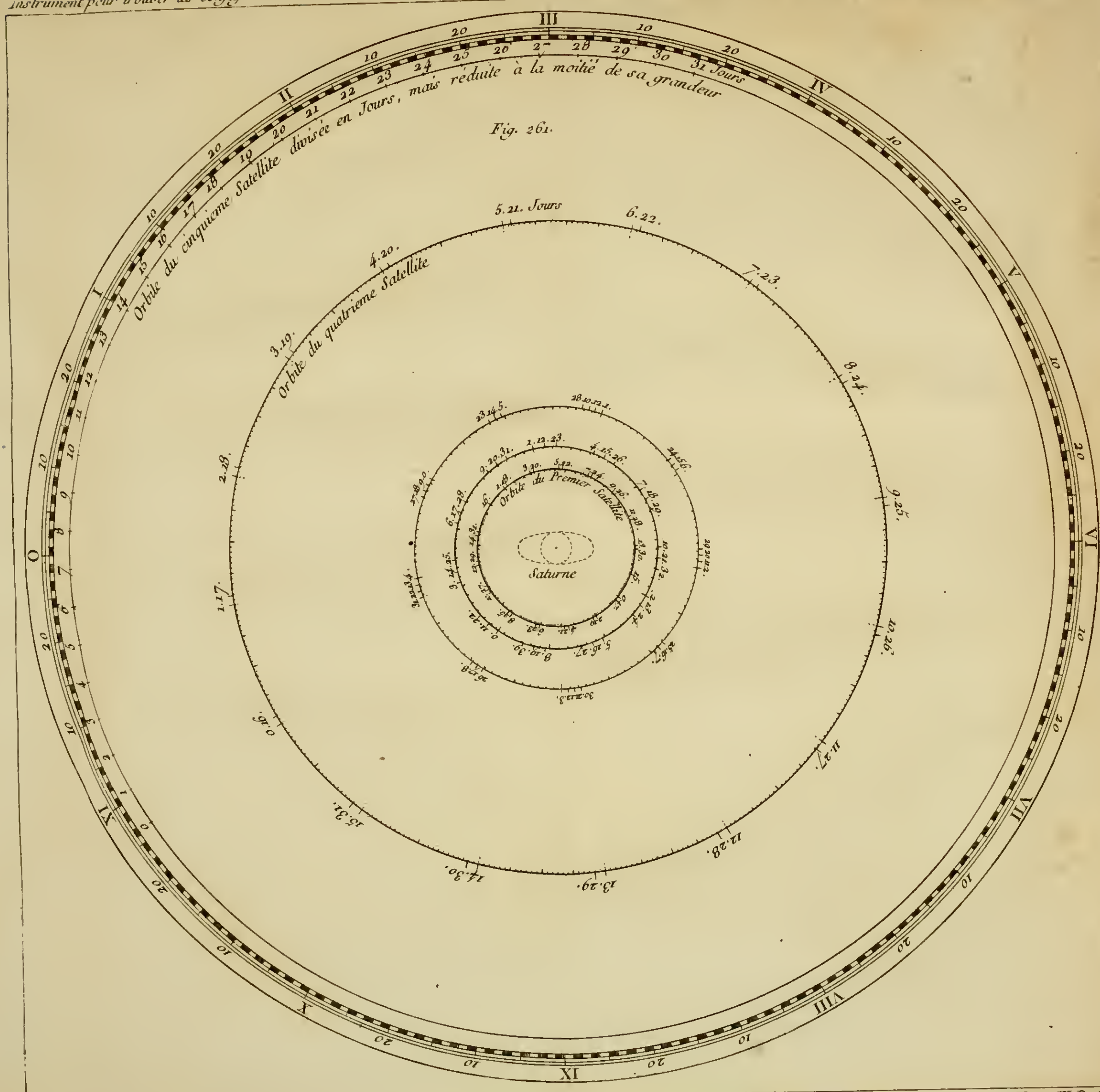
Les chiffres allant de droite à gauche donnent les configurations pour une Lunette qui redresse les objets.



Pour une Lunette qui renverse

E . 3 . 1 I 2 . 4 . F

Jupiter accompagné de ses 4 satellites le 4 Mai 1759.


Fig. 261.
Orbite du cinquième Satellite divisée en Jours, mais réduite à la moitié de sa grandeur
31 Jours
Orbite du quatrième Satellite
5.21. Jours
Orbite du Premier Satellite
Saturne

cette longitude du nœud de l'anneau en 1655, à 5^{s} 20° 30′ (3231); mais M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag.* 643), dit que ce nœud est à 5^{s} 22°. Telle est, suivant ces différens auteurs, la longitude du nœud des 4 premiers satellites. On a cru reconnoître en 1744, que les nœuds de l'anneau avoient eu un moment rétrograde; il est difficile d'en juger sur un si petit intervalle de temps, cependant il est naturel de croire que les attractions des satellites sur cet anneau y produisent un semblable effet, puisque la lune le produit sur le sphéroïde terrestre (3526); on s'en assurera mieux en 1773, lorsque Saturne se trouvera dans le nœud de l'anneau (3230).

Nœud du cinquième.

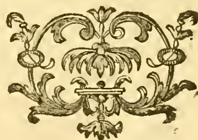
Le nœud du 5e satellite fut trouvé en 1714 par M. Cassini à 5^{s} 4° sur l'écliptique, c'est-à-dire, moins avancé de 17° que le nœud des 4 autres satellites sur l'orbite de Saturne; car M. Cassini les supposoit à 5^{s} 21° sur l'écliptique, (*Mém. acad.* 1714, *pag.* 374). M. Cassini le détermina ainsi en observant le lieu de Saturne le 6 & le 7 Mai 1714; le 5e satellite paroissoit alors se mouvoir en ligne droite (2962). M. le Monnier en 1755 a trouvé l'orbite fort retrécie, (*Mém. de l'acad.* 1757, *pag.* 93). Ce qui paroît indiquer un mouvement dans le nœud du 5e satellite.

Satellite de Vénus.

2999. Ce seroit ici le lieu de parler du satellite de Vénus, que M. Cassini, M. Short, & d'autres astronomes ont cru avoir apperçu, (*Hist. de l'acad. pour* 1741, *Phil. transf. n°* 459, Encyclopédie, *T. XVII*, *pag.* 837); mais les tentatives inutiles que j'ai faites pour l'appercevoir, de même que plusieurs autres astronomes, me persuadent que c'est une illusion optique formée par les verres des télescopes & des lunettes; c'est ce que pensent le P. Hell dans l'appendix de ses éphémérides pour 1766, & le P. Boscovich dans sa 5e dissertation d'optique; M. Short à qui j'en parlai à Londres en 1763, me parut lui même ne pas croire l'existence d'un satellite de Vénus; mais plutôt celle de quelque autre planète qui réfléchissant moins de lumière ne se voyoit que difficilement; je suis tenté de croire qu'il ne faisoit cette dernière hypothèse

que pour ne pas abandonner ſubitement l'aſſertion trop précipitée & trop formelle qu'il avoit faite dans ſa jeuneſſe.

On peut ſe former une idée de ce phénomène d'optique, en conſidérant l'image ſecondaire qui paroît par une double réflexion, lorſqu'on regarde au travers d'une ſeule lentille de verre un objet lumineux placé ſur un fond obſcur, & qui ait un fort petit diamètre; pour voir alors une image ſecondaire ſemblable à l'objet principal, mais plus petite, il ſuffit de placer la lentille de manière que l'objet tombe hors de l'axe du verre; cette image ſecondaire, qu'on a priſe pour un ſatellite de Vénus, paroît du même côté que l'objet, ou du côté oppoſé, & elle eſt droite ou renverſée, ſuivant les diverſes ſituations de la lentille, de l'œil & de l'objet. Si l'on joint deux lentilles, on aura pluſieurs doubles réflexions de la même eſpèce, du moins dans certaines poſitions; mais elles ſont inſenſibles la plupart du temps, parce que leur lumière eſt éparſe, & que leur foyer eſt trop près de l'œil, ou qu'elles tombent hors du champ de la lunette, (P. Boſcovich, *pag.* 286).



LIVRE DIX-NEUVIEME.

DES COMETES.

Les Comètes ([a]) font des corps céleftes qui paroiffent de temps à autre avec différens mouvemens, & qui pour l'ordinaire font accompagnés d'une lumière éparfe. Leur mouvement apparent diffère beaucoup de celui des autres planètes; mais quand il eft rapporté au foleil, il fe trouve fuivre les mêmes loix; car on verra que les comètes tournent autour du foleil dans des ellipfes fort excentriques (3021, 3091), fuivant les règles expliquées dans le VIe. livre.

Ce qui diftingue les comètes.

3000. C'eft le mouvement des comètes qui les diftingue des étoiles nouvelles; car dans celles-ci l'on n'a jamais remarqué de mouvement propre (792); d'ailleurs la lumière des comètes eft toujours foible & douce, c'eft une lumière du foleil qu'elles réfléchiffent vers nous, auffi-bien que les planètes; cela eft prouvé fpécialement par la phafe obfervée, dans la comète de 1744, dont la partie éclairée n'étoit vifible qu'à moitié (*Mém. acad.* 1744, *pag.* 304). Si ces phafes ne s'obfervent pas toujours, c'eft que l'atmofphère épaiffe où la plupart des comètes font noyées difperfe la lumière, enforte qu'elles nous femblent toujours d'une forme à peu près ronde. On diftingue principalement les comètes par ces traînées de lumière dont elles font fouvent entourées & fuivies, qu'on appelle tantôt la *chevelure*, tantôt la *queue* de la comète (3116); cependant il y a eu des comètes fans queue, fans barbe, fans chevelure; la comète de 1585 obfervée pendant un mois par Tycho étoit ronde, elle n'avoit aucun veftige de queue, feulement fa circonférence étoit moins lumineufe que le noyau, comme fi elle

([a]) En Grec Κομήτης, qui vient de Κόμη, *Coma*, parce que les plus remarquables ont paru entourées d'une efpèce de chevelure.

n'eût eu à sa circonférence que quelques fibres lumineuses, (*Tycho, progymn. pag.* 752). La comète de 1665 étoit fort claire, suivant Hévélius, & il n'y avoit presque pas de chevelure; enfin la comète de 1682, au rapport de M. Cassini, étoit aussi ronde & aussi claire que Jupiter (*Mém. acad.* 1699); ainsi l'on ne doit pas regarder les queues des comètes, comme leur caractère distinctif.

Nombre des comètes.

3001. Riccioli dans son énumération des comètes n'en compte que 154 citées par les Historiens, jusqu'à l'année 1651 où il composoit son Almageste, & la dernière étoit celle de 1618. Mais dans le grand ouvrage de *Lubienietz*, où les moindres passages des auteurs sont scrupuleusement rapportés toutes les fois qu'ils ont le moindre rapport aux comètes, on en voit 415 jusqu'à celle de l'année 1665, qui parut depuis le 6 jusqu'au 20 Avril, entre Pégase & les cornes du Bélier. Depuis ce temps-là on en a observé 38, en comptant celle qui paroît au mois de Janvier 1771, dans le temps même que j'écris.

Il n'y en a que 59 de bien décrites.

Mais de toutes ces apparitions de comètes, nous n'en trouvons aucune dont la route soit décrite d'une façon circonstanciée, avant l'année 837, & le nombre de celles, dont on a pu avoir assez de circonstances pour calculer leur orbite, se réduit jusqu'ici à 59, en ne comptant que pour une seule comète celles de 1456, de 1531, 1607, 1682 & 1759, qui sont bien reconnues pour n'être qu'une seule & même planète (3092); j'ai réuni de même celles de 1532 & de 1661, & celles de 1264 & de 1556, dont nous parlerons, art. 3095.

3002. Au reste nous devons être persuadés qu'il a paru de tous les temps beaucoup de comètes dont nos historiens ne parlent point; & qu'il y en a eu beaucoup plus encore qui n'ont point été apperçues; les Anciens même le savoient, car Posidonius avoit écrit (suivant Séneque, (*Quæst. nat. l. VII, c.* 20), qu'à la faveur de l'obscurité produite par une éclipse de soleil on avoit vu une comète très-proche du soleil, c'étoit vers l'an 60 avant J. C.; ce qui donne lieu de croire que dans

de pareilles circonstances on en verroit souvent. Depuis l'année 1757 qu'on a attendu & cherché la comète de 1682, & que l'attention des observateurs s'est tournée de ce côté-là, on a observé sept autres comètes, dans l'espace de 7 ans, M. Messier en a découvert beaucoup, & quand on prendra la peine de les chercher dans le ciel, on en trouvera sans doute un grand nombre.

Il y en a une multitude d'autres.

3003. Alstedius observe que dans les années qui précédèrent & qui suivirent 1101, date de la 223e comète, on en vit presque toutes les années (*Lubieniecii theat. cometicum*).

Il est même arrivé plus d'une fois que l'on a vu en même temps plusieurs comètes. Riccioli en rapporte des exemples, des années 729, 761, 1165, 1214, 1337, 1529 & 1618. Au mois de Mai 1748, on croit avoir vu trois comètes différentes dans une même nuit (M. Struick, *Phil. transf. t.* 46); le 11 Février 1760, on en voyoit deux (*Mém.* 1760, *pag.* 168).

On en a vu plusieurs à la fois.

3004. Les comètes dont l'apparition a été la plus longue, sont celles qui ont paru pendant 6 mois; la première du temps de Néron, l'an 64 de J. C. (Sen. *l.* 7, *c.* 21); la seconde vers l'an 603, au temps de Mahomet; la troisième en 1240, lors de l'irruption du grand Tamerlan. De nos jours la comète de 1729 a été observée pendant six mois, depuis le 31 Juillet 1729 jusqu'au 21 Janvier 1730; celle de 1769 pendant près de 4 mois. Riccioli, (*dans son almageste II*, 24), nous donne une table de la durée de beaucoup d'autres comètes, suivant différens Historiens; on y voit 4 comètes de 4 mois, savoir celles des années 676, 1264, 1363, 1433. Je ne parle point de celle qui menaça la ville de Jérusalem pendant un an, au rapport de Josephe, vers l'an 70, & que l'on n'a point mise au nombre des effets naturels. Cependant, il n'est pas impossible qu'une comète paroisse pendant un an entier, mais ce ne seroit pas au même lieu, comme celle dont parle Josephe.

Durée de leur apparition.

3005. Toutes les comètes paroissent tourner comme les autres astres par l'effet du mouvement diurne (art.

Vitesse de leur mouvement propre.

2); mais elles ont encore un mouvement propre, aussi bien que les planètes, par lequel elles répondent successivement à différentes étoiles fixes. Ce mouvement propre se fait tantôt vers l'orient, comme celui des autres planètes, tantôt vers l'occident, quelquefois le long de l'éclitique ou du zodiaque, quelquefois dans un sens tout différent & perpendiculairement à l'écliptique.

120 deg. par jour.

La comète de 1472 fit en un jour 120 degrés ayant rétrogradé depuis l'extrémité du signe de la Vierge, jusqu'au commencement du signe des Gémeaux, suivant l'observation de Regiomontanus (*Riccioli*, *alm. II,* 8). La comète de 1760 entre le 7 & le 8 de Janvier, changea de 41° ½ en longitude; on pourroit citer d'autres exemples d'une très-grande vîtesse observée dans le mouvement apparent des comètes: on verra ci-après (3112), qu'elle pourroit aller bien plus loin, si une comète passoit plus près de la terre.

Mouvement total.

3006. Quelquefois les comètes paroissent si peu de temps que dans la durée de leur apparition leur situation ne change pas beaucoup; mais il y a des comètes dont le mouvement est fort étendu, celle de 1664 parcourut 164 degrés par un mouvement rétrograde en apparence, du 20 Décembre jusqu'au 6 Janvier 1665, & en 17 jours, elle parcourut 113°; celle de 1769 parcourut 8 signes ou 240°, tant avant qu'après sa conjonction; celle de 1556 un demi-cercle environ, ou 180°; celle de 1472 fit environ 170°; celle de 1618 ne parcourut que 107° ½; mais ce fut dans l'espace de 28 jours (*Riccioli*, *alm. II,* 28).

Grandeur apparente des comètes.

3007. Les Anciens n'ont parlé communément de la grandeur des comètes qu'en faisant attention au spectacle de leur queue, ou de leur chevelure, nous en parlerons plus bas (3117); cependant il y a des comètes dont le diamètre apparent semble avoir été très-considérable, indépendamment de la queue. Après la mort de Demetrius, roi de Syrie, pere de Demetrius & d'Antiochus, un peu avant la guerre d'Achaïe (146 avant Jesus-Christ), il parut une comète aussi grosse que le soleil. (*Sen. VII,* 15).

Celle qui parut à la naiſſance de Mithridate, répandoit, ſuivant Juſtin, plus de lumière que le ſoleil.

La comète de 1006 (rapportée par erreur à l'an 1200 dans quelques livres), & qui fut obſervée par Haly Ben-Rodoan, (*Cardan. Aſtron. l. 2. c. 9. text.* 54), étoit quatre fois plus groſſe que Vénus, & jettoit autant de lumière que le quart de la lune pourroit faire; cette comète paroît être la même que celles de 1682 & 1759 (3092). Diamètre apparent.

Cardan dit la même choſe de celles de 1521 & 1556 (*de Variet. l.* 14). Nous n'avons rien de bien déterminé ſur la grandeur apparente des comètes avant celle de 1577; ſon diamètre apparent, ſuivant Tycho, étoit de 7′, c'eſt-à-dire, ſelon lui, le double du diamètre de Vénus; mais il faut rabattre beaucoup de ces ſortes de meſures (1390).

3008. La manière d'obſerver les comètes, eſt la même que pour les planètes; mais leur peu de lumière fait que l'on eſt obligé pour l'ordinaire de ſe contenter du réticule rhomboïde (2513), ou de la méthode des hauteurs (2580, 3744).

La lumière des comètes déja très-foible en général, eſt encore affoiblie par les lunettes qui forcent beaucoup, enſorte qu'on les obſerve ſouvent avec plus de facilité & plus d'exactitude dans une lunette fort courte, & qui groſſit très-peu, que dans une lunette plus grande & qui force davantage.

Différentes opinions ſur les Comètes.

3009. Après avoir parlé des principales circonſtances qui ont rendu les comètes remarquables, je vais parler des différens ſyſtêmes auxquels elles ont donné lieu. Il y a eu de tout temps des Philoſophes perſuadés que les comètes étoient des planètes dont le mouvement devoit être perpétuel & les révolutions conſtantes; on a attribué peut-être mal à propos ce ſentiment aux anciens Caldéens, ce fut réellement celui des Pythagori- Sentiment des Pythagoriciens.

ciens & de plusieurs autres, tels que Apollonius le Myndien, Hippocrates de Chio, Æschyle, Diogènes, Phavorinus, Artemidore & Démocrite, qui au jugement de Ciceron (*Tuscul. l.* 5) & de Senéque (*Quæst. nat. lib.* 7), fut le plus subtil de tous les anciens Philosophes. On peut voir au sujet des systêmes anciens, Pline, *l. II. c.* 25. Arist. *Meteor. l. 6.* Plutarque *dé Plac. Phil.* 3. 2. Aulu-Gelle 14. 1. Sen. *l. VII. c.* 13. Riccioli, *Alm. II.* 35, & ce que j'ai dit moi-même dans les *Mém.* de 1759, *pag.* 1, & suiv.

Idée sublime de Séneque.

3010. Mais on doit, sur-tout à Séneque, ce témoignage qu'aucun auteur n'a parlé des comètes d'une manière aussi sublime que lui dans le VIIe. livre de ses questions naturelles. Un astronome auroit peine à s'exprimer aujourdhui d'une manière plus philosophique. « On a cru, » dit-il, que les comètes n'étoient point des astres, parce » qu'elles n'ont pas la rondeur des autres corps célestes; » mais ce n'est que la lumière qu'elles répandent qui produit cette figure allongée; le corps de la comète est » arrondi. Je suppose encore qu'elles ayent une autre » figure que les planètes : s'ensuit-il qu'elles soient d'une » nature différente; la nature n'a pas tout fait sur un modele unique, & c'est ignorer son étendue & sa puissance » que de vouloir rapporter tout à la forme ordinaire; la » diversité de ses ouvrages annonce sa grandeur. On ne » peut point encore connoître leur cours, & savoir si » elles ont des retours réglés, parce que leurs apparitions » sont trop rares; mais leur marche, non plus que celle des » planètes, n'est point vague & sans ordre, comme celle » des météores qui seroient agités par le vent. On observe » des comètes de formes très-différentes; mais leur nature » est semblable, & ce sont en général des astres qu'on n'a » pas coutume de voir, & qui sont accompagnés d'une lumière inégale; les comètes paroissent en tout temps & » dans toutes les parties du ciel, mais sur-tout vers le » nord. Elles sont comme tous les corps célestes des ouvrages éternels de la nature; la foudre & les étoiles volantes & tous les feux de l'atmosphère sont passagers &

Sentiment de Séneque.

» ne

» ne paroiſſent que dans leur chûte; les comètes ont leur » route qu'elles parcourent, elles s'éloignent, mais ne ceſ-» ſent point d'exiſter. Vous prétendez que ſi c'étoient des » planètes elles ſe trouveroient dans le zodiaque; & qui » donc a fixé dans le zodiaque les mouvemens des corps » céleſtes, qui peut aſſigner ainſi des limites aux ouvrages » divins, le ciel n'eſt-il pas libre de tous côtés? N'eſt-il » pas plus convenable à la grandeur de l'univers d'y admet-» tre pluſieurs mouvemens dans des routes différentes, que » de réduire tout à une ſeule région du ciel? Dans cet » ouvrage magnifique de la nature nous voyons briller une » multitude d'étoiles qui embéliſſent la nuit, elles nous ap-» prennent que le ciel de toutes parts eſt rempli de corps » céleſtes, pourquoi faut-il qu'il n'y en ait que cinq à qui » il ſoit donné de ſe mouvoir, & pourquoi tous les autres » aſtres doivent-ils être immobiles? On me demandera » peut-être pourquoi donc il n'y en a que cinq dont on ait » obſervé le cours; je répondrai qu'il y a beaucoup de » choſes dont nous connoiſſons l'exiſtence, ſans ſavoir de » quelle manière elles ſont; nous avons un eſprit qui agit » & nous dirige, nous ne ſavons ni ce que c'eſt, ni com-» ment il agit; ne nous étonnons pas que l'on ignore en-» core la loi du mouvement des comètes dont le ſpectale » eſt ſi rare, qu'on ne connoiſſe ni le commencement ni la » fin de ces aſtres qui deſcendent d'une énorme diſtance; il » n'y a pas encore 1500 ans que la Grece a compté les » étoiles & leur a donné des noms: il y a encore bien des » nations qui n'ont que la ſimple vue & le ſpectacle du » ciel, ſans ſavoir ſeulement pourquoi ils voient la lune » s'éclipſer; il n'y a pas bien long-temps que nous le ſavons » d'une manière certaine; le jour viendra, que par une » étude de pluſieurs ſiècles les choſes qui ſont cachées » actuellement paroîtront avec évidence. Ce ſeroit peu » d'un ſiècle pour découvrir tant de choſes, quand même » on y donneroit tout ſon temps; & nous partageons le peu » de momens qui nous ſont accordés, en donnant aux vices » la plus grande partie... On étudie quand on manque de » ſpectacles ou quand la pluie empêche les promenades;

Prédiction de Séneque.

» on conserve les noms des Comédiens, mais on oublie » ceux des Philosophes. Un jour viendra où la postérité » s'étonnera que des choses si claires nous ayent échappé.... » On démontrera dans quelles régions vont errer les co- » mètes, pourquoi elles s'éloignent tant des autres astres; » quel est leur nombre & leur grandeur. Ceux qui nous » suivront trouveront des vérités nouvelles, contentons- » nous de celles qu'on a découvertes. *Nec miremur tam » tardè erui quæ tam altè jacent* ». J'abrege à regret la traduction de cet ouvrage de Séneque, rempli de la plus belle morale & de la plus saine philosophie.

Sentimens opposés.

3011. Malgré des idées aussi lumineuses sur la nature des comètes il s'est trouvé parmi les anciens & parmi les modernes jusqu'au commencement de ce siècle, des auteurs qui ont cru que les comètes étoient des corps nouvellement formés & d'une existence passagère. Tels furent Aristote, Ptolomée, Bacon, Galilée, Hévélius, Longomontanus, Tycho, Képler, Riccioli, M. de la Hire, (*Mém. acad.* 1702, *pag.* 112). Plusieurs d'entr'eux les regardèrent comme des corps sublunaires ou des météores de l'atmosphère; M. Cassini lui-même avoit cru que les comètes étoient formées par les exhalaisons des autres astres. (*Abrégé des observations sur la comète de* 1680, *pag.* xxxi).

3012. Ce fut-là, sur-tout, le sentiment d'Aristote, & par conséquent celui qui domina dans les écoles jusqu'au dernier siècle; les astronomes regardant jusqu'alors les comètes comme des amas de vapeurs ne daignoient pas les observer; voilà pourquoi nous n'en avons que 59 dont la route soit déterminée (3089); il n'y eut même que les comètes qui firent spectacle, dont les astronomes s'occupèrent; telle fut la comète de 1472 qui parut d'une manière si frappante qu'elle attira tous les regards; c'est la première qui ait été observée avec soin; car les sept qui la précèdent dans ma table n'ont été calculées que sur des descriptions assez imparfaites.

Mouvement des comètes suiv. Tycho.

3013. On n'avoit point recherché ni calculé la vraie figure de la route des comètes, avant Tycho-Brahé;

Regiomontanus avoit jugé qu'elles décrivoient des cercles; mais c'étoit moins par obſervation que par le préjugé général qu'on avoit pour les formes circulaires. Tycho ayant obſervé long-temps & avec ſoin la comète de 1577, compoſa un ouvrage conſidérable à cette occaſion; il trouva qu'on pouvoit aſſez bien repréſenter ſes apparences, en ſuppoſant qu'elle avoit décrit autour du ſoleil une portion de cercle inclinée à l'écliptique de 29°, qui renfermoit les orbites de Mercure & de Vénus, de manière que ſa plus grande digreſſion vue de la terre auroit pu être de 60° (tandis que celle de Vénus n'eſt que de 45°); mais Tycho étoit obligé de rendre le mouvement de la comète un peu plus lent dans la partie inférieure de ſon cercle. (*De Com. anni* 1577, *pag.* 194).

3014. Tycho faiſant voir dans cet ouvrage que les comètes étoient des corps fort élevés au-deſſus de la moyenne région, renverſoit le ſyſtême ancien des cieux ſolides; comme Newton ſe ſervit enſuite des comètes pour détruire le plein de Deſcartes, & l'hypothèſe ingénieuſe des tourbillons. Il renverſe les cieux ſolides.

3015. Képler ayant trouvé que les obſervations de la comète de 1618, s'accordoient mieux avec une ligne droite qu'avec un cercle, crut que les comètes avoient un mouvement purement rectiligne. (*De cometis*, *Lib. III.* 1619, 138 *pages*); ce ſyſtême lui eût ſemblé bien difficile à admettre s'il avoit vu la comète de 1763 : elle étoit le 28 Septembre à 5° au midi de l'équateur, elle s'éleva en 3 ſemaines juſqu'à 18° de déclinaiſon boréale, & le 18 Novembre elle étoit revenue à 3° de l'équateur; dans cet intervalle de temps elle n'avoit pas changé ſon aſcenſion droite de plus de 20°; ce qui marque une courbure prodigieuſe. Sentiment de Képler.

3016. M. Caſſini dans ſon traité ſur la comète de 1664, fit voir que le mouvement apparent & inégal de cette comète pouvoit ſe réduire à l'égalité par le moyen d'un cercle décrit excentriquement autour de la terre; mais dont il n'y avoit d'obſervable q'une très-petite partie. Le même ſyſtême paroît dans ſon traité ſur la comète de De M. Caſſini.

1680, dans lequel il s'efforce de prouver que la comète qu'on avoit vue à la fin de Novembre le matin eſt différente de celle qui parut à la fin de Décembre le ſoir & à l'orient du ſoleil ; il croyoit que celle-ci étoit la même qu'on avoit vue en 1577, tournant en 29 mois & demi autour de la terre. M. Caſſini étoit encore perſuadé de cette hypothèſe en 1699. (*Mém. acad.* 1699, *pag.* 39). Il eſſayoit par ce moyen d'expliquer les retours de quelques comètes qui avoient paru ſuivre à peu-près les mêmes traces ; il s'y prenoit d'une manière ingénieuſe, & il eût réuſſi à prédire leur retour, s'il avoit eu l'idée de calculer leurs mouvemens vus du ſoleil, au lieu d'en faire des ſatellites de la terre.

Hévélius trouve que les orbites des planètes ſont des paraboles.

3017. Hévélius me paroît être celui qui dans cette théorie fit d'abord le plus grand pas, puiſqu'il jugea le premier, non-ſeulement que la route des comètes étoit courbée vers le ſoleil ; mais encore que cette courbure étoit parabolique. Weidler écrit que l'ouvrage de *Doërfeld*, imprimé à Plawen en 1681, étoit le premier livre où l'on eût démontré que la parabole pouvoit repréſenter le mouvement des comètes ; Doërfeld appliqua en effet cette méthode à la comète de 1680 ; mais il en avoit pris l'idée dans la Cométographie d'Hévélius, imprimée dès l'an 1668, & il l'annonce dans le titre même de ſon ouvrage. Hévélius paroiſſoit d'abord très-porté pour le mouvement rectiligne : *Cometæ nullo alio motu quàm rectilineo concitantur.* (*Hevel. comet.* pag. 569). *Motum propemodum rectum*, pag. 561). *Propemodùm recta trajiciuntur..... gaudent hocce unico motu ferè recto*, (p. 568). *Cometa non nihil à rectæ lineæ perfectione exorbitare videtur*, (pag. 641). *Pauxillùm tantùm à linea recta incurvatur*, (pag. 684), &c. D'ailleurs il s'en falloit de beaucoup qu'il ne mît le ſoleil au foyer de la parabole ; Doërfeld eſt le premier qui en ait eu l'idée, Hévélius ne mettoit pas même le ſoleil dans le plan de cette courbe. Auſſi Gregori (*L. V. Sect. I. prop.* 2) met Hévélius au nombre de ceux qui ont ſoutenu le mouvement rectiligne des comètes, & M. Pingré trouve qu'il a raiſon ; voici cependant ce qu'on lit dans la

suite du même ouvrage. Hévélius observe d'abord que tous les projectiles décrivent des paraboles, *omne projectum & explosum motu parabolico progreditur*, (pag. 660). Il décompose ensuite cette parabole pour faire voir qu'elle est le résultat d'une double impression : *motus parabolicus ex duobus motibus contrariis oritur* (p. 661). La ressemblance entre les projectiles que nous voyons sur la terre, & les comètes, lui paroît évidente, il voit de part & d'autre une gravité, une tendance vers un centre commun, qui est le centre du soleil pour les planètes, & celui de la terre pour les corps terrestres ; de part & d'autre un mouvement d'explosion, de projection en ligne droite, qui se combine avec la gravité pour former une parabole, ensorte que la comète abandonneroit la parabole pour suivre une tangente, si la gravité cessoit d'agir sur elle, comme elle retomberoit vers le soleil si la force de projection ne l'en éloignoit pas : *Cometæ in nulla alia quàm parabolica moventur linea...... nam cum iis omnibus ita comparatum est in æthere, (suo tamen modo) quam cum projectis commotisque in aere...... cometam videlicet æternis causis necessitate manantibus, pariter ac globus è tormento explosus, vel aliquid aliud virtute seu motu extrinseco propulsum, in lineâ parabolicâ omnino commoveri ac trajici..... alter autem (motus) pariter naturalis & intrinsecus est ; non quidem ex eo quod cometis æque ac terrestribus gravitatem attribuam ; sed alia huic non prorsus dissimilis appetentia eis competat...... sub quâ directione se deinceps conservant : quando nempe cometæ atmosphærâ liberi exeunt, vel ex eâ in ætherem expelluntur, ejiciuntur, suique juris fiunt, cujus videlicet universi ætheris sol centrum est*, (pag. 666).

Idées qu'il avoit de l'attraction universelle.

3018. Hévélius ajoute même que la vîtesse des comètes est la plus grande au point de leur orbite où le rayon est perpendiculaire à la courbe, c'est-à-dire, au sommet de la parabole : il est vrai qu'ensuite il soupçonne que le mouvement des comètes n'est pas égal à distances égales du périhélie, & que la plus grande vîtesse ne concourt pas toujours exactement avec le périhélie (*pag.* 677). D'ailleurs on trouve dans cet ouvrage des hypothèses

destituées de fondement pour expliquer la formation des comètes dans l'atmosphère de Saturne ou de quelque autre planète, & le mouvement de projection qu'elles y reçoivent; mais quand à la partie astronomique, il ne restoit plus rien à faire que d'appliquer aux comètes la loi de Képler, des aires proportionnelles aux temps.

Comète de 1680.

3019. Enfin, parut la comète prodigieuse de 1680, qui étonna & les savans & les peuples, elle produisit, les *pensées* ingénieuses de Bayle, le traité de M. Cassini, celui de Jacques Bernoulli qui crut pouvoir prédire son retour, enfin elle fit éclore les sublimes recherches de Newton qui sut faire des comètes une branche de son systême général.

Newton calcule leurs orbites.

3020. La découverte de l'attraction (3381) ouvrit, pour ainsi dire, aux Philosophes, un nouveau ciel; Newton, en voyant toutes les planètes soumises à la force centrale du soleil, pensa que les comètes devoient être du nombre de ces planètes, & suivre les mêmes loix dans leur mouvement autour du soleil : il falloit pour cela que leurs orbites fussent fort excentriques, c'est-à-dire, très-allongées, afin d'expliquer une très-longue disparition.

3021. Pour voir si cela s'accorderoit avec les observations, Newton examina l'orbite de la comète de 1680, il trouva qu'une portion d'ellipse très-allongée, ou ce qui revient au même, une portion de parabole (3251), convenoit parfaitement avec toutes les observations, pourvu qu'on supposât les aires proportionnelles aux temps, comme dans les mouvemens planètaires (1226); dès lors il ne douta plus que les comètes ne fussent des planètes aussi périodiques & aussi anciennes que les autres.

Calculs de M. Halley.

3022. M. Halley se forma des procédés de calcul pour les orbites paraboliques; il les appliqua successivement à différentes comètes (3044), en choisissant celles qui avoient été les mieux observées; peu-à-peu il étendit ses calculs à 24 comètes, & en 1705 il publia les élémens de ces 24 paraboles (*Phil. transf. n°.* 297); M. le Monnier a fait réimprimer à Paris en 1743, la théorie de M.

Halley, & je l'ai publiée de nouveau en François, lorsque je donnai une nouvelle édition des tables de Halley, en 1759 ; on y trouve des additions considérables qui forment une *Théorie* du mouvement des comètes, à laquelle je renverrai plusieurs fois.

3023. Depuis ce temps-là le nombre des comètes observées & calculées s'est augmenté jusqu'à 59 (3089) ; plusieurs de ces comètes ont été observées pendant des mois entiers, sur une très-grande portion de la circonférence du ciel (3006) avec des inégalités apparentes extrêmement considérables, & cependant quand on les réduit à une parabole décrite autour du soleil, on trouve un accord si parfait entre toutes les observations, qu'il n'y a aucune autre hypothèse, ni aucune autre loi qui pût approcher de cette exactitude ; on ne peut donc regarder que comme une absurdité les systêmes qui s'éloignent de celui-là ; ainsi nous allons expliquer le mouvement des comètes, dans une orbite parabolique dont les dimensions sont données ; & nous chercherons ensuite la manière de trouver ces dimensions, ou l'orbite d'une comète qui paroît pour la première fois (3044).

59 Comètes calculées.

DU MOUVEMENT DES COMETES DANS UNE ORBITE PARABOLIQUE.

3024. Le calcul parabolique dont nous allons nous servir, à l'exemple de Newton & de Halley, n'est qu'une approximation, que l'on adopte à cause de la facilité des calculs, & du peu de différence qu'il y a entre une parabole & une ellipse fort allongée (3091, 3104). L'avantage consiste en ce que toutes les paraboles sont des courbes semblables ; elles donnent une même proportion entre les rayons vecteurs semblablement placés, & il suffit de connoître les distances périhélies de différentes comètes pour les calculer toutes par une seule & même table (3037). On verra ci-après cette table générale où l'anomalie vraie est marquée pour chaque jour, & qui sert pour toutes les comètes, au lieu que les

Utilité de la parabole.

ellipſes exigent chacune une table particulière (3101).

Pl. XXXVI. Fig. 262. 3025. La table générale ſuppoſe une comète dont l'orbite ſoit la parabole *PCOD* (*fig.* 262), le ſoleil *S* occupe le foyer; *P* eſt le périhélie de la comète ou le ſommet de la parabole, *SP* eſt la diſtance périhélie, que l'on ſuppoſe égale à la diſtance moyenne de la terre au ſoleil, qu'on prend toujours pour échelle de toutes les diſtances céleſtes.

Comète de 109 jours.

Cette comète dont la diſtance périhélie *SP* eſt égale à la diſtance moyenne du ſoleil à la terre emploie 109 jours à aller de *P* en *O*, ou du périhélie juſques à l'extrémité de l'ordonnée *SO* perpendiculaire à *SP* (3031). Je l'appellerai, pour abréger, comète de 109 jours, & je ferai voir comment on peut y rapporter toutes les autres comètes, en changeant ſeulement les temps : je ſuppoſe la nature & les propriétés de la parabole qui ſeront expliquées ci-après (3251), & qui ſe trouvent auſſi démontrées dans ma *théorie des comètes* (*Tables aſtr. de* Halley, *pag.* 70 & ſuiv.).

3026. La première choſe que nous avons à faire pour calculer le mouvement des comètes conſiſte à déterminer la vîteſſe qui doit avoir lieu dans des paraboles de différentes grandeurs; car une comète dont la parabole eſt plus grande, emploie plus de temps à parcourir un angle de 90°, tel que l'angle *PSO*, c'eſt-à-dire, à aller de *P* en *O*, tout ainſi que Saturne emploie 30 fois plus de temps à décrire un degré de ſon orbite que la terre n'en emploie à décrire un degré de la ſienne; voici un théorême fondamental que je démontre d'une manière très-ſimple.

3027. Le rapport *des vîteſſes dans la parabole & dans le cercle eſt celui de* $\sqrt{2}$ *à* 1.

Dém. Suppoſons une comète en *P*, qui décrive la parabole *PO* à la diſtance *SP* du ſoleil, & la terre en *T* décrivant un cercle *TLM*, dont le rayon *FT* ſoit égal à *SP* : la force centrale, ou l'attraction du ſoleil pour retenir la comète, & la terre, chacune dans ſon orbite, eſt égale, puiſque la diſtance eſt la même, & que le ſoleil ne peut pas avoir plus de force ſur la comète que ſur

la

la terre à la même diſtance. Je ſuppoſe un petit arc PC de la parabole, & un petit arc TL de l'orbite de la terre, tels que l'abſciſſe PB de la parabole & l'abſciſſe TI du cercle ſoient égales ; ou que l'écart de la tangente par rapport à la courbe ſoit le même dans la parabole & dans le cercle, ces abſciſſes ou les écarts de ces tangentes expriment la force centrale du ſoleil ; puiſqu'elles ſont la quantité dont la planète obéit à l'action du ſoleil en ſe détournant de la ligne droite (3389) ; elles ſont donc égales dans les même temps, quand la force eſt la même ; donc ſi les abſciſſes ſont égales les arcs PC & TL ſont décrits en temps égaux, & expriment les vîteſſes de la comète & de la terre. Je vais partir de cette ſuppoſition que les deux inflexions ſont égales pour trouver les arcs eux-mêmes. Fig. 262.

3028. Les arcs ne peuvent pas être égaux, puiſque deux arcs égaux pris ſur des courbes très-différentes ne ſauroient avoir des inflexions égales, & que quand les inflexions ſont égales les arcs ne ſont pas égaux ; j'en conclurai le rapport des arcs, ce ſera celui des vîteſſes, puiſque le temps eſt le même de part & d'autre. Par la propriété du cercle l'on a $TI = \frac{IL^2}{2\,FT^2}$ (3353) ; mais par la propriété de la parabole on a le carré de l'ordonnée BC égal au produit de l'abſciſſe PB par le paramètre, qui eſt quadruple de SP ; donc $PB = \frac{BC^2}{4\,SP} = \frac{BC^2}{4\,FT}$; or $PB = TI$ (3027), donc $\frac{IL^2}{2FT} = \frac{BC^2}{4\,FT}$; ou $2\,IL^2 = BC^2$; donc $IL\sqrt{2} = BC$, ce qui donne cette proportion ; $BC : IL :: \sqrt{2} : 1$; or IL eſt égal à l'arc TL, ou du moins il n'en diffère que d'un infiniment petit du troiſième ordre (3317) ; ainſi IL eſt la vîteſſe de la terre ; de même BC eſt la vîteſſe de la comète ; donc la vîteſſe de la comète eſt à celle de la terre à même diſtance du ſoleil, comme $\sqrt{2}$ eſt à 1.

3029. Delà il ſuit que la vîteſſe de la comète en P ſur la parabole PO, ſera les $\frac{7}{5}$ de la vîteſſe de la terre ; car $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ environ ; donc l'aire décrite en une ſeconde

Fig. 262. de temps par la comète, sera $\frac{7}{5}$ de l'aire décrite par la terre; mais les aires sont toujours égales en temps égaux; (1233), ainsi à quelque distance que la comète parvienne par rapport au soleil dans sa parabole PO, l'aire décrite en une seconde de temps, sera toujours $\frac{7}{5}$ de l'aire décrite par la terre, & l'aire décrite par la terre sera égale à l'aire de la comète divisée par $\frac{7}{5}$ ou $\sqrt{2}$. Je vais me servir de cette proposition pour démontrer que la comète doit employer 109 jours à aller de P en O, ou à parcourir 90° d'anomalie.

3030. Soit la distance périhélie SP ou $FT = 1$; la circonférence du cercle TM ou le nombre 6, 283 (3322) $= c$, l'aire de ce cercle sera $\frac{c}{2}$, l'aire parabolique PSO, qui est les deux tiers du produit de SP par SO (3327), sera $\frac{4}{3}$, cette aire de la comète, divisée par $\sqrt{2}$, donnera $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ pour l'aire que la terre décrit, dans le même temps que la comète va de P en O; mais si l'on appelle A la longueur ou la durée de l'année, on aura cette proportion : L'aire totale $\frac{c}{2}$ de l'orbite terrestre est au temps A, comme l'aire $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ est au temps qui lui répond, & qui sera $\frac{8A}{3c\sqrt{2}}$; c'est la valeur du temps que la comète emploie à décrire l'arc parabolique PO ou les 90° d'anomalie vraie.

Temps pour 90°.

3031. La durée de l'année sydérable est $365^j\,6^h\,9'\,10''$, ou $11''$ (888), c'est-à-dire, 365^j, 256379, dont le logarithme est 2, 5625977; si l'on en ôte le logarithme de $\sqrt{2}$, avec celui de trois fois la circonférence; & qu'on y ajoute le logarithme de 8, on aura celui de 109^j 6154, ou $109^j\,14^h\,46'\,20''$ pour le temps qui répond à PO. Son logarithme est 2, 0398716.

Il ne suffit pas d'avoir trouvé le temps employé à décrire ces 90° d'anomalie, il faut, pour calculer le lieu d'une comète en tout temps, connoître le nombre de jours qui répond à chaque portion de la parabole, comme

PD, ou à chaque angle d'anomalie vraie compté depuis le périhélie, en ſuppoſant toujours les aires proportionnelles au temps, c'eſt la matière du problême ſuivant. *Fig. 261.*

3032. CONNOISSANT *l'anomalie vraie dans une parabole, trouver le temps écoulé depuis le périhélie.* Je ſuppoſe que la parabole *PCOD* eſt donnée, c'eſt-à-dire, qu'on connoît ſa diſtance périhélie *SP*, & le temps employé à parcourir l'arc *PO*; on demande le temps employé à parcourir un autre arc *PD*, ou un autre angle *PSD* d'anomalie vraie; on tirera la ligne *DP*, & ayant pris *ST* & *SR* égales au rayon vecteur *DS*, l'on tirera *DR* & *DT*, dont l'une ſera la normale, & l'autre la tangente (3252).

3033. Si nous prenons la ſous-normale *RQ* pour unité, nous aurons le paramètre égal à 2 (3252), & $PQ = \frac{DQ^2}{2}$; le ſegment parabolique *DOPQ* qui eſt les deux tiers du produit des co-ordonnées (3327), ou $\frac{2}{3}\ DQ \cdot PQ$, ſera $\frac{1}{3}DQ^3$; le triangle *DPQ* eſt égal à $\frac{1}{2}DQ \cdot PQ = \frac{1}{4}DQ^3$, donc en le retranchant du ſegment *DOPQ*, il reſtera le ſegment $DOPD = \frac{1}{12}DQ^3$; on y ajoutera la ſurface du triangle $PDS = \frac{PS.DQ}{2} = \frac{DQ}{4}$, & l'on aura $\frac{1}{12}DQ^3 + \frac{1}{4}DQ$ pour l'aire *PSDOP*.

3034. La ligne *RQ* étant priſe pour l'unité, *DQ* eſt la tangente de l'angle $DRQ = \frac{1}{2}DST$, c'eſt-à-dire, la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. Si nous appellons cette tangente *t*, nous aurons l'aire parabolique *PSDOP*, égale à $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$; l'aire de 90° *PSO* ſera alors $= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$. Mais il faut prendre l'aire *PSO* pour unité, & pour lors l'aire *PSDOP* devient $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$, car $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$ eſt à $\frac{1}{3}$, comme $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ eſt à 1; ainſi l'aire de 90° étant connue, & la tangente d'une demi-anomalie vraie étant *t*, l'on multipliera l'aire de 90° par $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$, & l'on aura l'aire décrite par la comète depuis ſon paſ- Expreſſion du temps.

Fig. 262. ſage par le périhélie ; mais les aires ſont proportionnelles aux temps ; *ainſi l'on aura de même le temps qui répond à* PD, *en multipliant les 109 jours, ou en général le temps de 90° par le quart de* $t^3 + 3t$.

3035. Exemple. La comète qui emploie 109 jours à parcourir 90° d'anomalie, ayant 47° d'anomalie vraie ; l'on demande combien de jours il s'eſt écoulé depuis le périhélie. La tangente t de $23^\circ \frac{1}{2}$ eſt 0, 4348124, donc $t^3 = 0,0829$, & le quart de $t^3 + 3t = 0,3467$; il faut donc multiplier par 0, 3467 les 109 jours, ou le temps pour 90° (3031), l'on trouvera 38 jours ; ainſi la comète de 109 jours ſe trouvera à 47° de ſon périhélie au bout de 38 jours, comme on le voit dans la table générale dont nous allons parler.

3036. C'eſt ainſi que l'on trouveroit pour chaque degré d'anomalie vraie les jours correſpondans ; ordinairement on a quelques fractions décimales de plus, parce qu'il eſt très-rare qu'à un degré précis d'anomalie on ait un nombre complet de jours ; mais avec des parties proportionnelles on trouve facilement les anomalies vraies qui répondent à chaque jour complet ; c'eſt ainſi qu'on a calculé la table générale qui ſe trouvera ci-après ; on y voit l'anomalie vraie qui répond à chaque jour de diſtance au périhélie pour la comète de 109 jours. On pourroit faire ce même calcul par une méthode directe, en réſolvant l'équation $t^3 + 3t = a$ (a exprime le quadruple du temps par PO), pour trouver l'inconnue t ; mais il eſt plus facile de trouver le temps par le moyen de l'anomalie vraie, & il eſt ſuperflu de chercher une autre méthode pour conſtruire la table.

De la table générale.

3037. Cette table s'applique facilement à toutes les comètes ; en effet, ſi l'on conſidère différentes comètes dans d'autres paraboles, à un même degré d'anomalie vraie, les temps écoulés depuis le paſſage au périhélie, ſeront entre eux comme les temps employés à aller du périhélie juſqu'à 90°, par exemple, quand $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ ſera égal à $\frac{1}{2}$, le temps ſera la moitié du temps pour 90°, dans toutes les paraboles poſſibles ; delà il ſuit que pour une comète

Elle ſert à toutes les comètes.

quelconque ſi je connois le temps des 90°, j'aurai (avec une ſimple règle de trois) le temps pour tout autre angle d'anomalie vraie en me ſervant de la table calculée pour la comète de 109 jours. Il ne reſte donc plus qu'à chercher le temps des 90° pour des paraboles plus ou moins grandes, ou le nombre de jours qu'exigera l'arc *PO*, quand la diſtance périhélie *SP* ne ſera plus égale à la moyenne diſtance de la terre au ſoleil ; c'eſt ce que je vais faire par le moyen du théorême ſuivant.

Les carrés des temps ſont comme les cubes des diſtances.

3038. Les carrés des temps qui répondent à une même anomalie vraie dans différentes paraboles, ſont comme les cubes des diſtances périhélies. Cette loi analogue à celle du mouvement des planètes (1224), eſt tout de même une ſuite néceſſaire des forces centrales (3396) ; en effet, nous avons démontré que ſur le rayon de l'orbite terreſtre décrit en 365^j, on avoit un quart de parabole de 109 jours ; ainſi le temps de la parabole eſt environ $\frac{3}{10}$ de celui du cercle ; mais ſi l'on conſidère différens cercles ou différentes planètes, à d'autres diſtances du ſoleil, on aura différentes révolutions dont les carrés des temps ſeront comme les cubes des diſtances (1224, 3396.) ; donc les temps des paraboles qui en ſont toujours les $\frac{3}{10}$ ſeront auſſi dans la même proportion ; donc les temps qui répondent à *PO*, ſont comme les racines carrées des cubes des diſtances périhélies *SP*.

3039. Une seule table ſervira donc pour trouver l'anomalie vraie dans toutes les paraboles pourvu que l'on augmente les temps en raiſon de la racine carrée du cube de la diſtance périhélie ; en effet, pour un même degré d'anomalie vraie, les carrés des temps de différentes paraboles doivent augmenter comme les cubes des diſtances périhélies, ou les temps comme les racines carrées des cubes des diſtances périhélies ; ainſi à 90° d'anomalie vraie répondent 109 jours quand la diſtance périhélie eſt 10 (3031), & 126 jours quand la diſtance périhélie eſt 11, parce que la racine carrée du cube de 11 eſt plus grande dans le même rapport ; il

faut donc augmenter auſſi à proportion les autres nombres de jours, quand on cherchera, dans la table générale, les anomalies pour la comète de 126 jours.

J'ai mis dans la table ci-jointe, à côté de chaque diſtance périhélie, le nombre par lequel il faut multiplier les jours de la table générale, pour avoir les jours qui dans d'autres comètes répondent à une même anomalie; je ſuppoſe la diſtance du ſoleil à la terre diviſée en dix parties, & j'ai calculé le nombre des jours pour l'arc *P O* dans onze paraboles différentes.

Diſt. périhel. en dixièmes de celle du Soleil.	Nomb. par leſq. on multiplie les jours de la table.	Jours pour 90°.
1	0,035	3,5
2	0,089	9,8
3	0,164	18,0
4	0 253	27,7
5	0 353	38,8
6	0,465	50,9
7	0,585	64,2
8	0,715	78,4
9	0,854	93 6
10	1,000	109,6
11	1,152	126,3

3040. On voit par cette table que quand la diſtance périhélie d'une comète, eſt $\frac{4}{10}$ de celle de la terre au ſoleil, il faut, au lieu des jours de la table générale, en prendre d'autres qui ne ſoient que 0, 25 ou le quart; voilà pourquoi cette comète n'emploie que 28 jours à parcourir les 90° d'anomalie, & nous pouvons l'appeller la comète de 28 jours, comme nous avons appellé comète de 109 jours (pour abréger), celle qui emploîroit environ 109 jours à aller du périhélie juſqu'à 90° d'anomalie.

Règle générale. Donc pour chaque degré d'anomalie, au logarithme des jours de la table, il faudra ajouter une fois & demie le logarithme de la diſtance périhélie d'une comète donnée, pour avoir le nombre de jours qui répond à cette comète donnée, pour le même degré d'anomalie; au contraire quand le nombre de jours écoulés depuis le périhélie d'une comète quelconque ſera donné, il faudra ôter les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la diſtance périhélie, du logarithme des jours donnés, qui conviennent à une certaine comète, & l'on aura le logarithme des jours qu'il faut chercher dans la table générale.

Trouver l'anomalie vraie. 3041. Exemple, on a trouvé par obſervation que la célèbre comète de 1759, décrivoit une parabole dont

la diſtance périhélie étoit 0, 5849, & qu'elle avoit paſſé par ſon périhélie, le 12 Mars à $13^h\ 59'\ 24''$ de temps moyen au méridien de Paris; on demande l'anomalie vraie de la comète & ſa diſtance au ſoleil, le 1 Mai à $8^h\ 54'\ 40''$, c'eſt-à-dire, $49^j\ 18^h\ 55'\ 16''$ après le paſſage au périhélie. On réduit pour plus de facilité les heures en décimales de jours, par le moyen de la petite table qu'on trouvera ci-après avant la table générale, parce que les parties proportionnelles ſont plus aiſées à faire avec des décimales, & les logarithmes plus aiſés à chercher; on a donc 49^j, 7884; du logarithme de ce nombre j'ôte une fois & demie celui de la diſtance périhélie, il me reſte 2,0465058 auquel répond dans les tables 111^j, 3282; avec ce nombre de jours qui convient à la comète de 109^j, je cherche l'anomalie dans la table générale, & je trouve $90^o\ 35'\ 26''$, c'eſt l'anomalie vraie cherchée pour le 1 Mai 1759. On en verra le calcul à la ſuite de la table générale.

3042. Le rayon vecteur de la comète ou ſa diſtance au ſoleil eſt égal à la diſtance périhélie *SP*, diviſée par le carré du coſinus de la moitié de l'anomalie vraie (3253). Cette diſtance étoit donc dans notre exemple $\frac{0,5849}{(\text{coſ.}\frac{1}{2}\text{anom.})^2}$; ainſi je prends le double du log. coſ. de $45^o\ 17'\ 43''$, qui eſt 9, 6944705 que je retranche du log. de la diſt. périhélie, il reſte 0,0726111, log. de 1,18198; c'eſt la diſtance de la comète. Si l'on veut éviter les fractions décimales, & les logarithmes de fractions, on peut ſuppoſer la diſtance du ſoleil égale, non à l'unité, mais à 100000, comme dans nos tables du ſoleil & des planètes, on n'aura pour lors que des nombres ordinaires dans le calcul; la diſtance périhélie ſera 58490, & la diſtance trouvée 118198 de ces mêmes parties. Trouver la diſtance.

3043. Quand on connoît deux rayons vecteurs d'une parabole, avec l'angle compris, on peut trouver la diſtance périhélie & les deux anomalies qui répondent aux rayons vecteurs. Soient *b* & *c* les deux rayons vecteurs d'une parabole, dont 1 eſt la diſtance périhélie, *a* le quart de la ſomme des deux anomalies vraies, *x* le quart

de la différence de ces deux anomalies, on aura cette proportion : $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c}$: : cotang. a : tang. x.

Dém. Le carré du cosinus de la moitié d'une anomalie vraie est au carré du rayon, comme 1 est au rayon vecteur (3253) ; mais la plus grande des deux anomalies est $2a + 2x$, la plus petite $2a - 2x$; ainsi $\sqrt{b}$: $\sqrt{c}$: : cos. $(a - x)$: cos. $(a + x)$; or cos. $(a - x) =$ cos. a cos. x + sin. a sin. x, & cos. $(a + x) =$ cos. a cos. x — sin. a sin. x (3618, 3620) ; donc $\sqrt{b}$. cos. a cos. x — $\sqrt{c}$. cos. a. cos. $x = \sqrt{b}$ sin. a sin. $x + \sqrt{c}$ sin. a sin. x : donc $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c}$: : cos. a cos. x : sin. a sin. x : : $\frac{\text{cos.}a}{\text{sin.}a} : \frac{\text{sin.}x}{\text{cos.}x}$: : cot. a : tang. x, c'est-à-dire, que la somme des racines des rayons vecteurs est à leur différence, comme la cotangente de la demi-somme des demi-anomalies vraies est à la tangente de leur demi-différence (*M. Nicollic*, *Mém. de l'acad.* 1746, *pag.* 302. *M. de la Caille*, *ib. pag.* 429). Nous ferons usage de cette règle dans la recherche des orbites cométaires (3058, 3074).

Lorsqu'on a deux quantités inégales, & qu'on fait cette proportion la plus grande est à la plus petite comme le rayon est à la tangente d'un angle : ôtant 45° de l'angle trouvé, on peut toujours dire, le rayon est à la tangente du reste comme la somme des deux quantités données est à leur différence (3643) ; on dira donc aussi dans le cas dont nous parlons ; 1°, la racine du plus petit des deux rayons vecteurs est à la racine du plus grand comme le rayon est à la tangente d'un angle, dont on ôtera 45° ; 2°, le rayon est à la tangente du reste comme la cotangente du quart de la somme des deux anomalies est à la tangente du quart de leur différence ; ou comme la cot. du quart de la différence est à la tang. du quart de la somme ; ce qui est très-commode dans cette opération, c'est qu'elle sert également pour trouver la somme, ou pour trouver la différence des anomalies, ensorte qu'on n'a pas besoin de savoir si les deux rayons vecteurs sont du même côté du périhélie.

Calculer

Calculer l'orbite d'une Comète par trois obſervations.

3044. Jusqu'ici j'ai expliqué la manière de diſtribuer le mouvement d'une comète déja connue, ſur les différens points de la parabole qu'elle décrit, parce qu'en effet, il fallut connoître les loix de ce mouvement, comme Newton les donna dans ſon livre des principes, ou comme je viens de les expliquer, avant de reconnoître que ces loix s'obſervoient dans le ciel : nous ſommes en état de chercher actuellement quelle eſt la parabole qu'une comète décrit autour du ſoleil, pourvu que nous ayons trois obſervations de ſon lieu apparent dans le ciel ; car une parabole dont le foyer eſt donné peut ſe déterminer par trois points, auſſi bien qu'une ellipſe (1293), mais la difficulté devient beaucoup plus grande pour les comètes, parce que les trois longitudes données, ne ſont pas des longitudes vues du ſoleil. Ce problême que Newton ſe propoſoit même dans la première édition de ſes principes (en 1687), ſeroit extrêmement difficile, ſi l'on n'y employoit pas une opération graphique, ou des approximations & des méthodes indirectes. Par exemple, Newton (*Princip. mathem.* L. III. pr. 41. *Arithmet. univerſalis*) réſout d'abord ce problême : *l'orbite d'une comète ſuppoſée rectiligne & uniformément parcourue, déterminer cette ligne par le moyen de quatre longitudes obſervées* : ce problême ſert à trouver enſuite avec aſſez de facilité l'orbite entière d'une comète ; mais il faut prendre d'abord des obſervations peu éloignées entre elles, & aſſez éloignées du périhélie pour que la vîteſſe ſoit ſenſiblement uniforme, & la direction rectiligne. Cette ſolution ſe réduit à trouver une ligne droite qui ſoit coupée par quatre lignes droites dans la raiſon donnée, qui eſt celle des temps. Le problême eſt à la vérité preſque toujours déterminé ; mais le P. Boſcovich obſerve dans une diſſertation ſur les comètes imprimée en 1744, que ce problême eſt indéterminé lorſqu'on ſuppoſe les 4 lignes tirées de 4 lieux de la terre ſitués de même en ligne droite ; &

il l'a montré d'une autre manière dans un mémoire inséré à la fin de l'édition de l'arithmétique universelle, donnée en Hollande par M. Castillon.

Le P. Boscovich, dans le même endroit, fait voir qu'il y a un semblable défaut dans la méthode que M. Bouguer a donnée pour déterminer l'orbite d'une comète par trois observations très-voisines, en supposant une portion d'hyperbole sensiblement rectiligne, (*Mém. de l'acad.* 1733). Enfin, le P. Boscovich a donné dans cette dissertation une méthode, qu'il m'a envoyée depuis ce temps-là dans une forme plus élégante & plus simple, pour déterminer l'orbite par trois observations peu éloignées l'une de l'autre, en supposant toujours que le mouvement est à peu-près rectiligne, mais en y ajoutant la considération de la vîtesse absolue de la comète qui dépend de sa distance au soleil. M. Euler suppose aussi trois lieux observées à de petits intervalles proportionnels au temps, & la distance de la comète au soleil à peu-près connue dans l'observation moyenne; ayant fait ainsi plusieurs suppositions, il examine laquelle représente le mieux une 4e observation fort éloignée des trois autres, & il en déduit les véritables élémens. (*Euleri Theoria motuum Planetarum & Cometarum*, *in*-4° à Berlin 1744, *pag.* 57 & 139). Voyez aussi les mémoires de M. Fontaine, l'ouvrage de M. Lambert: *Insigniores orbitæ Cometarum proprietates*, *Augustæ Vindelic.* 1761, *in*-8°. Un mémoire du P. Charles Walmesley, &c. mais la méthode que je vais expliquer me paroît la plus commode & la plus courte.

Paraboles divisées en jours.

3045. Je suppose pour guider le calcul qu'on ait formé avec du carton 10 paraboles, sur les distances périhélies 1, 2, 3, &c. & qu'elles soient divisées en jours, comme dans la *figure* 267; le cercle *ABC* représente l'orbite de la terre, le soleil étant en *S*, la parabole *CD* est celle de la comète de 109 jours dont la distance périhélie *SC* est égale à celle de la terre au soleil; cette parabole est divisée en jours, pour servir d'exemple à ceux qui voudroient faire usage de cette méthode, & la division s'étend jusqu'à une distance 5 fois & demi plus grande

Fig. 267.

que celle du soleil à la terre; c'est beaucoup plus que l'éloignement dans lequel les comètes disparoissent ordinairement à nos yeux; on voit qu'au point *D* la comète se trouveroit à 440 jours de son périhélie, l'abscisse *SE* mesurée sur l'axe de la parabole seroit alors de 3 fois & demi la distance du soleil à la terre, & l'ordonnée *ED* $=4\frac{1}{4}$. Je suppose qu'on ait calculé de même les ordonnées, les distances au soleil, les anomalies & les jours correspondans pour différentes abscisses, telles que *SE*, ou pour différens jours, dans onze paraboles (3039); on pourra aisément former des paraboles de carton sur une échelle triple de celle de la *figure* 267; on les divisera en jours; ces courbes étant découpées, on s'en servira comme je vais l'expliquer, pour trouver celle qui convient à trois observations d'une comète inconnue. Au reste, les astronomes qui ont de l'habitude dans le calcul, se passeront aisément de ces préliminaires, & commenceront par le calcul d'une hypothèse (3055).

3046. Je prendrai pour exemple la comète que j'observai au mois de Mai 1763 : soit *S* le soleil (*fig.* 263), *ABC* l'orbite de la terre qui étoit en *A* le 17 Mai 1763, en *B* le 30 Mai, & en *C* le 24 Juin; la différence entre la longitude de la comète observée, & la longitude du soleil calculée par les tables, c'est-à-dire, l'angle d'élongation de la comète réduit au plan de l'écliptique le 17 Mai fut observé de $11^\circ\frac{1}{3}$, dont la comète étoit à l'orient dans la première observation : je fais donc l'angle *SAD* de $11^\circ\frac{1}{3}$; je fais de même les angles *SBE* de $25^\circ\ 50'$, & *SCF* de $35^\circ\ 20'$; ce sont les élongations observées le 30 Mai & le 24 Juin : par ce moyen j'ai les trois lignes *AD*, *BE*, *CF*, au-dessus desquelles répondoit perpendiculairement la comète dans les trois observations. Il faut ensuite tendre au-dessus de ces trois lignes des fils qui fassent avec elles aux points *A*, *B*, *C*, des angles de $44^\circ\ 10'$, $38^\circ\ 15'$ & $18^\circ\ 56'$; ce sont les latitudes de la comète vues de la terre dans les trois observations; ces fils représenteront les rayons visuels dirigés de la terre à la comète dans ces trois observations. *Fig.* 263.

Opération graphique.

Je ſuppoſe que le demi-cercle *ABCL* ſoit évidé d'un côté, afin que le centre *S* ſoit libre, & qu'on puiſſe y préſenter les paraboles de la *fig.* 267.

3047. On prendra la parabole de 18 jours, c'eſt-à-dire, celle dont la diſtance périhélie eſt trois dixièmes de celle du ſoleil (3039), & plaçant le foyer de cette parabole en *S* on préſentera ſa circonférence contre les fils tendus des points *A*, *B*, *C*, au-deſſus des lignes *AD*, *BE*, *CF*; alors on verra que cette parabole eſt trop petite pour pouvoir s'ajuſter contre ces fils dans leur partie inférieure près des points *A*, *B*, *C*, & qu'elle eſt trop oblique, c'eſt-à-dire, trop longue & trop étroite pour pouvoir y convenir dans des parties plus éloignées, du côté des points *D*, *E*, *F*.

On prendra donc des paraboles plus larges; l'on trouvera bientôt que celle de 109 jours eſt la plus convenable, la plus approchante des fils, celle qui s'y ajuſte le mieux; on tournera cette parabole en différens ſens, pour faire enſorte que les nombres de jours qui ſeront interceptés entre les fils ſoient égaux aux intervalles des obſervations, qui dans l'exemple propoſé ſont de 13 & de 25 jours. On verra facilement qu'en mettant le périhélie ou le ſommet de cette parabole ſur le fil du milieu qui répond au-deſſus de *BE*, le fil de la droite touche la parabole en *G*, 13 jours avant le périhélie, & le fil de la gauche la touche en *K*, 25 jours plus loin que le périhélie; cela fait voir que la comète paſſoit par le périhélie lorſqu'elle paroiſſoit en *H*, aux environs du 30 Mai, & que ſa diſtance au ſoleil étoit 10, c'eſt-à-dire, égale à celle du ſoleil; on verra même à peu-près les diſtances réduites à l'écliptique dans les trois obſervations, c'eſt à dire, les lignes *SG*, *SH*, *SK*, & l'on ſera en état de former une hypothèſe fort approchante des obſervations, avec laquelle on commencera les calculs (3055).

3048. De toutes ces paraboles que je ſuppoſe diviſées en jours, & que l'on préſente ſucceſſivement ſous les fils, il n'y en a qu'une qui puiſſe être aſſujettie à ces trois conditions, d'avoir ſon foyer au centre *S* du ſoleil, de toucher

les trois lignes menées de la terre à la comète dans les trois obfervations, & d'avoir entre les trois points de contact des intervalles de temps, égaux à ceux qu'on a obfervés.

3049. Ainfi l'on eft sûr de trouver, par l'opération pratique dont je viens de donner une idée, la parabole unique, propre à fatisfaire aux trois longitudes & aux trois latitudes vues de la terre. Non-feulement on a la grandeur de cette parabole, c'eft-à-dire, fa diftance périhélie; mais on en a encore fa fituation, c'eft-à-dire, le lieu de fon périhélie, & celui de fon nœud; car on peut voir à quel point du cercle *ABCL* répond la fection des deux plans ou le diamètre qui forme la ligne commune du cercle & de la parabole, & c'eft le lieu du nœud.

3050. La fituation de l'orbite fera d'autant mieux déterminée que les intervalles des temps feront plus longs, les longitudes & les latitudes obfervées plus éloignées l'une de l'autre, le mouvement plus inégal, & les anomalies de la comète plus différentes (3084); mais la méthode que je vais bientôt expliquer eft générale, & ne fuppofe aucune condition dans les obfervations qu'on emploie. Choix des obfervations.

3051. Quand on connoît à peu-près par une opération graphique les élémens d'une comète, on doit employer le calcul pour les trouver exactement. Pour cela nous ne pouvons rien faire de plus commode & de plus fimple que d'employer des méthodes indirectes, comme nous l'avons fait pour déterminer les orbites des planètes par trois obfervations (1293); nous fuppoferons donc connu ce qu'il s'agit de trouver, & avec un petit nombre de fauffes pofitions nous parviendrons bientôt à trouver exactement ce que nous cherchons. Ce fut probablement la route de M. Halley; M. Bradley perfectionna enfuite cette méthode, (*M. le Monnier, théorie des comètes*, 1743. *Inftitut. aftron.* 1746, *pag.* 349). M. l'Abbé de la Caille la rendit encore plus commode (*Mém. acad.* 1746. *Leçons d'aftron.* 1761). Enfin, je crois l'avoir moi-même rendue plus fimple dans ma *théorie des comètes*

à la ſuite des tables de M. Halley, que je publiai en 1759, & ſur-tout dans l'explication ſuivante.

Idée générale du problême.

On choisit d'abord deux longitudes & deux latitudes obſervées ; on cherche les paraboles qui peuvent ſatisfaire à ces deux obſervations corrigées ; quand on a deux ou trois paraboles, c'eſt-à-dire, deux ou trois hypothèſes qui s'accordent également bien avec les deux obſervations, on calcule dans chacune de ces trois hypothèſes le lieu de la comète au temps de la troiſième obſervation ; celle des hypothèſes qui s'accorde le mieux avec le calcul de cette troiſième obſervation eſt la meilleure, & une ſimple règle de proportion ſuffit quelquefois pour trouver une autre hypothèſe qui ſatisfait exactement à toutes trois.

3052. La Table générale du mouvement des comètes dans un orbe parabolique, dont j'ai ci-devant expliqué la conſtruction & l'uſage (3034 & ſuiv.), étant abſolument néceſſaire dans tous les calculs ſuivans, je vais la placer ici de même que la table préliminaire pour qu'on les trouve jointes aux préceptes du calcul.

TABLE pour réduire les Heures, Minutes & Secondes en fractions décimales de jours (3041).

Heures.	Décimal. de jour.	Heures.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Secondes	Décimales de jour.
1	0,04166:	13	0,54166:	1	,000694:	13	,009027:	25	,017361:	37	,025694:	49	,034027:	1	,0000116
2	0,08333:	14	0,58333:	2	,001388:	14	,009722:	26	,018055:	38	,026388:	50	,034722:	2	,0000231
3	0,12500:	15	0,62500.	3	,002083:	15	,010416:	27	,018750:	39	,027083:	51	,035416:	3	,0000347
4	0,16666:	16	0,66666:	4	,002777:	16	,011111:	28	,019444:	40	,027777:	52	,036111:	4	,0000463
5	0,20833:	17	0,70833:	5	,003472:	17	,011805:	29	,020138:	41	,028472:	53	,036805:	5	,0000579
6	0,25000:	18	0,75000	6	,004166:	18	,012500:	30	,020833:	42	,029166:	54	,037500:	6	,0000694
7	0,29166:	19	0,79166:	7	,004861:	19	,013194:	31	,021527:	43	,029861:	55	,038194:	7	,0000810
8	0,33333:	20	0,83333:	8	,005555:	20	,013888:	32	,022222:	44	,030555:	56	,038888:	10	,0001157
9	0,37500:	21	0,87500:	9	,006250:	21	,014583	33	,022916:	45	,031250:	57	,039583:	20	,0002315
10	0,41666:	22	0,91666:	10	,006944:	22	,015277	34	,023611:	46	,031944:	58	,040277:	30	,0003472:
11	0,45833:	23	0,95833:	11	,007638:	23	,015972	35	,024305:	47	,032638:	59	,040972	40	,0004630
12	0,50000:	24	1,00000:	12	,008333:	24	,016666:	36	,025000:	48	,033333:	60	,041666:	50	,0005787

Les nombres terminés par deux points ſe continuent à l'infini en répétant le dernier chiffre. La virgule qui précéde les décimales, ſuppoſe qu'il y ait un zéro auparavant.

TABLE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT DES COMETES,

Ou Anomalie vraie de la Comète de 109 jours (3036).

N.B. Le Logarithme des jours de cette Table ajouté avec les $\frac{3}{2}$ du log. de la dif. périh. de toute autre Comète, donne le log. des jours qui lui conviennent (3039).

Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Différ.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Différ.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Différ.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Différ.
	D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.
0, 00	0 0 0	20 54	12, 50	17 9 45	19 58	25, 00	32 55 27	17 39	37, 50	46 30 21	14 52
0 25	0 20 54	20 54	12 75	17 29 43	19 56	25 25	33 13 6	17 36	37 75	46 45 13	14 49
0 50	0 41 48	20 55	13 00	17 49 39	19 53	25 50	33 30 42	17 33	38 00	47 0 2	14 45
0 75	1 2 43	20 54	13 25	18 9 32	19 52	25 75	33 48 15	17 30	38 25	47 14 47	14 42
1 00	1 23 37	20 54	13 50	18 29 24	19 50	26 00	34 5 45	17 26	38 50	47 29 29	14 39
1 25	1 44 31	20 54	13 75	18 49 14	19 47	26 25	34 23 11	17 23	38 75	47 44 8	14 36
1 50	2 5 25	20 53	14 00	19 9 1	19 45	26 50	34 40 34	17 20	39 00	47 58 44	14 32
1 75	2 26 18	20 54	14 25	19 28 46	19 43	26 75	34 57 54	17 17	39 25	48 13 16	14 29
2 00	2 47 12	20 53	14 50	19 48 29	19 40	27 00	35 15 11	17 14	39 50	48 27 45	14 26
2 25	3 8 5	20 52	14 75	20 8 9	19 38	27 25	35 32 25	17 10	39 75	48 42 11	14 23
2 50	3 28 57	20 52	15 00	20 27 47	19 35	27 50	35 49 35	17 7	40 00	48 56 34	14 20
2 75	3 49 49	20 51	15 25	20 47 22	19 33	27 75	36 6 42	17 3	40 25	49 10 54	14 16
3 00	4 10 40	20 51	15 50	21 6 55	19 30	28 00	36 23 45	17 0	40 50	49 25 10	14 13
3 25	4 31 31	20 50	15 75	21 26 25	19 28	28 25	36 40 45	16 57	40 75	49 39 23	14 9
3 50	4 52 21	20 50	16 00	21 45 53	19 25	28 50	36 57 42	16 53	41 00	49 53 32	14 6
3 75	5 13 11	20 49	16 25	22 5 18	19 23	28 75	37 14 35	16 50	41 25	50 7 38	14 3
4 00	5 34 0	20 48	16 50	22 24 41	19 20	29 00	37 31 25	16 46	41 50	50 21 41	14 0
4 25	5 54 48	20 47	16 75	22 44 1	19 18	29 25	37 48 11	16 43	41 75	50 35 41	13 57
4 50	6 15 35	20 47	17 00	23 3 19	19 15	29 50	38 4 54	16 40	42 00	50 49 38	13 53
4 75	6 36 22	20 46	17 25	23 22 34	19 12	29 75	38 21 34	16 37	42 25	51 3 31	13 50
5 00	6 57 8	20 45	17 50	23 41 46	19 10	30 00	38 38 11	16 33	42 50	51 17 21	13 47
5 25	7 17 53	20 44	17 75	24 0 56	19 7	30 25	38 54 44	16 30	42 75	51 31 8	13 44
5 50	7 38 37	20 43	18 00	24 20 3	19 4	30 50	39 11 14	16 27	43 00	51 44 52	13 41
5 75	7 59 20	20 42	18 25	24 39 7	19 1	30 75	39 27 41	16 23	43 25	51 58 33	13 37
6 00	8 20 2	20 41	18 50	24 58 8	18 59	31 00	39 44 4	16 20	43 50	52 12 10	13 34
6 25	8 40 43	20 40	18 75	25 17 7	18 56	31 25	40 0 24	16 16	43 75	52 25 44	13 31
6 50	9 1 23	20 38	19 00	25 36 3	18 53	31 50	40 16 40	16 13	44 00	52 39 15	13 28
6 75	9 22 1	20 37	19 25	25 54 56	18 50	31 75	40 32 53	16 10	44 25	52 52 43	13 25
7 00	9 42 38	20 36	19 50	26 13 46	18 47	32 00	40 49 3	16 7	44 50	53 6 8	13 21
7 25	10 3 14	20 35	19 75	26 32 33	18 44	32 25	41 5 10	16 3	44 75	53 19 29	13 19
7 50	10 23 49	20 33	20 00	26 51 17	18 41	32 50	41 21 13	16 0	45 00	53 32 48	13 15
7 75	10 44 22	20 32	20 25	27 9 59	18 38	32 75	41 37 13	15 56	45 25	53 46 3	13 13
8 00	11 4 54	20 30	20 50	27 28 37	18 36	33 00	41 53 9	15 53	45 50	53 59 16	13 9
8 25	11 25 24	20 29	20 75	27 47 13	18 32	33 25	42 9 2	15 49	45 75	54 12 25	13 6
8 50	11 45 53	20 27	21 00	28 5 45	18 30	33 50	42 24 51	15 46	46 00	54 25 31	13 3
8 75	12 6 20	20 26	21 25	28 24 15	18 26	33 75	42 40 37	15 42	46 25	54 38 34	13 1
9 00	12 26 46	20 24	21 50	28 42 41	18 24	34 00	42 56 19	15 39	46 50	54 51 35	12 57
9 25	12 47 10	20 23	21 75	29 1 5	18 20	34 25	43 11 58	15 36	46 75	55 4 32	12 54
9 50	13 7 33	20 21	22 00	29 19 25	18 17	34 50	43 27 34	15 32	47 00	55 17 26	12 51
9 75	13 27 54	20 20	22 25	29 37 42	18 15	34 75	43 43 6	15 29	47 25	55 30 17	12 48
10 00	13 48 14	20 18	22 50	29 55 57	18 11	35 00	43 58 35	15 26	47 50	55 43 5	12 44
10 25	14 8 32	20 16	22 75	30 14 8	18 8	35 25	44 14 1	15 22	47 75	55 55 49	12 42
10 50	14 28 48	20 14	23 00	30 32 16	18 5	35 50	44 29 23	15 19	48 00	56 8 31	12 39
10 75	14 49 2	20 12	23 25	30 50 21	18 2	35 75	44 44 42	15 16	48 25	56 21 10	12 35
11 00	15 9 14	20 10	23 50	31 8 23	17 58	36 00	44 59 58	15 12	48 50	56 33 45	12 33
11 25	15 29 24	20 9	23 75	31 26 21	17 56	36 25	45 15 10	15 9	48 75	56 46 18	12 30
11 50	15 49 33	20 6	24 00	31 44 17	17 52	36 50	45 30 19	15 6	49 00	56 58 48	12 27
11 75	16 9 39	20 4	24 25	32 2 9	17 49	36 75	45 45 25	15 2	49 25	57 11 15	12 24
12 00	16 29 43	20 2	24 50	32 19 58	17 46	37 00	46 0 27	14 59	49 50	57 23 39	12 21
12 25	16 49 45	20 0	24 75	32 37 44	17 43	37 25	46 15 26	14 55	49 75	57 36 0	12 18
12 50	17 9 45		25 00	32 55 27		37 50	46 30 21		50 00	57 48 18	

Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie.			Différ.	
	D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.
50,00	57	48	18			65,00	68	44	34			80,00	77	25	23			95,00	84	24	38		
50 25	58	0	33	12	15	65 25	68	54	15	9	41	80 25	77	33	7	7	44	95 25	84	30	55	6	17
50 50	58	12	45	12	12	65 50	69	3	54	9	39	80 50	77	40	50	7	43	95 50	84	37	11	6	16
50 75	58	24	55	12	10	65 75	69	13	31	9	37	80 75	77	48	31	7	41	95 75	84	43	26	6	15
51 00	58	37	2	12	7	66 00	69	23	5	9	34	81 00	77	56	10	7	39	96 00	84	49	39	6	13
51 25	58	49	6	12	4	66 25	69	32	37	9	32	81 25	78	3	47	7	37	96 25	84	55	51	6	12
51 50	59	1	7	12	1	66 50	69	42	7	9	30	81 50	78	11	23	7	36	96 50	85	2	2	6	11
51 75	59	13	5	11	58	66 75	69	51	35	9	28	51 75	78	18	57	7	34	96 75	85	8	12	6	10
52 00	59	25	1	11	56	67 00	70	1	1	9	26	82 00	78	26	30	7	33	97 0	85	14	20	6	8
52 25	59	36	54	11	53	67 25	70	10	25	9	24	82 25	78	34	1	7	31	97 25	85	20	27	6	7
52 50	59	48	44	11	50	67 50	70	19	46	9	21	82 50	78	41	31	7	30	97 50	85	26	33	6	6
52 75	60	0	31	11	47	67 75	70	29	5	9	19	82 75	78	48	59	7	28	97 75	85	32	38	6	5
53 00	60	12	15	11	44	68 00	70	38	22	9	17	83 00	78	56	25	7	26	98 00	85	38	42	6	4
53 25	60	23	56	11	41	68 25	70	47	37	9	15	83 25	79	3	50	7	25	98 25	85	44	45	6	3
53 50	60	35	35	11	39	68 50	70	56	50	9	13	83 50	79	11	13	7	23	98 50	85	50	46	6	1
53 75	60	47	11	11	36	68 75	71	6	0	9	10	83 75	79	18	35	7	22	98 75	85	56	46	6	0
54 00	60	58	44	11	33	69 00	71	15	9	9	9	84 00	79	25	55	7	20	99 00	86	2	45	5	59
54 25	61	10	15	11	31	69 25	71	24	16	9	7	84 25	79	33	13	7	18	99 25	86	8	43	5	58
54 50	61	21	43	11	28	69 50	71	33	20	9	4	84 50	79	40	30	7	17	99 50	86	14	39	5	56
54 75	61	33	8	11	25	69 75	71	42	23	9	3	84 75	79	47	45	7	15	99 75	86	20	34	5	55
55 00	61	44	30	11	22	70 00	71	51	23	9	0	85 00	79	54	59	7	14	100 00	86	26	28	5	54
55 25	61	55	50	11	20	70 25	72	0	21	8	58	85 25	80	2	11	7	12	100 50	86	38	14	11	46
55 50	62	7	7	11	17	70 50	72	9	18	8	57	85 50	80	9	22	7	11	101 00	86	49	55	11	41
55 75	62	18	21	11	14	70 75	72	18	12	8	54	88 75	80	16	31	7	9	101 50	87	1	31	11	36
56 00	62	29	32	11	11	71 00	72	27	4	8	52	86 00	80	23	38	7	7	102 00	87	13	3	11	32
56 25	62	40	41	11	9	71 25	72	35	54	8	50	86 25	80	30	44	7	6	102 50	87	24	30	11	27
56 50	62	51	47	11	6	71 50	72	44	42	8	48	86 50	80	37	49	7	5	103 00	87	35	53	11	23
56 75	63	2	51	11	4	71 75	72	53	29	8	47	86 75	80	44	53	7	4	103 50	87	47	12	11	19
57 00	63	13	52	11	1	72 00	73	2	13	8	44	87 00	80	51	55	7	2	104 00	87	58	26	11	14
57 25	63	24	50	10	58	72 25	73	10	55	8	42	87 25	80	58	55	7	0	104 50	88	9	36	11	10
57 50	63	35	46	10	56	72 50	73	19	36	8	41	87 50	81	5	54	6	59	105 00	88	20	43	11	7
57 75	63	46	39	10	53	72 75	73	28	14	8	38	87 75	81	12	52	6	58	105 50	88	31	45	11	2
58 00	63	57	30	10	51	73 00	73	36	51	8	37	88 00	81	19	48	6	56	106 00	88	42	43	10	58
58 25	64	8	18	10	48	73 25	73	45	25	8	34	88 25	81	26	43	6	55	106 50	88	53	37	10	54
58 50	64	19	4	10	46	73 50	73	53	58	8	33	88 50	81	33	36	6	53	107 00	89	4	26	10	49
58 75	64	29	47	10	43	73 75	74	2	29	8	31	88 75	81	40	28	6	52	107 50	89	15	11	10	45
59 00	64	40	28	10	41	74 00	74	10	58	8	29	89 00	81	47	18	6	50	108 00	89	25	53	10	42
59 25	64	51	6	10	38	74 25	74	19	25	8	27	89 25	81	54	7	6	49	108 50	89	36	31	10	38
59 50	65	1	42	10	36	74 50	74	27	50	8	25	89 50	82	0	54	6	47	109 00	89	47	5	10	34
55 75	65	12	15	10	33	74 75	74	36	13	8	23	89 75	82	7	40	6	46	109 50	89	57	35	10	30
60 00	65	22	45	13	30	75 00	74	44	34	8	21	90 00	82	14	25	6	45	110 00	90	8	1	10	26
60 25	65	33	13	10	28	75 25	74	52	53	8	19	90 25	82	21	8	6	43	110 50	90	18	23	10	22
60 50	65	43	39	10	26	75 50	75	1	11	8	18	90 50	82	27	50	6	42	111 00	90	28	42	10	19
60 75	65	54	2	10	23	75 75	75	9	26	8	15	90 75	82	34	31	6	41	111 50	90	38	57	10	15
61 00	66	4	23	10	21	76 00	75	17	40	8	14	91 00	82	41	10	6	39	112 00	90	49	8	10	11
61 25	66	14	41	10	18	76 25	75	25	52	8	12	91 25	82	47	48	6	38	112 50	90	59	16	10	8
61 50	66	24	57	10	16	76 50	75	34	2	8	10	91 50	82	54	24	6	36	113 00	91	9	20	10	4
61 75	66	35	11	10	14	76 75	75	42	11	8	9	91 75	83	0	59	6	35	113 50	91	19	20	10	0
62 00	66	45	22	10	11	77 00	75	50	18	8	7	92 00	83	7	33	6	34	114 00	91	29	17	9	57
62 25	66	55	31	10	9	77 25	75	58	23	8	5	92 25	83	14	6	6	33	114 50	91	39	10	9	53
62 50	67	5	37	10	6	77 50	76	6	26	8	3	92 50	83	20	37	6	31	115 00	91	49	0	9	50
62 75	67	15	41	10	4	77 75	76	14	28	8	2	92 75	83	27	8	6	31	115 50	91	58	47	9	47
63 00	67	25	43	10	2	78 00	76	22	28	8	0	93 00	83	33	36	6	28	116 00	92	8	30	9	43
63 25	67	35	43	10	0	78 25	76	30	26	7	58	93 25	83	40	3	6	27	116 50	92	18	10	9	40
63 50	67	45	40	9	57	78 50	76	38	22	7	56	93 50	83	46	29	6	26	117 00	92	27	46	9	36
63 75	67	55	35	9	55	78 75	76	46	16	7	54	93 75	83	52	54	6	25	117 50	92	37	19	9	33
64 00	68	5	27	9	52	79 00	76	54	9	7	53	94 00	83	59	17	6	23	118 00	92	46	48	9	29
64 25	68	15	17	9	50	79 25	77	2	0	7	51	94 25	84	5	39	6	22	118 50	92	56	14	9	26
64 50	68	25	5	9	48	79 50	77	9	49	7	49	94 50	84	12	0	6	21	119 00	93	5	37	9	23
64 75	68	34	51	9	46	79 75	77	17	37	7	48	94 75	84	18	20	6	20	119 50	93	14	57	9	20
65 00	68	44	34	9	43	80 00	77	25	23	7	46	95 00	84	24	38	6	18	120 00	93	24	13	9	16

Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours.	Anomalie vraie.			Différ.		Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	
	D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.		D.	M.	S.	M.	S.
120, 00	93	24	13			150	101	18	20			210	111	50	17			270	118	39	33		
120 50	93	33	26	9	13	151	101	31	47	13	27	211	111	58	30	8	13	271	118	45	12	5	39
121 00	93	42	37	9	11	152	101	45	6	13	19	212	112	6	40	8	10	272	118	50	49	5	37
121 50	93	51	44	9	7	153	101	58	18	13	12	213	112	14	45	8	5	273	118	56	24	5	35
122 00	94	0	48	9	4	154	102	11	22	13	4	214	112	22	48	8	3	274	119	1	57	5	33
122 50	94	9	49	9	1	155	102	24	19	12	57	215	112	30	48	8	0	275	119	7	28	5	31
123 00	94	18	47	8	58	156	102	37	9	12	50	216	112	38	44	7	56	276	119	12	58	5	30
123 50	94	27	42	8	55	157	102	49	52	12	43	217	112	46	37	7	53	277	119	18	26	5	28
124 00	94	36	34	8	52	158	103	2	27	12	35	218	112	54	26	7	49	278	119	23	52	5	26
124 50	94	45	23	8	49	159	103	14	56	12	29	219	113	2	12	7	46	279	119	29	16	5	24
125 00	94	54	9	8	46	160	103	27	18	12	22	220	113	9	56	7	44	280	119	34	39	5	23
125 50	95	2	52	8	43	161	103	39	34	12	16	221	113	17	36	7	40	281	119	40	0	5	21
126 00	95	11	32	8	40	162	103	51	42	12	8	222	113	25	13	7	37	282	119	45	19	5	19
126 50	95	20	9	8	37	163	104	3	44	12	2	223	113	32	46	7	33	283	119	50	36	5	17
127 00	95	28	44	8	35	164	104	15	40	11	56	224	113	40	17	7	31	284	119	55	52	5	16
127 50	95	37	16	8	32	165	104	27	29	11	49	225	113	47	45	7	28	285	120	1	6	5	14
128 00	95	45	45	8	29	166	104	39	13	11	44	226	113	55	10	7	25	286	120	6	18	5	12
128 50	95	54	11	8	26	167	104	50	50	11	37	227	114	2	32	7	22	287	120	11	29	5	11
129 00	96	2	35	8	24	168	105	2	20	11	30	228	114	9	51	7	19	288	120	16	38	5	9
129 50	96	10	56	8	21	169	105	13	45	11	25	229	114	17	7	7	16	289	120	21	46	5	8
130 00	96	19	14	8	18	170	105	25	4	11	19	230	114	24	21	7	14	290	120	26	52	5	6
130 50	96	27	29	8	15	171	105	36	17	11	13	231	114	31	32	7	11	291	120	31	56	5	4
131 00	96	35	42	8	13	172	105	47	25	11	8	232	114	38	39	7	7	292	120	36	59	5	3
131 50	96	43	52	8	10	173	105	58	27	11	2	233	114	45	44	7	5	293	120	42	1	5	2
132 00	96	52	0	8	8	174	106	9	23	10	56	234	114	52	47	7	3	294	120	47	0	4	59
132 50	97	0	5	8	5	175	106	20	14	10	51	235	114	59	47	7	0	295	120	51	59	4	59
133 00	97	8	7	8	2	176	106	30	59	10	45	236	115	6	44	6	57	296	120	56	55	4	56
133 50	97	16	7	8	0	177	106	41	39	10	40	237	115	13	38	6	54	297	121	1	51	4	56
134 00	97	24	4	7	57	178	106	52	14	10	35	238	115	20	30	6	52	298	121	6	44	4	53
134 50	97	31	59	7	55	179	107	2	43	10	29	239	115	27	19	6	49	299	121	11	36	4	52
135 00	97	39	51	7	52	180	107	13	7	10	24	240	115	34	5	6	46	300	121	16	27	4	51
135 50	97	47	41	7	50	181	107	23	26	10	19	241	115	40	49	6	44	301	121	21	17	4	50
136 00	97	55	28	7	47	182	107	33	40	10	14	242	115	47	31	6	42	302	121	26	5	4	48
136 50	98	3	13	7	45	183	107	43	49	10	9	243	115	54	10	6	39	303	121	30	51	4	46
137 00	98	10	56	7	43	184	107	53	54	10	5	244	116	0	46	6	36	304	121	35	36	4	45
137 50	98	18	36	7	40	185	108	3	54	10	0	245	116	7	20	6	34	305	121	40	20	4	44
138 00	98	26	14	7	38	186	108	13	48	9	54	246	116	13	52	6	32	306	121	45	2	4	42
138 50	98	33	50	7	36	187	108	23	38	9	50	247	116	20	22	6	30	307	121	49	43	4	41
139 00	98	41	23	7	33	188	108	33	23	9	45	248	116	26	49	6	27	308	121	54	23	4	40
139 50	98	48	54	7	31	189	108	43	4	9	41	249	116	33	14	6	25	309	121	59	1	4	38
140 00	98	56	22	7	28	190	108	52	41	9	37	250	116	39	36	6	22	310	122	3	38	4	37
140 50	99	3	49	7	27	191	109	2	13	9	32	251	116	45	56	6	20	311	122	8	13	4	35
141 00	99	11	13	7	24	192	109	11	40	9	27	252	116	52	14	6	18	312	122	12	47	4	34
141 50	99	18	35	7	22	193	109	21	3	9	23	253	116	58	30	6	16	313	122	17	20	4	33
142 00	99	25	54	7	19	194	109	30	22	9	19	254	117	4	43	6	13	314	122	21	52	4	32
142 50	99	33	12	7	18	195	109	39	37	9	15	255	117	10	54	6	11	315	122	26	22	4	30
143 00	99	40	27	7	15	196	109	48	47	9	10	256	117	17	3	6	9	316	122	30	51	4	29
143 50	99	47	40	7	13	197	109	57	53	9	6	257	117	23	10	6	7	317	122	35	18	4	27
144 00	99	54	51	7	11	198	110	6	55	9	2	258	117	29	15	6	5	318	122	39	45	4	27
144 50	100	2	0	7	9	199	110	15	53	8	58	259	117	35	18	6	3	319	122	44	10	4	25
145 00	100	9	6	7	6	200	110	24	47	8	54	260	117	41	18	6	0	320	122	48	34	4	24
145 50	100	16	10	7	4	201	110	33	37	8	50	261	117	47	17	5	59	321	122	52	57	4	23
146 00	100	23	13	7	3	202	110	42	23	8	46	262	117	53	13	5	56	322	122	57	18	4	21
146 50	100	30	13	7	0	203	110	51	5	8	42	263	117	59	7	5	54	323	123	1	38	4	20
147 00	100	37	12	6	59	204	110	59	43	8	38	264	118	5	0	5	53	324	123	5	57	4	19
147 50	100	44	8	6	56	205	111	8	18	8	35	265	118	10	50	5	50	325	123	10	15	4	18
148 00	100	51	3	6	55	206	111	16	49	8	31	266	118	16	39	5	49	326	123	14	32	4	17
148 50	100	57	55	6	52	207	111	25	17	8	28	267	118	22	25	5	46	327	123	18	48	4	16
149 00	101	4	45	6	50	208	111	33	40	8	23	268	118	28	10	5	45	328	123	23	2	4	14
149 50	101	11	33	6	48	209	111	42	0	8	20	269	118	33	52	5	42	329	123	27	15	4	13
150 00	101	18	20	6	47	210	111	50	17	8	17	270	118	39	33	5	41	330	123	31	27	4	12

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.
330	123	31	27	4	11
331	123	35	38	4	10
332	123	39	48	4	8
333	123	43	56	4	8
334	123	48	4	4	6
335	123	52	10	4	6
336	123	56	16	4	4
337	124	0	20	4	3
338	124	4	23	4	2
339	124	8	25	4	1
340	124	12	26	4	0
341	124	16	26	3	59
342	124	20	25	3	58
343	124	24	23	3	56
344	124	28	19	3	56
345	124	32	15	3	55
346	124	36	10	3	54
347	124	40	4	3	53
348	124	43	57	3	51
349	124	47	48	3	51
350	124	51	39	3	50
351	124	55	29	3	48
352	124	59	17	3	48
353	125	3	5	3	47
354	125	6	52	3	46
355	125	10	38	3	45
356	125	14	23	3	44
357	125	18	7	3	43
358	125	21	50	3	42
359	125	25	32	3	41
360	125	29	13	3	41
361	125	32	54	3	39
362	125	36	33	3	38
363	125	40	11	3	38
364	125	43	49	3	37
365	125	47	26	3	35
366	125	51	1	3	35
367	125	54	36	3	34
368	125	58	10	3	34
369	126	1	44	3	32
370	126	5	16	3	31
371	126	8	47	3	31
372	126	12	18	3	30
373	126	15	48	3	29
374	126	19	17	3	28
375	126	22	45	3	27
376	126	26	12	3	28
377	126	29	38	3	26
378	126	33	4	3	25
379	126	36	29	3	24
380	126	39	53	3	23
381	126	43	16	3	23
382	126	46	39	3	21
383	126	50	0	3	21
384	126	53	21	3	20
385	126	56	41	3	19
386	127	0	0	3	19
387	127	3	19	3	18
388	127	6	37	3	17
389	127	9	54	3	16
390	127	13	10		

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.
390	127	13	10	3	15
391	127	16	25	3	15
392	127	19	40	3	14
393	127	22	54	3	13
394	127	26	7	3	13
395	127	29	20	3	12
396	127	32	32	3	11
397	127	35	43	3	10
398	127	38	53	3	10
399	127	42	3	3	9
400	127	45	12	3	8
401	127	48	20	3	7
402	127	51	27	3	7
403	127	54	34	3	6
404	127	57	40	3	6
405	128	0	46	3	5
406	128	3	51	3	4
407	128	6	55	3	3
408	128	9	58	3	3
409	128	13	1	3	2
410	128	16	3	3	2
411	128	19	5	3	1
412	128	22	6	3	0
413	128	25	6	2	59
414	128	28	5	2	59
415	128	31	4	2	58
416	128	34	2	2	58
417	128	37	0	2	57
418	128	39	57	2	56
419	128	42	53	2	56
420	128	45	49	2	55
421	128	48	44	2	54
422	128	51	38	2	54
423	128	54	32	2	53
424	128	57	25	2	53
425	129	0	18	2	52
426	129	3	10	2	51
427	129	6	1	2	51
428	129	8	52	2	50
429	129	11	42	2	50
430	129	14	32	2	49
431	129	17	21	2	48
432	129	20	9	2	48
433	129	22	57	2	48
434	129	25	45	2	46
435	129	28	31	2	46
436	129	31	17	2	46
437	129	34	3	2	45
438	129	36	48	2	44
439	129	39	32	2	44
440	129	42	16	2	44
441	129	45	0	2	43
442	129	47	43	2	42
443	129	50	25	2	42
444	129	53	7	2	41
445	129	55	48	2	41
446	129	58	29	2	40
447	130	1	9	2	39
448	130	3	48	2	39
449	130	6	27	2	39
450	130	9	6		

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.
450	130	9	6	2	38
451	130	11	44	2	37
452	130	14	21	2	37
453	130	16	58	2	37
454	130	19	35	2	36
455	130	22	11	2	35
456	130	24	46	2	35
457	130	27	21	2	34
458	130	29	55	2	34
459	130	32	29	2	34
460	130	35	3	2	33
461	130	37	36	2	32
462	130	40	8	2	32
463	130	42	40	2	31
464	130	45	11	2	31
465	130	47	42	2	31
466	130	50	13	2	30
467	130	52	43	2	30
468	130	55	13	2	28
469	130	57	41	2	29
470	131	0	10	2	28
471	131	2	38	2	28
472	131	5	6	2	27
473	131	7	33	2	27
474	131	10	0	2	26
475	131	12	26	2	26
476	131	14	52	2	26
477	131	17	18	2	25
478	131	19	43	2	24
479	131	22	7	2	24
480	131	24	31	2	24
481	131	26	55	2	23
482	131	29	18	2	22
483	131	31	40	2	23
484	131	34	3	2	22
485	131	36	25	2	21
486	131	38	46	2	21
487	131	41	7	2	20
488	131	43	27	2	20
489	131	45	47	2	20
490	131	48	7	2	19
491	131	50	26	2	19
492	131	52	45	1	19
493	131	55	4	2	18
494	131	57	22	2	17
495	131	59	39	2	17
496	132	1	56	2	17
497	132	4	13	2	17
498	132	6	30	2	16
499	132	8	46	2	15
500	132	11	1	2	15
501	132	13	16	2	15
502	132	15	31	2	15
503	132	17	46	2	14
504	132	20	0	2	13
505	132	22	13	2	13
506	132	24	26	2	13
507	132	26	39	2	12
508	132	28	51	2	12
509	132	31	3	2	12
510	132	33	15		

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.
510	132	33	15	2	11
511	132	35	26	2	11
512	132	37	37	2	11
513	132	39	48	2	10
514	132	41	58	2	10
515	132	44	8	2	9
516	132	46	17	2	9
517	132	48	26	2	9
518	132	50	35	2	8
519	132	52	43	2	8
520	132	54	51	2	8
521	132	56	59	2	7
522	132	59	6	2	7
523	133	1	13	2	6
524	133	3	19	2	6
525	133	5	25	2	6
526	133	7	31	2	5
527	133	9	36	2	5
528	133	11	41	2	5
529	133	13	46	2	4
530	133	15	50	2	4
531	133	17	54	2	4
532	133	19	58	2	3
533	133	22	1	2	3
534	133	24	4	2	3
535	133	26	7	2	2
536	133	28	9	2	2
537	133	30	11	2	2
538	133	32	13	2	1
539	133	34	14	2	1
540	133	36	15	2	1
541	133	38	16	2	0
542	133	40	16	2	0
543	133	42	16	2	0
544	133	44	16	1	59
545	133	46	15	1	59
546	133	48	14	1	59
547	133	50	13	1	58
548	133	52	11	1	58
549	133	54	9	1	58
550	133	56	7	1	58
551	133	58	5	1	57
552	134	0	2	1	57
553	134	1	59	1	56
554	134	3	55	1	56
555	134	5	51	1	56
556	134	7	47	1	55
557	134	9	42	1	56
558	134	11	38	1	56
559	134	13	33	1	54
560	134	15	27	1	55
561	134	17	22	1	54
562	134	19	16	1	53
563	134	21	9	1	54
564	134	23	3	1	53
565	134	24	56	1	53
566	134	26	49	1	53
567	134	28	42	1	52
568	134	30	34	1	52
569	134	32	26	1	51
570	134	34	17		

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Différ. M.	S.
570	134	34	17		
571	134	36	9	1	52
572	134	38	0	1	51
573	134	39	51	1	51
574	134	41	41	1	50
575	134	43	32	1	51
576	134	45	22	1	50
577	134	47	11	1	49
578	134	49	1	1	50
579	134	50	50	1	49
580	134	52	39	1	49
581	134	54	27	1	48
582	134	56	16	1	49
583	134	58	4	1	48
584	134	59	51	1	47
585	135	1	39	1	48
586	135	3	26	1	47
587	135	5	13	1	47
588	135	7	0	1	47
589	135	8	46	1	46
590	135	10	32	1	46
591	135	12	18	1	46
592	135	14	4	1	46
593	135	15	49	1	45
594	135	17	35	1	46
595	135	19	20	1	45
596	135	21	4	1	44
597	135	22	48	1	44
598	135	24	32	1	44
599	135	26	16	1	44
600	135	28	0	1	44
605	135	36	34	8	34
610	135	45	2	8	28
615	135	53	24	8	22
620	136	1	40	8	16
625	136	9	50	8	10
630	136	17	54	8	4
635	136	25	53	7	59
640	136	33	46	7	53
645	136	41	34	7	48
650	136	49	16	7	42
655	136	56	53	7	37
660	137	4	25	7	32
665	137	11	53	7	28
670	137	19	16	7	23
675	137	26	33	7	17
680	137	33	45	7	12
685	137	40	53	7	8
690	137	47	57	7	4
695	137	54	56	6	59
700	138	1	51	6	55
705	138	8	42	6	51
710	138	15	28	6	46
715	138	22	10	6	42
720	138	28	48	6	38
725	138	35	22	6	34
730	138	41	51	6	29
735	138	48	17	6	26
740	138	54	40	6	23
745	139	0	59	6	19
750	139	7	14	6	15

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Différ. M.	S.
750	139	7	14		
755	139	13	26	6	12
760	139	19	34	6	8
765	139	25	38	6	4
770	139	31	39	6	1
775	139	37	37	5	58
780	139	43	31	5	54
785	139	49	22	5	51
790	139	55	9	5	47
795	140	0	54	5	44
800	140	6	35	5	41
810	140	17	48	11	13
820	140	28	50	11	2
830	140	39	39	10	49
840	140	50	18	10	39
850	141	0	45	10	27
860	141	11	2	10	17
870	141	21	9	10	7
880	141	31	5	9	56
890	141	40	52	9	47
900	141	50	30	9	38
910	141	59	58	9	28
920	142	9	17	9	19
930	142	18	28	9	11
940	142	27	30	9	2
950	142	36	24	8	54
960	142	45	10	8	46
970	142	53	48	8	38
980	143	2	19	8	31
990	143	10	42	8	23
1000	143	18	57	8	15
1010	143	27	6	8	9
1020	143	35	7	8	1
1030	143	43	2	7	55
1040	143	50	51	7	49
1050	143	58	33	7	42
1060	144	6	8	7	35
1070	144	13	38	7	30
1080	144	21	1	7	23
1090	144	28	19	7	18
1100	144	35	31	7	12
1110	144	42	37	7	6
1120	144	49	38	7	1
1130	144	56	34	6	56
1140	145	3	24	6	50
1150	145	10	9	6	45
1160	145	16	49	6	40
1170	145	23	25	6	36
1180	145	29	55	6	30
1890	145	36	21	6	26
1200	145	42	42	6	21
1210	145	48	59	6	17
1220	145	55	11	6	12
1230	146	1	19	6	8
1240	146	7	22	6	3
1250	146	13	22	6	0
1260	146	19	17	5	55
1270	146	25	9	5	52
1280	146	30	56	5	47
1290	146	36	40	5	44
1300	146	42	20	5	40

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Différ. M.	S.
1300	146	42	20		
1310	146	47	56	5	36
1320	146	53	28	5	32
1330	146	58	57	5	29
1340	147	4	22	5	25
1350	147	9	45	5	23
1360	147	15	3	5	18
1370	147	20	18	5	15
1380	147	25	30	5	12
1390	147	30	39	5	9
1400	147	35	45	5	6
1410	147	40	48	5	3
1420	147	45	47	4	59
1430	147	50	44	4	57
1440	147	55	38	4	54
1450	148	0	28	4	50
1460	148	5	16	4	48
1470	148	10	2	4	46
1480	148	14	44	4	42
1490	148	19	24	4	40
1500	148	24	1	4	37
1510	148	28	35	4	34
1520	148	33	7	4	32
1530	148	37	37	4	30
1540	148	42	4	4	27
1550	148	46	28	4	24
1560	148	50	50	4	22
1570	148	55	10	4	20
1580	148	59	27	4	17
1590	149	3	42	4	15
1600	149	7	55	4	13
1610	149	12	6	4	11
1620	149	16	14	4	8
1630	149	20	20	4	6
1640	149	24	24	4	4
1650	149	28	26	4	2
1660	149	32	26	4	0
1670	149	36	24	3	58
1680	149	40	20	3	56
1690	149	44	14	3	54
1700	149	48	6	3	52
1710	149	51	56	3	50
1720	149	55	44	3	48
1730	149	59	31	3	47
1740	150	3	15	3	44
1750	150	6	58	3	43
1760	150	10	39	3	41
1770	150	14	18	3	39
1780	150	17	56	3	38
1790	150	21	31	3	35
1800	150	25	5	3	34
1810	150	28	37	3	32
1820	150	32	8	3	31
1830	150	35	37	3	29
1840	150	39	5	3	28
1850	150	42	30	3	25
1860	150	45	55	3	25
1870	150	49	18	3	23
1880	150	52	39	3	21
1890	150	55	59	3	20
1900	150	59	17	3	18

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Différ. M.	S.
1900	150	59	17		
1910	151	2	34	3	17
1920	151	5	49	3	15
1930	151	9	3	3	14
1940	151	12	15	3	12
1950	151	15	26	3	11
1960	151	18	36	3	10
1970	151	21	44	3	8
1980	151	24	51	3	7
1990	151	27	57	3	6
2000	151	31	2	3	5
2020	151	37	8	6	6
2040	151	43	8	6	0
2060	151	49	3	5	55
2080	151	54	53	5	50
2100	152	0	38	5	45
2120	152	6	19	5	41
2140	152	11	55	5	36
2160	152	17	27	5	32
2180	152	22	55	5	28
2200	152	28	19	5	24
2220	152	33	39	5	20
2240	152	38	54	5	15
2260	152	44	6	5	12
2280	152	49	14	5	8
2300	152	54	18	5	4
2320	152	59	18	5	0
2340	153	4	15	4	57
2360	153	9	9	4	54
2380	153	13	59	4	50
2400	153	18	45	4	46
2420	153	23	28	4	43
2440	153	28	8	4	40
2460	153	32	45	4	37
2480	153	37	18	4	33
2500	153	41	48	4	30
2520	153	46	15	4	27
2540	153	50	39	4	24
2560	153	55	1	4	22
2580	153	59	20	4	19
2600	154	3	36	4	16
2620	154	7	49	4	13
2640	154	12	0	4	11
2660	154	16	8	4	8
2680	154	20	14	4	6
2700	154	24	17	4	3
2720	154	28	17	4	0
2740	154	32	15	3	58
2760	154	36	10	3	55
2780	154	40	3	3	53
2800	154	43	54	3	51
2820	154	47	43	3	49
2840	154	51	30	3	47
2860	154	55	14	3	44
2880	154	58	56	3	42
2900	155	2	36	3	40
2920	156	6	14	3	38
2940	155	9	50	3	36
2960	155	13	23	3	33
2980	155	16	54	3	31
3000	155	20	23	3	29

Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.	Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.	Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Differ. M.	S.	Jours.	Anomalie vraie. D.	M.	S.	Diff. M.	S.
3000	155	20	23	8	37	4700	158	55	38	4	38	6800	161	27	15	5	35	10200	163	51	48	3	14
3050	155	29	0	8	26	4750	159	0	16	4	34	6900	161	32	50	5	29	10300	163	55	2	3	10
3100	155	37	26	8	14	4800	159	4	50	4	29	7000	161	38	19	5	21	10400	163	58	12	3	9
3150	155	45	40	8	3	4850	159	9	19	4	26	7100	161	43	40	5	15	10500	164	1	21	3	6
3200	155	53	43	7	52	4900	159	13	45	4	22	7200	161	48	55	5	9	10600	164	4	27	3	4
3250	156	1	35	7	42	4950	159	18	7	4	19	7300	161	54	4	5	4	10700	164	7	31	3	1
3300	156	9	17	7	31	5000	159	22	26	4	15	7400	161	59	8	4	59	10800	164	10	32	2	59
3350	156	16	48	7	22	5050	159	26	41	4	12	7500	162	4	7	4	54	10900	164	13	31	2	57
3400	156	24	10	7	13	5100	159	30	53	4	8	7600	162	9	1	4	48	11000	164	16	28	2	54
3450	156	31	23	7	4	5150	159	35	1	4	5	7700	162	13	49	4	43	11100	164	19	22	2	53
3500	156	38	27	6	56	5200	159	39	6	4	2	7800	162	18	32	4	39	11200	164	22	15	2	50
3550	156	45	23	6	47	5250	159	43	8	4	0	7900	162	23	11	4	34	11300	164	25	5	2	49
3600	156	52	10	6	39	5300	159	47	8	3	57	8000	162	27	45	4	29	11400	164	27	54	2	47
3650	156	58	49	6	33	5350	159	51	5	3	54	8100	162	32	14	4	25	11500	164	30	41	2	45
3700	157	5	22	6	26	5400	159	54	59	3	52	8200	162	36	39	4	20	11600	164	33	26	2	42
3750	157	11	48	6	19	5450	159	58	51	3	48	8300	162	40	59	4	16	11700	164	36	8	2	40
3800	157	18	7	6	13	5500	160	2	39	3	45	8400	162	45	15	4	11	11800	164	38	48	2	39
3850	157	24	20	6	7	5550	160	6	24	3	42	8500	162	49	26	4	8	11900	164	41	27	2	37
3900	157	30	27	6	2	5600	160	10	6	3	39	8600	162	53	34	4	3	12000	164	44	4	24	39
3950	157	36	29	5	55	5650	160	13	45	3	37	8700	162	57	37	4	0	13000	165	8	43	22	11
4000	157	42	24	5	49	5700	160	17	22	3	34	8800	163	1	37	3	56	14000	165	30	55	20	10
4050	157	48	13	5	43	5750	160	20	56	3	32	8900	163	5	33	3	52	15000	165	51	5	18	15
4100	157	53	56	5	37	5800	160	24	28	3	29	9000	163	9	25	3	48	16000	166	9	30	16	55
4150	157	59	33	5	31	5850	160	27	57	3	27	9100	163	13	14	3	46	17000	166	26	25	15	38
4200	158	5	4	5	26	5900	160	31	24	3	24	9200	163	17	0	3	43	18000	166	42	3	14	29
4250	158	10	30	5	21	5950	160	34	48	3	22	9300	163	20	43	3	39	19000	166	56	32	13	30
4300	158	15	51	5	15	6000	160	38	10	6	37	9400	163	24	22	3	36	20000	167	10	2	98	39
4350	158	21	6	5	10	6100	160	44	47	6	28	9500	163	27	58	3	33	30000	168	48	41	62	3
4400	158	26	16	5	5	6200	160	51	15	6	19	9600	163	31	31	3	30	40000	169	50	44	44	5
4450	158	31	21	5	1	6300	160	57	34	6	12	9700	163	35	1	3	27	50000	170	34	49	33	36
4500	158	36	22	4	56	6400	161	3	46	6	3	9800	163	38	28	3	24	60000	171	8	25	26	49
4550	158	41	18	4	51	6500	161	9	49	5	56	9900	163	41	52	3	21	70000	171	35	14	22	7
4600	158	46	9	4	47	6600	161	15	45	5	48	10000	163	45	13	3	19	80000	171	57	21	18	43
4650	158	50	56	4	42	6700	161	21	33	5	42	10100	163	48	32	3	16	90000	172	16	4	16	5
4700	158	55	38			6800	161	27	15			10200	163	51	48			100000	172	32	9		

EXEMPLE pour la Table générale.

CONNOISSANT la distance périhélie d'une Comète 0,5849, on demande l'anomalie vraie qu'elle doit avoir 49 jours 18 heures 55′ 20″ avant ou après son périhélie (3041); on réduit les 18 heures en décimales par la premiere Table , & l'on a 0,7500, les 55′ font 0,0382; les 20″ font 0,0002, ainsi l'on a en total 49ʲ 7884. On suppose la moyenne distance du soleil à la terre égale à l'unité (3042).

Logarithme de la distance périphélie 0,5849.................... 9,7670816.
Moitié du même Logarithme.......................... 9,8835408.

Trois demies du Logarithme de la distance périphélie............ 9,6506224.
Il faut les ôter du Logarithme des jours donnés 49,7884.......... 1,6971282.

Il reste la différence, ou le Log. des jours de la Table 111 jours, 3282... 2,0465058.

A 111 jours répondent 90° 28′ 42″ d'anomalie vraie, la différence est 10′ 15″; or 5000 : 10′ 15″ :: 3282 : 6′ 44″, donc l'anomalie vraie sera 90° 35′ 26″ pour le temps proposé, 49 jours & $\frac{7884}{10000}$ ou 49ʲ 18ʰ 55′ 20″ avant & après le passage au périhélie.

Cette table conſtruite d'abord par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1746), étoit plus commode & plus ample que celle de M. Halley, mais elle vient d'être encore vérifiée, corrigée & augmentée conſidérablement par M. DE CHALIGNY, habile calculateur que j'ai cité plusieurs fois dans cet ouvrage. Je n'ai pas mis dans cette table les logarithmes pour la diſtance, comme faiſoit M. Halley, parce qu'avec l'anomalie vraie & la diſtance périhélie d'une comète il eſt aiſé de trouver ſa diſtance au ſoleil (3042).

3053. La première partie du problême des comètes conſiſte à trouver pluſieurs paraboles qui ſatisfaſſent à deux obſervations (3051), c'eſt-à-dire, avec leſquelles ont ait les mêmes longitudes & latitudes que par obſervation, & l'intervalle de temps obſervé entre ces deux poſitions de la comête; mais parce que ce problême eſt indéterminé, & qu'il a une infinité de ſolutions, on ſuppoſe les diſtances de la comète au ſoleil, telles que *SG* & *SH* (*fig.* 263 & 264), données pour le temps des deux obſervations, & avec ces diſtances on trouve les dimenſions d'une parabole qui ſatisfait aux deux obſervations faites quand la terre étoit en *A* & en *B*. *Fig.* 263 & 264.

3054. Lorſqu'on ſuppoſe d'autres valeurs pour les diſtances *SG* & *SH* de la comète au ſoleil, on trouve les dimenſions d'une autre parabole qui ſatisfait encore aux deux premieres obſervations; & c'eſt entre pluſieurs de ces paraboles qu'on choiſit enſuite celle qui doit convenir à la troiſième obſervation, faite quand la terre étoit en *C*; alors on eſt sûr d'avoir trouvé la parabole qui ſatisfait aux trois obſervations, & qui repréſente le cours de la comète, ou du moins qui en approche beaucoup. On trouve ſouvent des erreurs de 3 ou 4′ dans le calcul des autres obſervations que l'on compare avec une parabole ainſi déterminée, ſoit parce que la route véritable de la comète n'eſt une parabole qu'à peu-près (3024), ſoit parce que les obſervations des comètes ne ſont exactes fort ſouvent qu'à 2′ près.

3055. Les aſtronomes trouveront ici la ſuite de tou-

Fig. 263, 264. tes les règles qu'il faut suivre, & de toutes les analogies qu'il faut faire pour calculer une orbite; l'exemple sera expliqué séparément (3071).

Premiere Hypothése. Je suppose une quantité quelconque (3047) pour la distance *GS* de la comète au soleil réduite à l'écliptique, ensorte que le point *G* soit la projection de la comète sur l'écliptique au temps de la première observation; l'on connoît par observation l'angle d'élongation *SAG* (3046); & par les tables la distance *AS* du soleil à la terre, on cherchera l'angle à la comète ou l'angle *G* de la parallaxe annuelle, par l'analogie suivante.

La dist. supposée GS *de la comète au sol. dans la* 1ere *observ.*
Est au sinus de l'élongation observée GAS.
Comme la distance AS *du soleil à la terre*,
Est au sinus de l'angle AGS, *au centre de la comète.*

Angle à la comète. Cet angle peut être pris tel qu'on le trouvera dans la table des sinus; ou bien on emploira le supplément de la quantité trouvée, si l'on veut supposer obtus l'angle *SgA* (3071). On ajoutera l'angle *AGS* avec l'angle d'élongation *GAS*, & le supplément de la somme sera l'angle de commutation *GSA*, qui ôté du lieu de la terre *A*, (qui est toujours plus grand de six signes que celui du soleil), ou ajouté si la ligne *SG* étoit plus orientale que la ligne *SA*, donnera la longitude héliocentrique de la comète, sur la ligne *SG*.

3056. On trouvera ensuite sa latitude héliocentrique (1145).

Le sinus de l'angle d'élongation observé GAS,
Est au sinus de l'angle de commutation GSA,
Latitude héliocentrique. *Comme la tang. de la latit. géocen. de la comète, observée*,
Est à la tang. de la latitude hélioc. de la comète.

Première supposition. 3057. Ayant fait les mêmes opérations pour la seconde observation, avec *SH* supposée à volonté d'une certaine quantité, & l'angle *SBH*, qui est la seconde élongation observée; l'on aura la longitude & la latitude héliocentrique du point *H*, ou de la comète dans la seconde observation. Ayant ainsi deux longitudes de la comète,

vues du ſoleil, on aura leur différence qui eſt le mouvement héliocentrique réduit à l'écliptique dans l'intervalle des deux obſervations ; il faut en conclure le mouvement ſur l'orbite. Soit *NMO* (*fig.* 265) l'écliptique, *NQR* l'orbite, *P* le pole de l'écliptique, *Q* & *R* les deux poſitions de la comète vues du ſoleil, *OQ* & *MR* les deux latitudes trouvées par les calculs précédens, *OM* le mouvement de la comète ſur l'écliptique vu du ſoleil, ou la différence des longitudes héliocentriques trouvées ; il s'agit d'avoir le mouvement *RQ* ſur l'orbite de la comete ; on fera les deux analogies ſuivantes (3696), & l'on obſervera, ſi les angles ſont fort petits, de mettre une très-grande préciſion dans le calcul. Mouvement ſur l'écliptique. *Fig.* 265.

Le ſinus total,
Eſt au coſinus de l'angle P *mouv. ſur l'écliptique ;*
Comme la cotang. de la plus grande latitude OQ.
Eſt à la tangente du premier ſegment PX.

On retranchera ce ſegment, du complément *PR* de la plus petite latitude héliocentrique calculée, & l'on aura l'autre ſegment *RX*. Si l'angle *P* étoit obtus, il faudroit ajouter *PX* avec *PR* pour avoir *RX*.

Le coſinus du premier ſegment PX,
Eſt au coſinus du ſecond ſegment RX,
Comme le ſinus de la plus grande des deux latitudes QO, Mouvement ſur l'orbite.
Eſt au coſin. du mouv. QR *de la comète ſur ſon orbite.*

On prendra le quart de ce mouvement.

Si l'une des deux latitudes étoit boréale & l'autre auſtrale, on mettroit le point *R* au-deſſous de *M*, le nœud *N* ſeroit entre deux, *PR* ſeroit la ſomme de 90° & de la latitude auſtrale.

On remarque ſi la longitude héliocentrique dans la ſeconde obſervation eſt plus grande que dans la première ; car alors la comète eſt *directe* ; ſi la ſeconde eſt la plus petite, la comète eſt rétrograde.

3058. Les diſtances *SG SH* (*fig.* 263 & 264), de la comète au ſoleil qui ſont dans le plan de l'écliptique étant diviſées, chacune par le coſinus de la latitude hélio- Rayons vecteurs. *Fig.* 263 & 264.

centrique correſpondante (3056), donnent les rayons vecteurs ou les diſtances de la comète au ſoleil en ligne droite dans le plan de ſon orbite (1146); on a donc deux rayons vecteurs de la parabole, avec l'angle compris, on trouve le lieu du périhélie par la règle ſuivante (3043). On retranche le logarithme du plus petit rayon vecteur de celui du plus grand; on prend la moitié du reſte, c'eſt le logarithme de la tangente d'un angle, dont il faut ôter 45°; le logarithme de la tangente du reſte, moins le logarithme de la tangente du quart du mouvement (3057), donne le logarithme de la tangente d'un angle, auquel on ajoute le quart du mouvement, pour avoir la moitié de la plus grande anomalie vraie (3043), nous en ferons uſage ci-après (3059); on prend auſſi leur différence & l'on a la plus petite des deux demi-anomalies vraies; en doublant ces quantités, on a les deux anomalies vraies.

Anomalies vraies.

3059. Le logarithme du coſinus de la plus grande des deux moitiés d'anomalie vraie, ajouté deux fois avec celui du plus grand des deux rayons vecteurs, donnera le logarithme de la diſtance périhélie (3042); auquel on ajoutera ſa moitié, pour avoir les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la diſtance périhélie.

Diſtance périhélie.

Les deux anomalies vraies qu'on a trouvées ci-deſſus, ſont du même côté du périhélie quand leur différence eſt égale au mouvement héliocentrique total de la comète ſur ſon orbite (3057); elles ſont l'une avant, & l'autre après le périhélie, quand c'eſt leur ſomme qui fait le mouvement total de la comète. Dans le premier cas, ſi la comète eſt directe, & que la ſeconde anomalie ſoit plus petite que la première, c'eſt une preuve que la comète n'a point encore atteint ſon périhélie; mais ſi l'anomalie qui répond à la première obſervation étoit la plus petite des deux, ce ſeroit une preuve que le périhélie a précédé les deux obſervations. Quand la comète eſt rétrograde, c'eſt la même regle. Dans le ſecond cas, c'eſt-à dire, lorſqu'il a fallu ajouter les deux anomalies pour faire la valeur du mouvement total *QR* de la comète ſur ſon orbite, on eſt aſſuré que le périhélie eſt arrivé dans l'intervalle qu'il y

a eu

a eu entre les deux obſervations; ſi la comète eſt directe, on ſaura que le périhélie eſt plus avancé que la première des deux longitudes héliocentriques trouvées, & qu'elle n'a pas encore paſſé par ſon périhélie au temps de la première obſervation, ce qui ſera néceſſaire dans la ſuite du calcul (*3063*).

3060. Avec les deux anomalies vraies trouvées, on cherchera les jours & millièmes de jours correſpondans, dans la table générale, *pag.* 335; on prendra leur différence ou leur ſomme, ſuivant que les deux anomalies feront d'un ſeul côté ou des deux côtés du périhélie. Pour avoir le véritable intervalle de temps qui convient à l'orbite trouvée, il faut au logarithme de l'intervalle donné par la table ajouter les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la diſtance périhélie (*3040*), & l'on a le logarithme du temps que donne la parabole trouvée, pour l'intervalle entre les deux obſervations; ſi cet intervalle de temps eſt exactement celui qui a été obſervé, c'eſt une preuve que les deux diſtances *SG* & *SH* qu'on a ſuppoſées dans ce calcul donnent une parabole qui ſatisfait à ces deux obſervations, & la première hypothèſe eſt finie. Intervalle de temps.

3061. Mais il arrive preſque toujours que ce nombre de jours n'eſt pas d'accord avec celui qui a été obſervé; alors on ſuppoſe une autre diſtance *SH* dans la ſeconde obſervation; on conſerve la première diſtance *SG* avec la longitude & la latitude qu'on en a déduites (*3055*, *3056*), & refaiſant tous les calculs des articles *3057* ... *3060*, on a une autre valeur pour l'intervalle de temps entre les deux obſervations. Si cet intervalle approche davantage de celui qui a été obſervé, on reconnoît que la ſeconde ſuppoſition eſt préférable, & l'on fait, s'il eſt néceſſaire, en changeant un peu plus la ſeconde diſtance, une troiſième ſuppoſition, dont on cherche l'erreur. Ainſi par le progrès des erreurs, ou par leur diminution, l'on verra bientôt quelle diſtance *SH* il faut ſuppoſer dans la ſeconde obſervation pour avoir une parabole qui ſatisfaſſe à ces deux obſervations; j'appellerai Seconde ſuppoſition de la première hypothèſe.

cette première parabole qui satisfait aux deux observations, PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Pour former cette hypothèse, j'ai supposé connues les distances accourcies de la planète au soleil, & j'en ai fait varier une jusqu'à ce qu'elles aient formé une parabole assujettie aux deux observations; mais lorsqu'un des angles à la comète approche fort d'être droit la distance accourcie de la terre au soleil qui est opposée à cet angle ne peut servir à le calculer avec précision, parce que les sinus varient trop peu vers 90°; on ne sait pas d'ailleurs s'il faut supposer l'angle aigu ou obtus (3071); pour remédier à cet inconvénient, on pourroit commencer par supposer connu ou l'angle au soleil, ou l'angle à la comète, c'est-à-dire, supposer le lieu héliocentrique de la comète, au lieu de le calculer d'après la distance, comme dans l'article 3055. On peut voir un procédé semblable dans ma *théorie des comètes* (*pag.* 116) appliqué à la comète de 1757, où cette difficulté pouvoit avoir lieu.

Il est quelquefois commode pour lors de prendre une distance réduite pour former les hypothèses, & un angle de commutation qui répond à l'autre distance pour former les différentes suppositions que renferme cette hypothèse : c'est ainsi que je l'ai pratiqué pour la comète de 1769.

Lorsque le mouvement héliocentrique trouvé (3057) a produit un intervalle de jours, trop grand; on peut juger aussi du moins en général qu'il faut diminuer ce mouvement héliocentrique, & par conséquent la seconde longitude (si la comète est directe) pour se rapprocher de l'intervalle donné, & former la seconde supposition.

Enfin il arrivera quelquefois que soit en augmentant soit en diminuant la seconde distance *SH*, on ne pourra parvenir à un intervalle de temps qui approche de l'observation, ce sera une preuve que la première distance *SG* est trop grande ou trop petite; ou qu'il y a quelque contradiction dans les suppositions.

3062. Lorsqu'on a une première hypothèse com-

plète, ou une parabole qui satisfait à deux observations, on auroit la véritable orbite cherchée, si elle satisfaisoit également à la troisième observation; mais on ne rencontre jamais cette exactitude dans une première hypothèse, & l'on est obligé d'en faire plusieurs autres (*3069*); cependant on éprouve d'abord si la première hypothèse convient à la 3e observation, comme nous allons le dire avant que de passer à une 2e hypothèse; (*3069*), parce que le sens dans lequel est l'erreur, suffit à un astronome exercé pour juger si l'on doit augmenter ou diminuer la distance *SG* pour former la deuxième hypothèse.

3063. LA TROISIEME OBSERVATION calculée dans cette hypothèse ou dans cette parabole trouvée nous fera connoître si elle approche de la vérité. Pour calculer cette troisième observation, il faut d'abord trouver le temps du passage au périhélie, l'inclinaison sur l'écliptique, le lieu du nœud, & celui du périhélie sur l'orbite. Calcul des élémens.

Avec l'un des deux nombres de jours qu'on a trouvés par les deux anomalies vraies (3060), par exemple, celui qui convient à la première observation, on cherchera dans la table générale le nombre des jours correspondans; le logarithme de ce nombre de jours ajouté avec les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie donnera celui du véritable intervalle de temps (3040) écoulé entre la première observation & le passage au périhélie; on ajoutera ce nombre de jours avec le temps de l'observation, si elle a été faite avant le périhélie (3059), l'on aura le temps du passage au périhélie dans chaque parabole. Il est bon de faire le même calcul par les deux nombres de jours, pour savoir si l'on trouve par chacun la même heure & la même minute pour le passage au périhélie. Passage au périhélie.

3064. Le lieu du nœud *N* (*fig. 265*), & l'angle d'inclinaison *RNM* se trouveront par le moyen du triangle *PQR*, dont nous avons déja fait usage (3057), & du triangle *RMN*, en faisant les analogies suivantes: *Fig. 265.*

I. *Le sinus du segment* RX,
Est au sinus du segment PX,
Comme la tang. de l'angle P *ou du mouvement sur l'éclipt.*
Est à la tangente de l'angle R (3693).

II. *Le rayon*
Est au sinus de la plus petite latitude RM;
Comme la tangente de l'angle R
Est à la tang. de la dist. au nœud, NM *sur l'éclipt.* (3667).

III. *Le rayon*
Est au sinus de l'angle R;
Comme le cosinus de la plus petite latitude RM
Inclinaison. *Est au cosinus de l'inclinaison, ou de l'angle* N (3669).

IV. *Le sinus de l'inclinaison* N
Est au sinus de la plus petite latitude RM;
Comme le rayon
Est au sinus de la dist. au nœud NR *sur l'orbite* (3665).

3065. La distance au nœud comptée sur l'écliptique, où l'arc *MN* s'ajoute avec la longitude héliocentrique du point *M* sur l'écliptique, si la comète est directe, & que sa latitude héliocentrique soit décroissante; ou si elle est rétrograde & que sa latitude aille en croissant, il se retranche dans les autres cas, & l'on a la longitude du nœud *N*. Ce sera le nœud ascendant si *RM* est une latitude boréale croissante, ou australe décroissante; ce sera le nœud descendant si la latitude est boréale décroissante, ou australe croissante.

Lieu du nœud.

Si le mouvement de la comète surpassoit six signes ou 180°, comme cela est arrivé souvent, & spécialement en 1769, on prendroit pour l'angle *P* ce qui manqueroit pour aller à 12 signes, & pour faire la figure de manière a ne pas se tromper dans le calcul, on supposeroit, non pas que la comète a été de *Q* en *R* selon l'ordre des signes, l'occident étant toujours à droite; mais que la comète a été d'abord en *R*, & qu'ensuite ayant tourné par-dessous la figure, elle est revenue en *Q* pour la seconde observation. Si elle étoit rétrograde ce seroit le contraire.

Il ſera bon de chercher auſſi le lieu du nœud *N* par le moyen de la longitude du point *O*, afin de voir ſi l'on trouvera pour le nœud la même longitude. Pour cela on ajoutera *MO* avec *MN* (à moins que le point *N* ne ſoit au milieu) pour avoir *NO*, qu'on ajoutera avec la longitude héliocentrique du point *O*, ou que l'on ôtera ſuivant les cas que je viens de détailler.

3066. Pour avoir la longitude du périhélie, on ajoutera la longitude du nœud *N* avec *NR*, ſi le nœud eſt moins avancé que la longitude héliocentrique du point *M*, & l'on aura la longitude du point *R* ſur l'orbite de la comète. On y ajoutera l'anomalie de la comète pour l'obſervation *R*, ſi la comète étant directe n'avoit pas encore paſſé ſon périhélie lorſqu'elle étoit en *R*, ou ſi étant rétrograde elle l'avoit déja paſſé (3059); dans les autres cas on retranchera l'anomalie de la longitude du point *R*, & l'on aura le lieu du périhélie, qui ſe compte toujours ſur l'orbite de la comète, ainſi que les longitudes des autres planètes (1132), chacune ſur leur orbite. Lieu du périhélie.

On fera bien de chercher également le lieu du périhélie par l'obſervation faite en *Q*; ſi le réſultat eſt exactement le même par les deux obſervations, on ſera sûr de ne s'être point trompé dans les ſignes de toutes les opérations précédentes. On ajoutera donc la longitude du nœud *N* avec *NQ* pour avoir la longitude du point *Q*, & l'on y ajoutera l'anomalie de la comète dans le temps de l'obſervation faite en *Q*, où l'on retranchera ſuivant les cas, on aura le lieu du périhélie.

3067. Nous connoiſſons donc tous les élémens de la parabole, qui ſatisfait à deux obſervations, & nous ſommes en état de calculer dans la même hypothèſe le lieu de la comète vu de la terre pour le temps de la troiſième obſervation, lorſque la terre étoit en *C*, & que la comète étoit en *K*; ce qui ſe fera par les règles ſuivantes. Calcul de la 3e obſervation.

Le logarithme de la différence entre le temps de la 3e obſervation & le temps du paſſage par le périhélie

(3063), moins les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie donnera le logarithme des jours de la table générale, vis-à-vis desquels on trouvera l'anomalie vraie de la comète au temps de la 3e observation; la somme ou la différence entre le lieu du périhélie & l'anomalie vraie de la comète, donnera la longitude vraie de la comète dans la 3e observation comptée sur son orbite; on prendra la somme, si la comète ayant un mouvement direct a déja passé le périhélie au temps de la 3e observation; les autres cas sont faciles à appercevoir. La différence entre cette longitude & celle du nœud (3065), donnera l'argument de latitude. Connoissant l'inclinaison de l'orbite (3064), & l'argument de latitude, on trouvera la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique (1130, ou *pag.* 104 des tables), marquée par la ligne *SK*, & la latitude héliocentrique (1129, ou *pag.* 108 des tables). Elle sera boréale si la comète étant directe à une longitude plus grande que celle de son nœud ascendant, ou plus petite que celle du nœud descendant.

Distance accourcie.

3068. On ajoutera le log. cos. de la latitude hélioc. avec le log. de la distance périhélie (3059), & l'on en ôtera le double du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3042), on aura le log. de la distance accourcie *SK*, dans la troisième observation; si cette distance est plus petite que celle du soleil au même jour, on traitera la comète comme une planète inférieure, & l'on suivra les règles ordinaires que nous avons données dans les tables des planètes, *p.* 104, &c. ou à l'art. 1143. Au moyen de la longitude héliocentrique & de la distance au soleil, on trouvera la longitude & la latitude vues de la terre (1143); elles devroient être d'accord avec celles qu'on a observées, si l'hypothèse étoit exacte; & que la parabole trouvée fût réellement celle que la comète a décrite.

Longitude géocentrique.

3069. Il n'arrive jamais que la 3e observation s'accorde assez bien avec le calcul de la première hypothèse; on passe donc nécessairement à une seconde. On suppose pour la distance *SG*, dans la première observation

une autre quantité plus ou moins grande que celle qu'on avoit ſuppoſée pour la première hypothèſe (3055), & en faiſant ſur la ſeconde diſtance *SH* diverſes ſuppoſitions, on trouve celle qu'il faut prendre pour avoir une ſeconde parabole qui repréſente encore les deux obſervations, & c'eſt la *ſeconde hypothèſe*. On calcule tous les élémens de la comète dans cette ſeconde parabole (3063 & ſuiv.); on cherche auſſi le lieu de la comète vu de la terre pour le temps de la 3e obſervation dans cette ſeconde hypothèſe, ou dans la ſeconde parabole trouvée, & l'on voit quelle eſt l'erreur de cette hypothèſe ou combien elle s'écarte de la troiſième obſervation. Si les erreurs des deux hypothèſes ne ſont que de quelques minutes, on pourra par une ſimple règle de trois, trouver quelles étoient les diſtances réduites *SG* & *SH*, qu'il falloit ſuppoſer; l'on formera une *troiſième hypothèſe* dans laquelle on caculera tous les élémens de la comète (3063, & ſuiv.), & qui ſatisfera également à la troiſième obſervation.

Seconde Hypothése.

Troisieme Hypothése.

Si l'on a un plus grand nombre d'obſervations on pourra les calculer auſſi avec ces mêmes élémens; il eſt abſolument néceſſaire de vérifier ainſi une parabole quand elle eſt calculée, de peur que dans une des trois obſervations qu'on a priſes, il ne ſe ſoit gliſſé quelque erreur, qui produiroit une différence conſidérable dans les élémens qu'on a trouvés. D'ailleurs on parvient quelquefois à repréſenter un mois entier d'obſervations à une ou deux minutes près; & une obſervation plus éloignée différera de dix ou douze minutes du calcul; il eſt donc néceſſaire de calculer un plus grand nombre d'obſervations pour s'aſſurer de la théorie qu'on a trouvée.

Vérification eſſentielle.

3070. Lorſqu'on veut calculer le retour d'une comète, ou connoître ſes élémens avec beaucoup de préciſion, il y a deux conſidérations à employer dans la réduction des obſervations, la parallaxe & l'aberration. Pour avoir la parallaxe d'une comète, il faut avoir ſa diſtance à la terre (1146), & diviſant 9″ par la diſtance de la comète (celle du ſoleil priſe pour unité); l'on a

Parallaxe.

la parallaxe horizontale, & par conséquent la parallaxe en longitude & en latitude pour l'heure de l'observation (1666, 1667). On prendra le nonagésime dans une table (1680), & l'on se contentera de prendre le premier terme (1668) pour la parallaxe de latitude ; si elle n'est pas fort grande.

On appliquera ces parallaxes à la longitude observée, dans un sens contraire à celui que nous avons indiqué (1679), lorsqu'il s'agissoit de trouver la longitude apparente, puisqu'ici c'est la longitude vraie que nous voulons employer. Les comètes qui approchent beaucoup de la terre ont une très-grande parallaxe au point que dans certains cas on pourroit s'en servir pour déterminer avec exactitude celle du soleil ; la comète de 1770 a passé 50 fois plus près de nous que le soleil, elle auroit pu servir à cet usage.

Aberration. L'Aberration des comètes a été expliquée (2852) ; mais elle exige qu'on connoisse la distance & le mouvement diurne géocentrique par le moyen de deux longitudes observées ou calculées. Il faut ajouter l aberration à la longitude observée, quand cette longitude va en croissant. C'est ainsi que toutes les observations, dont on veut se servir pour calculer rigoureusement une orbite, doivent être dégagées des effets qui ne dépendent pas simplement de l'orbite parabolique ou elliptique dont on veut faire le calcul, & qui varient dans le cours d'une seule apparition.

3071. Exemple. Pour faire l'application de ces calculs, je choisirai la comète de 1757, ainsi que je l'avois fait dans la *Théorie* publiée en 1759 ; voici les trois observations dont je me servis pour déterminer son orbite ; j'y négligeai l'aberration & la parallaxe (3070), comme étant ici de trop peu d'importance, sur-tout pour la première ébauche d'une orbite encore inconnue.

J'ai choisi une observation faite aux environs du nœud, & j'ai réduit la longitude au temps où la latitude auroit été nulle ; c'est une attention qui simplifie les calculs, & qu'il est bon d'avoir quand cela est possible.

Temps

Temps moyen à Paris	Longit. de la comète obſervée.	Latitude obſervée.	Lieu du Soleil calculé.	Diſtance du Soleil à la Terre.
Sept. 15 15ʰ 47′	3ˢ 10° 22′	10° 20′ Bor.	5ˢ 23° 23′	1,0042
Sept. 30 6 8	5 1 42	0 0	6 7 42	1,0000
Oct. 12 16 42	5 26 19	3 3½ Auſt.	6 20 1	0,9965

L'intervalle entre les deux premières obſervations eſt de 14ʲ 14ʰ 21′; les 14ʰ 21′ converties en décimales de jour, par la petite table qui eſt à la *pag.* 334, nous allons eſſayer de trouver une parabole qui ſoit aſſujétie aux deux premières longitudes obſervées, & à cet intervalle de temps 14ʲ 60.

Ayant placé le ſoleil en *S* (*fig.* 264), la terre en *A*, & formé l'angle *SAD* égal à l'élongation obſervée de la comète, il s'agit de chercher en quel point *G* de cette ligne doit être placé le lieu de la comète réduit au plan de l'écliptique. Mais nous ne connoiſſons pas, même à peu-près, les dimenſions de l'orbite que nous cherchons; ſuppoſons donc au hazard que la comète, le 15 Septembre, étoit auſſi éloignée du ſoleil que la terre dans ſes diſtances moyennes, ou que la diſtance accourcie *SG* de la comète au ſoleil étoit 1,0000; d'après cette ſuppoſition nous allons déterminer tout le reſte, & chercher d'abord par différens eſſais quelle doit être la diſtance *SH* dans la ſeconde obſervation pour que l'intervalle de 14ʲ 60 puiſſe avoir lieu. Suppoſons, par exemple, *SH* = 0,6000 ou ſix dixièmes de la diſtance moyenne du ſoleil; dans le triangle *ASG*, on connoît *AS* diſtance de la terre au ſoleil, = 1,0042; *SG* diſtance réduite de la comète au ſoleil, *SAG* qui eſt l'élongation obſervée = 2ˢ 13° 1′, ou la différence entre le lieu du ſoleil & le lieu de la comète; on dira donc (3055) 1,0000 : ſin. 73° 1′ : : 1,0042 : ſin. 73° 49′ 23″, c'eſt l'angle *G*, l'angle à la comète, ou la parallaxe annuelle; en l'ajoutant avec l'angle à la terre 73° 1′, & prenant le ſupplément du reſte, on

Fig. 264.

Premiere ſuppoſition.

a l'angle au ſoleil ou l'angle de commutation *ASG*, de $33^\circ\ 9'\ 37''$; qui ajouté avec la longitude de la terre 11^s $23^\circ\ 23'$ toujours oppoſée à celle du ſoleil, donne la longitude héliocentrique de la comète $0^s\ 26^\circ\ 32'\ 37''$. Si la comète étoit plus occidentale ou moins avancée en longitude que la terre *A*, il faudroit retrancher la commutation de la longitude de la terre pour avoir celle de la comète.

Incertitude ſur l'angle à la comète.

L'angle G ou l'angle à la comète peut être aigu, ou obtus; car au lieu du point *G* on pourroit prendre le point *g* tel que *Sg* fût égal à *S G*: les deux conditions de la diſtance au ſoleil, & de l'élongation obſervée ou de l'angle *A*, ne déterminent rien à cet égard, & toutes les fois qu'on a un triangle rectiligne *ASG*, dont deux côtés inégaux ſont donnés, avec l'angle oppoſé à l'un d'eux, le côté oppoſé à cet angle peut toujours avoir deux valeurs égales, *SG*, *Sg*, qui rendront pour le 3e angle *S* des valeurs d'autant plus différentes que l'angle donné ſera plus aigu; cela ne produira dans les calculs aucune incertitude, pourvu que l'on prenne l'angle *G* toujours de même eſpèce dans les différentes ſuppoſitions d'une même hypothèſe; mais le choix que l'on fait de l'un ou de l'autre entre pour beaucoup dans le réſultat; & afin de ne pas s'écarter trop des obſervations, il eſt toujours utile de faire des figures exactes, qui conduiſent le calcul & montrent à peu-près le choix que l'on doit faire des hypothèſes pour en diminuer le tâtonnement; on eſt obligé ſouvent de faire cet angle obtus pour avoir un mouvement aſſez grand, & qui puiſſe ſatisfaire à l'intervalle des jours donnés.

3072. Dans la ſeconde obſervation faite en *H*, l'on dira 0,6000 : ſin. $36^\circ\ 0'$ :: 1,0000 ; ſin. $78^\circ\ 25'\ 9''$ (3055), c'eſt l'angle à la comète, dans la ſeconde obſervation, c'eſt-à-dire *BHS*; mais je ſuppoſerai cet angle obtus pour ne pas avoir un mouvement trop grand, ſans quoi le point *h* dans lequel $Sh = SH$, ſuppoſeroit la comète à une trop grande diſtance; ajoutant donc $101^\circ\ 34'\ 51''$ avec l'élongation obſervée $36^\circ\ 0'\ 0''$; le ſupplément du reſte, ou

42° 25′ 9″, eſt l'angle de commutation, qui ajouté avec la longitude de la terre 7° 42′ 0″, donne la longitude héliocentrique de la comète en *H*, 1^s 20° 7′ 9″, plus grande que la première de 23° 34′ 32″.

Pour trouver la latitude héliocentrique de la comète dans la première obſervation, on fera cette proportion (1.145) : le ſinus de l'angle à la terre 73° 1′, eſt au ſinus de l'angle au ſoleil 33° 9′ 37″, comme la tangente de la latitude géocentrique obſervée 10° 20′, eſt à la tangente de la latitude héliocentrique 5° 57″ 11″.

Pour connoître la diſtance de la comète au ſoleil dans ſon orbite, c'eſt-à-dire, le rayon vecteur, on ôtera du logarithme de la diſtance accourcie, que l'on a ſuppoſée 1, 0000 celui du coſinus de la latitude trouvée, & l'on aura le logarithme du rayon vecteur 0, 00235 pour la première obſervation. On feroit également ces deux opérations pour la ſeconde, ſi l'on n'avoit pu la choiſir dans le nœud même, où il n'y a ni latitude, ni réduction pour la diſtance; ainſi le rayon vecteur *SH* eſt la diſtance même, que l'on a ſuppoſée 0, 6000 (3071).

3073. Pour avoir le mouvement de la comète ſur ſon orbite dans le cas actuel, on formera un triangle *NRM* (*fig.* 265), dans lequel *NM* ſera le mouvement de la comète, vu du ſoleil & réduit à l'écliptique, 23° 34′ 32″, & *MR* la latitude héliocentrique dans la première obſervation, *N* étant le lieu de la ſeconde obſervation; on dira *R* : coſ. *NM* : : coſ. *MR* : coſ. *NR*, & l'on aura le mouvement ſur l'orbite 24° 16′ 26″; c'eſt auſſi la différence des anomalies vraies de la comète dans ces deux obſervations, dont il faut prendre le quart 6° 4′ 6″ $\frac{1}{2}$. Fig. 265.

Si dans la ſeconde obſervation la comète avoit eu une latitude, comme *QO*, on ſe ſerviroit du triangle *PQR*, dans lequel connoiſſant l'angle *P* meſuré par *MO*, égal au mouvement de la comète ſur l'écliptique, avec les diſtances au pole *PR* & *PQ*, on chercheroit le côté *QR*, c'eſt-à-dire, le mouvement ſur l'orbite (3057).

Il y a auſſi des cas où le mouvement vu du ſoleil eſt

très-petit, l'usage des cosinus exposeroit alors à de trop grandes erreurs ; on considère donc le triangle *Q R X*, comme un triangle rectiligne dans lequel *R X* est égal à la différence des latitudes observées, & *Q X* = *P*. sin. *P Q* (892), & l'on cherche l'hypothénuse *Q R* par la trigonométrie rectiligne : c'est ce que j'ai été obligé de faire en calculant l'orbite de la comète de 1769, par les premières observations qu'on avoit faites.

3074. Pour trouver les deux anomalies vraies, l'on prendra la moitié de la différence des logarithmes des deux rayons vecteurs (3043), c'est 0, 11210 qui dans les tangentes répond à 52° 18′ 49″; on en ôtera 45°, & le log. tang. du reste moins le log. tang. du quart du mouvement ou de 6° 4′ 6″ ½, donnera celui de la tang. de 50° 21′ 50″; on en ôtera, & l'on y ajoutera séparément le quart du mouvement, on doublera chaque résultat, & l'on aura les deux anomalies vraies 88° 35′ 27″, & 112° 51′ 53″; la plus petite répond à la plus petite distance, c'est-à-dire, à la seconde observation. Il est aisé de voir que ces deux anomalies sont du même côté du périhélie, puisque c'est leur différence 24° 16′ 26″ qui est le mouvement de la comète ; si c'étoit leur somme il s'en suivroit que le périhélie est entre les points *G* & *H*, (3059).

On prend donc dans la table générale les jours qui répondent à ces deux anomalies, & l'on trouve 105j, 670 & 217j, 674, dont la différence est 112j, 004 ; il faut les convertir en un nombre de jours qui convienne à la comète dont il s'agit.

Le log. cosinus de la moitié d'une des anomalies vraies trouvées, par exemple, celui de 56° 25′ 56″ ½, étant ajouté deux fois à celui de la distance ou du rayon vecteur correspondant 0, 002348, donne le log. de la distance périhélie ; les ³⁄₂ sont 9,231512 : ce log. ajouté avec celui de 112j 004 donne celui de 19j 087 ; c'est le nombre qui devroit être égal à 14j 598 intervalle observé, si la distance 0, 6000 eût été prise telle qu'il convenoit à la première distance 1, 0000 pour représenter l'intervalle

des deux obſervations. Ainſi les diſtances de cette comète au ſoleil étant ſuppoſées 1, 0000 & 0, 6000 avec les longitudes & les latitudes telles qu'elles ont été obſervées (3071); il faudroit qu'il y eût 19 jours d'intervalle, au lieu de 14, pour que la comète eût véritablement décrit une parabole, ſuivant les loix expliquées ci-deſſus. Ce n'eſt donc pas 0, 6000 qu'il falloit ſuppoſer pour la diſtance dans la ſeconde obſervation; il faut prendre une diſtance moins différente de la première pour que le mouvement héliocentrique ſoit moindre, & que l'intervalle de temps qu'on trouvera ſoit moins conſidérable.

Si en diminuant la ſeconde diſtance pour ſe rapprocher de l'intervalle donné, on parvient au point où il n'eſt plus poſſible de faire la proportion qui doit donner l'angle à la comète dans la ſeconde obſervation, ce ſera une preuve que l'hypothèſe ne peut avoir lieu, & il faudra diminuer la première diſtance ſuppoſée, c'eſt-à-dire, former une autre hypothèſe; quelquefois il ſuffit de rendre obtus l'angle à la comète.

3075. Dans notre exemple, il faudra faire une ſeconde ſuppoſition pour la diſtance : ſi l'on ſuppoſe 0,6400, on trouve 15j, 25 intervalle qui eſt encore trop fort.

Troiſième ſuppoſition : ſi la diſtance eſt 0, 6600, on trouve 13j, 96 intervalle qui devient au contraire trop petit.

Quatrième ſuppoſition qui eſt entre les deux précédentes : ſi l'on prend 0, 6525, on trouve 14j, 42, & cet intervalle eſt encore un peu trop petit.

Mais ſi l'on emploie enfin 0, 6496, on trouve 14j, 60 qui eſt l'intervalle obſervé. Dans cette dernière ſuppoſition, on trouve l'angle à la comète 64° 48′, (je me contente d'employer ici les minutes), l'angle au ſoleil 28° 48′, la longitude héliocentrique dans cette ſeconde obſervation 36° 30′, dont ôtant la première longitude 26° 32′ ½, il vient pour le mouvement *MN* ſur l'écliptique 9° 57′ ½; le mouvement *NR* ſur l'orbite ſe trouve 11° 35′; les anomalies 124° 19′ & 135° 54′, le logar.

Dernière ſuppoſition.

de la distance périhélie 9, 15141; les jours correspondans aux anomalies dans la table 341, 54 & 615, 28 l'intervalle 273j, 74; son log. ajouté avec les $\frac{3}{2}$ du log. de la distance périhélie ou 8,72712, donne celui de 14j, 60. Cet intervalle étant le même que dans l'observation, nous avons une première hypothèse exacte, & qui satisfait aux deux premières observations; il ne s'agit plus que de voir combien elle s'écartera de la troisième observation.

On peut remarquer 1°, que cette comète est directe, puisque la seconde longitude héliocentrique est plus grande que la première; 2°, qu'elle n'avoit point encore passé le périhélie dans le temps de ces deux observations, puisque les rayons vecteurs vont en diminuant, & qu'ils sont tous deux du même côté du périhélie (3074).

Élémens dans la 1ere hypothèse.

3076. Pour calculer la 3e observation, dans cette première hypothèse, il faut avoir le nœud, l'inclinaison & le périhélie; le nœud est tout trouvé dans ce cas particulier, puisque la latitude est nulle dans la seconde observation; sa longitude est celle de la comète dans cette observation, c'est-à-dire, 36° 30'.

L'inclinaison se trouvera dans ce cas particulier, en disant: le *sinus* du mouvement *NM* sur l'écliptique 9° 57' $\frac{1}{2}$ est au rayon, comme la tangente de la latitude *MR* dans la première observation, 5° 57' est à la tangente de l'inclinaison *N* = 31° 5'; parce que dans le triangle *NMR* (*fig.* 265), si *NM* est l'écliptique, *R* le lieu de la comète dans la première observation, *N* le lieu de la comète dans son nœud au temps de la seconde observation; il ne s'agit que de résoudre le triangle *NMR*, dans lequel sin. *MN* : *R* : : *T*. *MR* : *T*. *N*. Mais si la comète avoit une latitude dans chacune des deux observations, il faudroit résoudre un triangle *PQR* (3057), & ensuite le triangle *NMR*, pour avoir *MN* & le lieu du nœud.

Fig. 265.

Pour trouver le lieu du périhélie, on ajoutera la longitude de la comète sur son orbite 36° 30' avec l'anomalie qui répond à cette observation 124° 19', & l'on aura 5s 10° 49' pour le lieu du périhélie dans cette hypothèse.

Si l'obſervation étoit arrivée après le périhélie, & que la comète fût également directe, il faudroit retrancher l'anomalie de la longitude, pour avoir le périhélie. Si l'une des longitudes n'étoit pas ſur l'orbite même de la comète, il faudroit l'y réduire en prenant d'abord la diſtance au nœud comptée ſur l'écliptique telle que *NM*, & diſant coſ. *N* : *R* : : tang. *NM* : tang. *NR* (3064). *Fig.* 265.

Il faut avoir encore le temps, où une comète avec ces élémens auroit paſſé par le périhélie dans la même hypothèſe. Pour cela on choiſit un des nombres de jours trouvés ci-deſſus, par exemple, 615j, 28, on le convertit en jours de cette comète (3040), ce qui fait 32j, 823 ou 32j 19h 45′, on ajoute ce temps avec celui de l'obſervation, 15 ſept. 15h 47′, parce qu'elle a précédé le périhélie, & l'on trouve le 18 Octobre 11h 32′ paſſage de la comète par ſon périhélie.

3077. La 3e obſervation qu'il s'agit de calculer fut faite le 12 Octobre à 16h 42′, la diſtance au périhélie eſt de 5j 18h 50′ ou de 5j, 785, on les convertit en jours de la table, en ôtant de ſon log. les $\frac{3}{2}$ de celui de la diſtance périhélie, & l'on a 108j, 440 avec leſquels on trouve dans la table générale 89° 35′ d'anomalie, pour le temps de la troiſième obſervation.

Cette anom. 2s 29° 35′ doit être ôtée du lieu du périhélie, 5s 10° 48′ $\frac{1}{2}$, puiſque la comète n'étoit pas encore à ſon périhélie quoique ſon mouvement fût direct, il reſte la longitude héliocentrique de la comète ſur ſon orbite dans la 3e obſervation, 2s 11° 13′. Pour la réduire à l'écliptique on prend ſa diſtance au nœud le plus proche qui étoit à 36° 30′, cette diſtance 34° 43′ eſt l'argument de latitude, & l'on fait ces deux proportions, *R* : coſ. 31° 5′ : : tang. 34° 43′ : tang. 30° 41′ argument de latitude réduit à l'écliptique ; *R* : ſin. 31° 5′ : : ſin. 34° 43′ : ſin. 17° 6′ latitude héliocentrique dans la 3e obſervation. Puiſque la diſtance au nœud eſt 30° 41′, & que le nœud eſt à 36° 30′ de longitude, il s'enſuit que la longitude réduite à l'écliptique eſt 2s 7° 11′, celle du ſoleil eſt 6s 20° 1′, on la retranchera de celle de la comète ; parce qu'elle eſt

dans le cas des planètes inférieures, sa distance réduite étant plus petite que celle de la terre au soleil, & l'on aura la commutation $7^s\ 17^\circ\ 10'$. (*Voyez les tables*, *pag.* 108, à la fin).

Le log. de la distance périhélie étant ajouté avec celui du cosinus de la latitude $17^\circ 6'$ moins deux fois celui de la demi-anomalie $44^\circ\ 47'\frac{1}{2}$, on a le log. de la distance réduite de la comète au soleil 9,43967; ce logarithme se retranche de celui de la distance du soleil à la terre ou de 0,9965, c'est-à-dire, du log. 9,99848, & il reste celui de la tang. de $74^\circ\ 53'\frac{3}{4}$; on en ôte 45°, & le log. de la tang. du reste ajouté avec celui de la demi-commutation ou de son supplément $66^\circ\ 25'$, donne celui de $52^\circ\ 47'$, cette quantité ôtée de $66^\circ\ 25'$, donne l'élongation de la comète $13^\circ\ 38'$; cette élongation ôtée de la longitude du soleil $6^s\ 20^\circ\ 1'$, donne pour la longitude de la comète calculée dans cette première hypothèse $6^s\ 6^\circ\ 23'$, plus grande de $10^\circ\ 4'$ que la longitude observée $5^s\ 26^\circ\ 19'$.

3078. Ainsi cette première hypothèse dans laquelle nous avions supposé 1,0000 pour la distance de la comète au soleil le 15 Septembre, & dans laquelle nous avons trouvé qu'il falloit supposer 0,6496 pour le 30 Septembre, afin de satisfaire aux deux premières observations, représente fort mal la troisième; il faut donc former une seconde hypothèse dans laquelle les distances soient plus petites & donnent à la comète un mouvement plus petit; par exemple, au lieu de 1,0000, nous supposerons 0,9700 seulement, pour le 15 de Septembre.

Seconde hypothèse.

SECONDE HYPOTHÈSE. La distance de la comète au soleil réduite à l'éclip. dans la 1ère observ. étant supposée 0,9700, il faut faire comme dans la première hypothèse différentes suppositions (3075), pour la distance qui convient à la seconde observation du 15 Septembre; & par de semblables calculs, on trouvera que c'est 0,6587 qu'il faut supposer, le 15 Septembre, pour que ces deux distances donnent une parabole où l'intervalle des deux longitudes observées soit de 14j 60; dans cette seconde hypothèse, on

trouve

trouve le nœud à 34° 52', l'inclinaison 16° 34', le périhélie 4ˢ 11° 24', le paſſage au périhélie pour le 20 Octobre 20ʰ 56', le log. de la diſtance périhélie 9,46517, la longitude pour le 12 Octobre 5ˢ 28° 40', trop grande de 2° 21'. *Fig.* 264.

3079. Ces erreurs en longitude de 10° 4' & de 2° 21', ſont trop grandes pour qu'on puiſſe, par de ſimples parties proportionnelles, eſpérer d'avoir préciſément deux diſtances exactes, c'eſt-à-dire, propres à former une 3ᵉ hypothèſe qui ſatisfaſſe aux trois obſervations; ſi l'on fait cette proportion 7° 43' différence des deux erreurs eſt à 300, différence des deux diſtances, comme la plus petite erreur 2° 21' eſt à 91, & qu'on ôte cette partie proportionnelle de 0,9700, on a 0,9609 pour la diſtance qu'il ſaudroit ſuppoſer; mais ayant formé une nouvelle hypothèſe ſur cette diſtance, on trouve encore une erreur ſenſible dans le calcul de la 3ᵉ obſervation; j'ai reconnu que c'étoit 0,9643 qu'il falloit enfin adopter pour la valeur de *SG*; & par différentes ſuppoſitions, j'ai trouvé que la ſeconde diſtance *SH* = 0,6675 étoit celle qui convenoit à cette 3ᵉ hypothèſe, pour ſatisfaire aux deux premières obſervations.

Erreur de 2° 21'.

3080. TROISIEME HYPOTHÈSE. Avec les deux diſtances *SG*, *SH* 0,9643 & 0,6675, on trouve par les calculs des articles 3071 & ſuiv. les longitudes héliocentriques 15° 31' & 33° 24' $\frac{2}{3}$, les anomalies 107° 12' $\frac{2}{3}$ & 88° 52' le logarithme de la diſtance périhélie 9,53192, & l'intervalle qui répond à la différence des anomalies 14ʲ 600, conforme à l'obſervation. Les nombres de jours qui répondent dans la table générale à ces anomalies étant réduits en jours de la comète, par l'addition des $\frac{3}{2}$ du log. de la diſt. périhélie, donnent 35ʲ, 733 & 21ʲ 132; ces intervalles de temps étant ajoutés aux temps des deux obſervations reſpectivement, donnent chacun ſéparément le paſſage au périhélie pour le 21 Octobre 9ʰ 20'. La ſeconde longitude 33° 24' $\frac{2}{3}$, qui eſt auſſi le lieu du nœud deſcendant, étant comptée ſur l'orbite de la comète, on l'ajoute avec l'anomalie correſpondante 88° 52', & l'on a

Troiſième hypothèſe.

le lieu du périhélie qui se compte toujours sur l'orbite $4^s\ 2^\circ\ 16'\frac{3}{4}$. On la peut trouver également par la première observation, car le mouvement sur l'orbite qui est de $18^\circ\ 20'\frac{2}{3}$, étant ôté de la seconde longitude sur l'orbite, on a la première longitude comptée sur l'orbite de la comète $15^\circ\ 4'$, & en y ajoutant la première anomalie, on trouve $122^\circ\ 16'\frac{3}{4}$ pour le lieu du périhélie.

L'inclinaison se trouve, en disant, le sinus de l'arc *NR* $= 17^\circ\ 53'\frac{2}{3}$, parcouru sur l'orbite depuis la première observation jusqu'à la seconde qui a été faite dans le nœud, est à la tangente de la latitude $MR = 4^\circ\ 6'\frac{1}{2}$, dans la première observation, comme le rayon est à la tangente de $13^\circ\ 9'\frac{1}{3}$, c'est l'inclinaison de l'orbite.

3081. La 3e observation est éloignée du périhélie de $8^j\ 693$, qui réduits en jours de la table, font $43^j, 781$, & répondent à $52^\circ\ 27'\ 25''$ d'anomalie, ainsi la longitude sur l'orbite au temps de la 3e observation est $2^s\ 9^\circ\ 49'\frac{1}{3}$, & le nœud étant $1^s\ 3^\circ\ 24'\frac{2}{3}$, l'argument de latitude sera $36^\circ\ 24'\frac{2}{3}$, on le réduira à l'écliptique, comme dans l'art. (3077), & l'on aura $35^\circ\ 41'$, qui ajoutés avec le lieu du nœud, donneront la longitude réduite $2^s\ 9^\circ\ 6'$, & la commutation $7^s\ 19^\circ\ 5'$.

Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme le sinus de l'argument de latitude $36^\circ\ 24'\ 40''$ est au sinus de la latitude héliocentrique $7^\circ\ 46'$; le log. de son cosinus étant ajouté à celui de la distance périhélie, on en ôtera le double du log. cos. de $26^\circ\ 13'\frac{2}{3}$, qui est la demi-anomalie, & l'on aura pour logar. de la distance au soleil réduite à l'écliptique 9,62230; enfin, on trouvera l'élongation de la comète $23^\circ\ 41'$, & sa longitude géocentrique $5^s\ 26^\circ\ 20'$; elle ne diffère que d'une minute de la longitude observée, ce qui me dispensera d'étendre cet exemple plus loin.

3082. M. Pingré ayant rassemblé & combiné 42 observations de cette comète faites en différens lieux, a établi les élémens d'une manière peu différente du résultat auquel je suis parvenu dans les calculs précédens, on le trouvera dans la table des élémens, page 367.

3083. Nous n'avons employé jusqu'ici pour faire

nos hypothèſes que les mouvemens ou les erreurs en longitude ; mais il y a des cas ou le changement en latitude étant plus rapide, il ſeroit plus utile de l'employer ; telle eſt, par exemple, la comète de 1264, qui fit plus de 40° en latitude, ſans changer ſa longitude de trois degrés, ou les comètes de 1593, 1672, 1683, 1707, dont les orbites ſont preſque perpendiculaires à l'écliptique ; le calcul qu'il faudra faire dans ces cas-là, ne ſera pas fort différent de celui dont nous avons donné l'exemple.

Ayant ſuppoſé une diſtance dans la première obſervation (3071), & cherché la diſtance dans la ſeconde obſervation, telle que l'intervalle de temps qui en réſulte ſoit d'accord avec celui qui a été obſervé ; & ayant formé deux hypothèſes qui repréſentent chacune exactement cet intervalle, comme on l'a vu ci-devant, on calculera dans chacune de ces deux hypothèſes, la latitude au temps de la troiſième obſervation, au lieu de calculer la longitude (3077) ; on les corrigera par le progrès des erreurs, en faiſant des parties proportionnelles, juſqu'à ce qu'on ait une hypothèſe qui repréſente exactement cette latitude, & celle-ci donnera les véritables élémens.

3084. Si l'on obſerve une comète fort éloignée de la terre, ſi pendant le temps de ſon apparition il y a peu de changement dans la longitude ou dans la diſtance au ſoleil, le lieu du périhélie & la diſtance périhélie ne ſauroient guère ſe conclure avec exactitude (3050), telle eſt la comète de 1729, ſur laquelle M. Maraldi & M. Kies différerent beaucoup (3090) pour le périhélie, quoiqu'elle eût été obſervée pendant ſix mois.

3085. De même il eſt clair que ſi les latitudes géocentriques ont été petites ou peu inégales, l'inclinaiſon ou le lieu du nœud en ſeront d'autant moins sûrs ; telle fut la grande comète de 1744, dont la latitude géocentrique n'alla pas à 20°, quoique l'inclinaiſon qui en réſulte ſoit de 47°. Dans la comète de 1769, que je calculai le premier, à Bourg-en-Breſſe, la latitude obſervée n'avoit pas excédé 10° 37′, & l'inclinaiſon de l'orbite

étoit de 41°; en pareil cas le lieu du nœud eſt déterminé avec beaucoup plus de préciſion que l'inclinaiſon de l'orbite.

Catalogue de 59 comètes.

3086. C'eſt par des eſſais à peu-près ſemblables, mais bien plus longs, ſans doute, que Halley détermina par les anciennes obſervations 24 paraboles ou orbites cométaires, y compris celle de 1698, M. Bradley, M. Maraldi, M. de la Caille, M. Struick, M. Pingré & moi, en avons calculé pluſieurs autres; enſorte que le nombre s'eſt accru juſqu'à 59, y compris celle de 1771 qui paroît encore actuellement (Janvier 1771). Mais je ne compte que pour une ſeule toutes les apparitions de celles dont les périodes ſont connues (3093).

Élémens d'une orbite.

3087. Les élémens d'une comète ſont les ſix articles qui déterminent la ſituation & la grandeur de l'orbite qu'elle a décrite, & qui établiſſent ſa théorie: le lieu du nœud vu du ſoleil, l'inclinaiſon, le lieu du périhélie, la diſtance dans le périhélie, & le temps moyen du paſſage, qui tient lieu d'époque. Enfin la direction de ſon mouvement qui peut être direct ou rétrograde. Nous y ajouterions l'excentricité ſi elle n'étoit inconnue dans la plupart des comètes. Tels ſont les points principaux de la table ſuivante, qui contient en abrégé le réſultat de toutes les obſervations faites juſqu'ici ſur les comètes.

3088. Les diſtances périhélies marquées dans la 6e colonne, ſuppoſent que la diſtance moyenne du ſoleil à la terre eſt l'unité; ſi l'on veut la ſuppoſer de 100000, comme dans les tables du ſoleil & des planètes, il n'y a qu'à prendre cinq chiffres après la virgule qui ſépare les décimales, en ajoutant s'il le faut un ou pluſieurs zéros. Par exemple, on aura 41081 pour la diſtance périhélie de la comète de 1264, 45000 pour 1301.

De la table des élémens.

3089. Les comètes de 837, 1231, 1299, 1301 & 1337, ont été calculées par M. Pingré, ſur des obſervations faites à la Chine; auxquelles il a joint auſſi pour celles de 1299 & 1301 quelques obſervations Européennes. Pour celle de 1264, j'ai rectifié une faute dans la

table de M. de la Caille; il faut voir les tranſactions philoſophiques de 1751, & les mémoires de l'acad. de 1760. Celle de 1337, avoit été déjà calculée par M. Halley, mais elle a été rectifiée par M. Pingré, ſur des obſervations Chinoiſes plus exactes que celles de Grégoras, dont M. Halley avoit fait uſage. Celle de 1533, avoit été calculée par M. Halley, comme on le peut voir dans ſes tables, *pag.* 91, édition de 1759, & enſuite par M. Pingré, ſur des obſervations d'Appian, qu'il a reconnues pour défectueuſes, & je n'ai rapporté que le calcul fait par M. Douwes, qui travailloit en Hollande avec M. Struick; on mettoit auparavant 10° de plus à l'inclinaiſon, & 11° de plus pour le périhélie. J'ai rapporté de deux manières différentes les élémens de la comète de 1580, M. Pingré les a calculés plus exactement que M. Halley, qui n'avoit pas connoiſſance des obſervations de Tycho (481).

Au ſujet de la comète de 1593, on peut voir les *mémoires de l'acad.* 1743, *pag.* 16, 1747, *pag.* 562, & 1763, *pag.* 16, où l'on obſerve l'erreur qui s'étoit gliſſée dans la dernière édition des leçons d'aſtronomie de M. de la Caille. La comète de 1596, avoit été calculée par Halley, ſur des obſervations de Mæſtlin, M. Pingré y a employé les obſervations manuſcrites de Tycho-Brahé.

Pour la comète de 1672, M. Struick (T. I. *pag.* 270) marque le périhélie dans le Cancer, mais il doit être dans le Taureau : c'eſt une faute d'impreſſion, elle eſt indiquée à la fin du ſecond volume du même auteur qui a paru quelques années après. Ce livre renferme de très-bonnes recherches ſur les comètes, & ſur d'autres parties de l'aſtronomie.

Les chiffres Arabes qui ſe trouvent dans la première colonne, parmi les chiffres Romains, indiquent la reſſemblance des comètes avec d'autres ; ainſi le chiffre 49 qui eſt vis-à-vis de 1456 annonce que cette comète eſt la même que la XLIXe qui eſt celle de 1759.

ÉLÉMENS

Des LIX Comètes qui ont été observées assez exactement pour pouvoir être calculées.

Ordre des Comètes.	Années de l'appar.	Longitude du Nœud ascendant. S. D. M. S.	Inclinaison de l'Orbite. D. M. S.	Lieu du Périhélie. S. D. M. S.	Distance périhélie celle du Soleil étant 1.	Passage au Périhélie Temps moyen à Paris. Jours. H. M. S.	Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces Orbites; avec la note des articles de ce Livre, où il en est parlé.
I.	837	6 26 33	10 ou 12°	9 19 3	0,58	1 Mars......	Rétrograde.	*Pingré*, (3089).
II.	1231	0 13 30	6 5	4 14 48	0,9478	30 Janv...... 7 22 0	Directe.	*Pingré* (3089).
III.	1264	5 19 0	36 30	9 21 0 0	0,445	6 Juillet.... 8 0 0	Directe.	*Dunthorn* (3089).
		5 28 45	30 25	9 5 45 0	0,41081	17 Juillet.... 6 10 0	Directe.	*Pingré* (3089).
IV.	1299	3 17 8	68 57	0 3 20	0,3179	31 Mars..... 7 38 0	Rétrograde.	*Pingré* (3089).
V.	1301	0 15 envir.	70 envir.	9 ou 10s	0,45	22 Octob. environ.	Rétrograde.	*Pingré* (3089).
VI.	1337	2 24 21	32 11	1 7 59	0,40666	2 Juin..... 6 34 0	Rétrograde.	*Halley*, à peu p. (3089)
		2 6 22	32 11	0 20	0,6445	1 Juin...... 0 40 0		*Pingré*, (3089).
49	1456	1 18 30	17 56	10 1 0	0,5855	8 Juin...... 22 10 0	Rétrograde.	*Pingré*, à peu p. (3093)
VII.	1472	9 11 46 20	5 20	1 15 33 30	0,54273	28 Février... 22 32 0	Rétrograde.	*Halley*, à peu p. (3012)
49	1531	1 19 25	17 56	10 1 39	0,56700	24 Août..... 21 27 0	Rétrograde.	*Halley*, à peu p. (3093)
19	1532	2 20 27	32 36	3 21 7	0,50910	19 Octobre.. 22 21 0	Directe.	*Halley*, à peu p. (3095)
VIII.	1533	4 5 44	35 49	4 27 16	0,2028	16 Juin...... 19 39 0	Directe.	*Douwes*, à peu p. (3089)
3	1556	5 25 42	32 6 30	9 8 50	0,46390	21 Avril..... 20 12 0	Directe.	*H.* à peu p. (3110, 3095)
IX.	1577	0 25 52	74 32 45	4 9 22	0,18342	26 Octobre.. 18 54 0	Rétrograde.	*Halley*, v. art. 3013.
X.	1580	0 18 57 20	64 40 0	3 19 5 50	0,59628	28 Novemb. 15 9 0	Directe.	*Halley*, à peu p. (3089)
		0 19 7 37	64 51 50	3 19 11 55	0,59553	28 Novemb. 13 54 0		*Pingré*, exactement.
XI. 49	1582	7 21 7 20	61 27 50	8 5 23 10	0,2257	6 Mai....... 16 9 0	Rétrograde.	*Ping.* à peu p. (3110
XII.	1585	1 7 42 30	6 4	0 8 51	1,09358	7 Oct. N.S. 19 29 0	Directe.	*Halley* (3000).
XIII.	1590	5 15 30 40	29 40 40	7 6 54 30	0,57661	8 Fév. N.S. 3 54 0	Rétrograde.	*Halley*.
XIV.	1593	5 14 15 0	87 58	5 26 19	0,08911	18 Juil. N.S. 13 48 0	Directe.	*La Caille*, à p. p. (3089)
XV.	1596	10 15 36 50	52 9 45	7 28 30 50	0,549415	8 Août..... 15 43 0	Rétrograde.	*Pingré* (3089, 3110).
		10 12 12 30	55 12	7 18 16	0,51293	10 Août..... 20 4 0	Rétrograde.	*Halley*.
49	1607	1 20 21	17 2	10 2 16 0	0,58680	26 Octobre.... 3 59 0	Rétrograde.	*Halley* (3093).
XVI.	1618	9 23 25	21 28	10 18 20 0	0,51298	17 Août..... 3 12 0	Directe.	*Pingré*, à peu près.
XVII.	1618	2 16 1	37 34	0 2 14 0	0,37975	8 Novemb. 12 32 0	Directe.	*Halley*.
XVIII.	1652	2 28 10	79 28 0	0 28 18 40	0,84750	12 Novemb. 15 49 0	Directe.	*Halley*.
XIX.	1661	2 22 30 30	32 35 50	3 25 58 40	0,44851	26 Janvier.. 23 50 0	Directe.	*Halley*.
XX.	1664	2 21 14	21 18 30	4 10 41 25	1,025755	4 Décembre 12 1 0	Rétrograde.	*Halley* (3016).
XXI.	1665	7 18 2	76 5 0	2 11 54 30	0,10649	24 Avril..... 5 24 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXII.	1672	9 27 30 30	83 22 10	3 16 59 30	0,69739	1 Mars..... 8 46 0	Directe.	*Halley*.
XXIII.	1677	7 26 49 10	79 3 15	4 17 37 5	0,28059	6 Mai....... 0 46 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXIV.	1678	5 11 40 0	3 4 20	10 27 46 0	1,23801	26 Août...... 14 12 0	Directe.	*Struick*, à peu près.
XXV.	1680	9 2 2 0	60 56 0	8 22 39 30	0,006125	18 Décembr. 0 15 0	Directe.	*Halley* (3019).
49	1682	1 21 16 30	17 56 0	10 2 52 45	0,58328	14 Septemb. 7 48 0	Rétrograde.	*Hall.* C'est celle de 1759
XXVI.	1683	5 23 23 0	83 11 0	2 25 29 30	0,56020	13 Juillet.... 2 59 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXVII.	1684	8 28 15 0	65 48 40	7 28 52 0	0,96015	8 Juin...... 10 25 0	Directe.	*Halley*.
XXVIII.	1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	0,32500	16 Septemb. 14 42 0	Directe.	*Halley*.
XXIX.	1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	0,016889	1 Décemb.. 15 5 0	Rétrograde.	*Pingré*, à peu près.
XXX.	1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	0,69129	18 Octob.... 17 6 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXXI. 30	1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	0,74400	13 Janvier.. 8 32 0	Rétrograde.	*La Caille*, à peu près.
XXXII.	1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	0,64590	13 Mars..... 14 22 0	Directe.	*La Caille*, à peu près.

ÉLÉMENS

Des LIX *Comètes qui ont été obſervées aſſez exactement pour pouvoir être calculées.*

Ordre des Comètes.	Années de l'appar.	Longitude du Nœud aſcendant. S. D. M. S.	Inclinaiſon de l'Orbite. D. M. S.	Lieu du Périhélie. S. D. M. S.	Diſtance périhélie celle du Soleil étant 1.	Paſſage au Périhélie Temps moyen à Paris. Jours. H. M. S.	Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces Orbites ; avec la note des articles de ce Livre, où il en eſt parlé.
XXXIII.	1706	0 13 11 40	55 14 10	2 12 29 10	0,42581	30 Janv...... 4 32 0	Directe.	*La Caille.*
		0 13 11 23	55 14 5	2 12 36 25	0,426865	30 Janv...... 5 5 0		*Struick.*
XXXIV.	1707	1 22 46 35	88 36 0	2 19 54 56	0,85974	11 Décemb.. 23 39 0	Directe.	*La Caille.*
		1 22 50 29	88 37 40	2 19 58 9	0,85904	11 Décemb.. 23 52 47	Directe.	*Struick.*
XXXV.	1718	4 8 43 0	30 20 0	4 1 30 0	1,02655	14 Janvier... 23 48 0	Rétrograde.	*La Caille.*
		4 7 55 20	31 12 53	4 1 26 36	1,02565	15 Janvier... 1 24 36	Rétrograde.	*Struik.*
XXXVI.	1723	0 14 16 0	49 59 0	1 12 52 20	0,99865	27 Septemb. 16 20 0	Rétrograde.	*Bradley.*
XXXVII.	1729	10 10 32 37	76 58 4	10 22 40 0	4,26140	25 Juin...... 11 16 0	Directe.	*La Caille* (3090, 3112)
		10 10 35 15	77 1 58	10 22 16 53	4,0698	23 Juin...... 6 45 22	Directe.	*Douwes.*
XXXVIII.	1737	7 16 22 0	18 20 45	10 25 55 0	0,22282	30 Janvier... 8 30 0	Directe.	*Bradley.*
XXXIX.	1739	6 27 25 14	55 42 44	3 12 38 40	0,67358	17 Juin...... 10 9 0	Rétrograde.	*La Caille.*
XL.	1742	6 5 38 29	66 59 14	7 7 35 13	0,76568	8 Février... 4 48 0	Rétrograde.	*La Caille.*
		6 5 34 45	67 4 11	7 7 33 14	0,765555	8 Février... 4 30 30	Rétrograde.	*Struick.*
XLI.	1743	2 18 21 15	2 19 33	3 2 41 45	0,83501	10 Janvier... 20 35 0	Directe.	*La Caille*, à peu près.
		2 8 10 48	2 15 50	3 2 58 4	0,838115	10 Janvier... 21 24 57	Directe.	*Struick.*
XLII.	1743	0 5 16 25	45 48 20	8 6 33 52	0,52057	20 Septemb.. 21 26 0	Rétrograde.	*Klinkenberg.*
XLIII.	1744	1 15 46 11	47 5 18	6 17 10 0	0,22250	1 Mars...... 8 13 0	Directe.	*La Caille.*
		1 15 45 20	47 8 36	6 17 12 55	0,22206	1 Mars...... 8 26 20	Directe.	*Bliſſ*, très-exacte.
XLIV.	1747	4 27 18 50	79 6 20	9 7 2 0	2,19851	3 Mars...... 7 20 0	Rétrograde.	*La Caille.*
		4 26 58 27	77 56 55	9 10 5 41	2,29388	28 Février... 11 54 19	Rétrograde.	*Cheſeaux.*
XLV.	1748	7 22 52 16	85 26 57	7 5 0 50	0,84066	28 Avril..... 19 34 45	Rétrograde.	*Maraldi.*
XLVI.	1748	1 4 39 43	56 59 3	9 6 9 24	0,65525	18 Juin...... 1 33 0	Directe.	*Struick*, à peu près.
XLVII.	1757	7 4 5 50	12 39 6	4 2 39 0	0,33907	21 Octobre... 9 42 0	Directe.	*La Caille.*
XLVIII.	1758	7 20 50 9	68 19 0	8 27 37 45	0,21535	11 Juin...... 3 27 0	Directe.	*Pingré.*
XLIX.	1759	1 23 49 0	17 39 0	10 3 16 0	0,58349	12 Mars...... 13 41 0	Rétrograde.	*La Caille* (3093).
		1 23 45 35	17 40 14	10 3 8 10	0,58490	12 Mars..... 13 59 24		*De la Lande*
		1 23 49 21	17 35 20	10 3 16 20	0,5836	12 Mars...... 12 57 36		*Maraldi, Mém.* 1759.
L.	1760	4 19 39 24	78 59 22	1 23 24 20	0,79851	27 Nov. 1759. 2 28 20	Dir. dans ☊	*La Caille* (3090).
LI.	1760	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	0,96599	16 Déc. 1759. 21 13 0	Rét. Orion.	*La Caille* (3090).
		2 19 20 24	4 42 10	4 19 3 52	0,9618	16 Déc. 1759. 12 58 12		*Chappe.*
LII.	1762	11 19 20 0	84 45 0	3 15 15 0	1,0124	28 Mai....... 15 27 0	Directe.	*De la Lande.*
		11 18 35 23	85 40 10	3 13 42 38	1,00686	28 Mai....... 2 2 0		*Klinkenberg.*
		11 19 2 22	85 3 2	3 14 29 46	1,009856	28 Mai....... 7 0 49		*Struick.*
		11 18 55 31	85 22 21	3 15 22 23	1,01415	29 Mai....... 0 27 48		*Maraldi.*
LIII.	1763	11 26 29 29	73 39 29	2 25 0 48	0,49842	1 Novemb.. 21 6 29	Directe.	*P. Mém. ac.* 1764 (3015)
LIV.	1764	3 19 20 6	53 54 19	0 16 11 48	0,56418	12 Février... 10 29 0	Rétrograde.	*Ping. Mém. Ac.* 1764.
LV.	1766	8 4 10 50	40 50 20	4 23 15 25	0,50533	17 Février... 8 50 0	Rétrograde.	*P. Mém.* 1766. p. 424
LVI.	1766	1 17 5 0	8 20 0	6 25 15 0	0,6386	16 Avril...... 17 30 0	Directe.	*Pingré* (3090).
LVII.	1769	5 25 0 43	40 37 33	4 24 5 54	0,12376	7 Octobre.. 12 30 0	Directe.	*De la Lande.*
		5 25 6 32	40 48 49	4 24 11 7	0,12272	7 Octobre.. 1 58 40		*Wargentin. Mé. A.* 1769
LVIII.	1770	4 19 39 5	1 44 30	11 25 27 16	0,636878	9 Août...... 0 16 54	Directe.	*Pingré.*
LIX.	1771	3 18 42 10	31 25 55	6 28 22 44	0,52824	22 Nov. 1770. 22 5 48	Rétrograde.	*Pingré* (3090).

3090. J'ai rapporté de deux manières différentes les élémens de la comète de 1729, parce que cette comète ayant une très-grande distance périhélie, & ayant fait très-peu de chemin pendant cinq mois qu'elle fut observée, le calcul en est très-délicat, comme l'observe M. de la Caille (*Mém.* 1746, *pag.* 413), & l'on trouve une très-grande différence entre les résultats des calculs; par exemple, elle avoit passé par son périhélie le 22 Mai 1729, suivant M. Kies (*Mém. de Berlin*, 1745, *pag.* 46); elle y passa deux mois plus tard, vers le 22 ou le 23 Juillet, selon M. Maraldi, *Mém.* 1743, *pag.* 196; le 25 Juin, selon M. de l'Isle, cité par M. de la Caille (*Mém.* 1746, *pag.* 406), & suivant les leçons d'astronomie de M. de la Caille. M. Struick a donné des élémens qu'il a appliqués aux 44 observations de M. Cassini, rapportées dans les mémoires de 1730; la différence entre l'observation & le calcul n'a jamais été au-delà de $3' \frac{1}{2}$. tandis qu'avec les élémens de M. de la Caille, la différence alloit à 31′ en longitude, & 75′ en latitude (*Mém.* 1763, *pag.* 18); mais le lieu du périhélie $10^s\ 13^\circ\ 14'\ 48''$ qu'on y trouve est compté sur l'écliptique, je l'ai mis dans la table précédente sur l'orbite, ainsi que dans toutes les autres comètes.

Les deux comètes de 1760, sont appellées comètes de 1759 par quelques astronomes, parce que leur périhélie tombe en effet en 1759; mais j'ai laissé dans la seconde colonne de ma table la date de l'apparition, il en est de même de la dernière, qui a été apperçue le 9 Janvier 1771, & qui peut être rapportée à 1770.

Pour la comète de 1762, j'ai corrigé six signes dans le lieu du nœud ascendant qui se trouve dans les *Mémoires* de 1763, *pag.* 15. On peut voir au sujet de cette comète les mémoires de 1762, *pag.* 561, 566, 568, & ceux de 1763, *pag.* 15.

La seconde comète de 1766, a été observée par M. Messier, M. Cassini, le P. Helfenzriede, à Dillengen, M. de la Nux, à l'Isle de Bourbon; elle a été calculée par M. Pingré; cependant il n'en est pas fait mention dans

dans les mémoires de l'académie, ni dans aucun autre ouvrage que je connoiffe.

Les calculs de M. Struick, fe trouvent dans l'ouvrage qu'il a publié en Hollandois, en 2 vol. in-4°. Ceux de M. Pingré, le feront avec les détails convenables, dans l'ouvrage qu'il fe propofe de donner (3119).

Quoique dans cette table il y ait des fecondes à chaque colonne, il n'y a aucune orbite de comète où l'on puiffe répondre des fecondes, non plus que du 5ᵉ chiffre fur les décimales de la diftance périhélie ; mais j'ai rapporté les réfultats tels que les aftronomes les ont donnés.

Du retour des Comètes.

3091. LORSQUE Newton eut reconnu que la comète de 1680 avoit décrit fenfiblement une parabole pendant le temps de fon apparition, avec des aires proportionnelles au temps (3021), il fut perfuadé que cette comète étoit une véritable planète, & que l'orbite qui paroiffoit une parabole n'étoit réellement que la partie inférieure d'une ellipfe très-grande & très-allongée : *Diximus cometas effe genus planetarum, in orbibus valde excentricis circa folem revolventium*, (*Princip. pag.* 508, *édit. de* 1687). Il favoit que ces ellipfes très-excentriques reffemblent à très-peu-près à des paraboles (3104), & en approchent d'autant plus que la diftance périhélie eft plus petite par rapport au grand axe de l'ellipfe, *hinc fi cometæ in orbem redeunt, orbes erunt ellipfes.* (*Princ. L. III. prop.* 40).

3092. Ce fut Halley qui en 1705 eut la gloire de vérifier, par le calcul des anciennes obfervations, ce que Newton avoit préfumé d'après les loix de fa phyfique ; Halley démontra la reffemblance ou plutôt l'identité de la comète de 1607, & de celle de 1682, & il annonça fon retour pour 1759 ; prédiction qui s'eft vérifiée fous nos yeux. J'ai donné dans ma théorie des comètes, à la fuite de celle de Halley, l'hiftoire du retour de cette comète fameufe ; on peut voir auffi ce que j'en ai Prédiction de M. Halley

dit dans les *Mémoires* de 1759, *pag.* 1. Il me suffira de retracer ici en peu de mots la marche des inventeurs.

3093. Lorsque M. Halley eut calculé par observations (3086) les paraboles de 24 comètes, il s'en trouva trois qui se ressembloient beaucoup, celles de 1531, de 1607 & de 1682; les trois paraboles étoient situées de même, les distances périhélies étoient égales, & les intervalles de temps étoient de 75 à 76 ans; il pensa dès lors que ce pouvoit être la même comète; cependant la différence des inclinaisons & des périodes lui paroissoit un peu trop grande, & il n'osoit prononcer sur l'identité; mais lorsqu'après les recherches qu'il fit des anciennes comètes il en eut trouvé trois autres, dont il est parlé dans les historiens sous les années 1305, 1380, 1456, à des intervalles de temps toujours à peu-près égaux, il ne douta plus que le retour ne fût certain, & il rejetta sur les attractions mutuelles des corps célestes les différences qu'il trouva entre les diverses périodes de cette comète.

3094. Tel fut donc le progrès de nos connoissances en ce genre, d'anciens philosophes regardèrent les comètes comme des corps célestes & périodiques (3010). Newton en conclut qu'elles pouvoient décrire des ellipses très-excentriques, & reparoître à chaque révolution; Halley vérifia cette belle idée en calculant plusieurs comètes, parmi lesquelles il s'en trouva trois qui avoient décrit exactement la même orbite; ce qui annonçoit trois apparitions, & cela s'est trouvé pleinement confirmé quand cette comète a reparu en 1759 dans la même orbite & après le même espace de temps.

Deux autres comètes connues.

3095. Il y a encore deux comètes dont la période paroît connue, & dont on espère le retour; celle de 1532 & de 1661 qu'on attend pour 1789 ou 1790, celle de 1264 & de 1556 pour 1848; au sujet de cette dernière, on peut voir les *Mémoires de l'acad.* 1760, *pag.* 192. La grande comète de 1680 suiv. M. Halley devroit reparoître l'an 2254, il croit que c'est celle qui parut du temps de César; dans ce cas-là ce seroit aussi celle dont parle Homère, (*Iliad. IV.* 75), & elle auroit paru 619 ans avant J. C.

ſi cette comète de 1680 acheve 7 révolut. en 4028 ans, elle a dû paſſer près de nous 2349 ans avant J. C. & peut ſervir à ceux qui veulent expliquer phyſiquement le déluge, comme M. Whiſton, (*New theory of the earth*, pag. 186). Mais il y a des doutes ſur celle-ci ; voyez à ce ſujet ma théorie des comètes, *pag.* 92. Quoi qu'il en ſoit de cette dernière, il eſt évident par le retour de la comète de 1682, que les comètes ſont périodiques, & que leurs orbites ſont elliptiques, de même que celles des planètes (1220).

3096. Puiſque les comètes ſont périodiques, auſſi bien que les planètes, le problême de Képler dont nous avons donné la ſolution (1237) a lieu également lorſqu'il s'agit des comètes ; quand la durée de la révolution d'une comète eſt donnée, on a le grand axe de ſon ellipſe, & par conſéquent ſon excentricité, & le temps où elle a paſſé dans ſon périhélie ; il s'agit alors de trouver pour un inſtant donné ſon anomalie vraie ; mais ce problême exige une longue approximation.

Nous emploîrons pour trouver le vrai lieu d'une comète dans ſon ellipſe trois méthodes différentes ; 1°, la méthode indirecte (1238) que nous appliquerons aux comètes ; 2°, la méthode de Halley, qui a donné une table générale des ſegmens d'ellipſe pour chaque degré d'anomalie excentrique ; 3°, celle qui conſiſte à réduire l'ellipſe à une parabole. Trois méthodes pour trouver l'anomalie vraie.

3097. Dans tous les corps qui tournent autour du ſoleil, les carrés des temps ſont comme les cubes des diſtances (1224), & l'on verra que c'eſt une ſuite néceſſaire des loix du mouvement planétaire (3396) ; ainſi, connoiſſant la durée de la révolution ſydérale d'une planète en jours, on doublera ſon logarithme, on en ôtera le double du logarithme de la révolution ſydérale de la terre (1161) ou de 365^j, 25638, c'eſt-à-dire, le log. 5,1251955 ; le tiers du reſte ſera le logarithme de la diſtance de la comète. Je ſuppoſe que la période ſoit de 28070 jours pour la comète de 1759, on trouvera 18,07575 pour la diſtance moyenne ou le demi axe de l'ellipſe qui doit Trouver la grandeur de l'orbite.

être décrite en 28070 jours. Si l'on en ôte la distance périhélie 0,58350, on aura l'excentricité de la comète 17, 49225 ; le log. du demi-petit axe se trouvera aussi en prenant la demi-somme des logar. de la distance aphélie & de la distance périhélie (1246) ; ce log. est 0,6585501, & les deux logarithmes constans (1243) sont 0,8925092 & 5,3001714.

Trouver l'anomalie moyenne.

3098. Connoissant la durée de la révolution, l'on trouve aisément l'anomalie moyenne pour un nombre de jours, en disant 28070j sont à 360° ou 1296000″, comme le nombre de jours, compté depuis le périhélie, est à la quantité de l'anomalie moyenne en secondes & en decimales, (car on ne doit pas négliger ici les centièmes de secondes) ; ainsi pour 16j 4h 44′ ou 16j, 19722, on trouveroit 12′ 27″ 83 d'anomalie moyenne.

3099. *Connoissant l'anomalie moyenne dans une ellipse très-excentrique, trouver l'anomalie vraie.* Le nombre des jours écoulés depuis le périhélie, fera trouver d'abord l'anomalie vraie dans la parabole (3041) ; on se servira de cette anomalie vraie qui est à peu-près exacte, & on la convertira en anomalie moyenne (1244) : si cette anomalie moyenne n'est pas exactement celle qui est donnée par l'intervalle de temps écoulé depuis le périhélie (3098), on augmentera ou l'on diminuera l'anomalie vraie supposée ; on la convertira de nouveau en anomalie moyenne, & l'on trouvera par-là quelle est celle qui produit exactement l'anomalie moyenne donnée.

3100. Exemple. Le 30 Août 1682, la comète étant éloignée de son périhélie de 16j 4h 44′ ou 16,19722, & son anomalie moyenne 12′ 27″ 83, on demande son anomalie vraie. Je suppose sa distance périhélie 0,5835 ; si du logar. du nombre de jours 16, 19722, on ôte les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie, ou 9,6490613, on aura le logar. d'un nombre de jours, avec lequel on cherchera dans la table générale, & l'on trouvera l'anomalie vraie dans la parabole 45° 20′ environ. Cette anomalie vraie ne peut pas différer beaucoup de celle que nous cherchons dans l'ellipse ; supposons-la donc de 45° juste, à compter

du périhélie, ou 135°, en comptant de l'aphélie; nous ſuivrons la même règle que pour les planètes (1244), & nous trouverons pour l'anomalie moyenne qui répond à 45° dans l'ellipſe 12′ 25″ 60, trop petite de 2″ 23. Pour ſavoir combien ces 2″ d'anomalie moyenne valent d'anomalie vraie, on peut ſe ſervir encore de la table générale; premiérement, on les réduira en fractions de jours, en ajoutant le log. de la révolution 28070j moins celui de 360°, & en ôtant les $\frac{3}{2}$ du log. de la diſtance périhélie, on aura le log. de 0j 1c84 qui dans la table générale, à proportion des différences qu'il y a vers 45°, donneront 6′ 33″; c'eſt une preuve qu'il faut employer l'anomalie vraie 45° 6′ 33″, pour trouver l'anomalie moyenne 12′ 27″ 83 qui étoit donnée. En effet, convertiſſant de même l'anomalie vraie 45° 6′ 33″ de l'ellipſe en anomalie moyenne, je trouve l'anomalie moyenne 12′ 27″ 83, ou un centième de ſeconde de moins, ce dont on ne ſauroit répondre dans ces calculs.

On pourroit trouver d'une autre manière combien les 2″ 23 font de différence ſur l'anomalie vraie, en répétant la même opération, avec une anomalie vraie de 46°, on trouveroit environ 20″ de moins; d'où il ſeroit aiſé de conclure, par une règle de trois, que l'anomalie vraie doit varier de 6′ 33″ pour 2″ 23 d'anomalie moyenne. C'eſt ainſi qu'on trouve 45° 6′ 33″ ou 134° 53′ 27″ pour l'anomalie vraie cherchée, comptée de l'aphélie, qui répond à 12′ 27″ 83 d'anomalie moyenne, ou à 16j 4h 44′ de diſtance au périhélie. On trouve auſſi le rayon vecteur dans l'ellipſe par la règle ordinaire (1246), il eſt dans notre exemple de 0,68222. Anomalie vraie.

3101. Lorſqu'on a beaucoup d'obſervations à calculer dans une orbite fort excentrique, on peut faire par cette méthode, ou par celle que nous allons expliquer, une table de l'anomalie vraie, de l'anomalie moyenne & de la diſtance au ſoleil pour chaque degré d'anomalie excentrique dans l'ellipſe; M. Halley en fit une pour les comètes de 1680 & de 1682; (*Tables de Halley*, 1759). Le choix de l'anomalie excentrique donne une Seconde méthode.

échelle ou mesure moyenne qui diminue la grande inégalité qu'on trouveroit en prenant pour argument de la table, ou les jours, ou l'anomalie moyenne; d'ailleurs il en résulte une plus grande facilité pour construire cette table des anomalies vraies. Soit le centre *C* d'une ellipse

Fig. 266. (*fig.* 266); *S* le foyer, *P* le périhélie, *PAN* le cercle circonscrit, *PA* l'anomalie excentrique (1234) au moment où la comète est en . L'aire *PSAEP* égale à l'anomalie moyenne (1235, 1239), est composée du segment de cercle *PEAP*, & du triangle rectiligne *PAS*; le segment est aisé à calculer (3321) pour l'anomalie excentrique *PA*; & M. Halley en a donné une table; le triangle *PSA* est égal à $\frac{1}{2}$ *PS*. *AD*, ou la moitié du produit de la distance périhélie & du sinus de l'anomalie excentrique; on calculera séparément ces deux parties, dont la somme formera la surface entière *PSAEP*, qui est égale au secteur circulaire de l'anomalie moyenne (1239); ainsi pour chaque degré d'anomalie excentrique on aura l'anomalie moyenne (*Théorie des comètes* 1759, *pag.* 43).

Rayon vecteur.

3102. Le rayon vecteur *SM* est égal à $PS + \frac{CS.PD}{CP}$ (3273); mais *CP* est à *PD*, comme le rayon est au sinus verse de l'arc *PA*, donc $\frac{PD}{CP}$ est le sinus verse de l'anomalie excentrique, & l'on aura le rayon vecteur en ajoutant à la distance périhélie le produit de l'excentricité par le sinus verse de l'anomalie excentrique.

3103. Le sinus de l'anomalie vraie *MSC* est égal à $\frac{MD}{MS}$ (3613), or $MD = AD\,\frac{CH}{CP}$ (3256); c'est-à-dire, que *MD* est égal au sinus de l'anomalie excentrique multiplié par le rapport des axes. Cette quantité divisée par le rayon vecteur (3102) donnera le sinus de l'anomalie vraie. Ainsi par le moyen des segmens de cercle dont M. Halley a donné une table pour chaque degré d'anomalie excentrique, l'on peut calculer les anomalies vraies d'une comète quelconque, dans son ellipse.

3104. La troisième méthode que l'on peut employer pour trouver l'anomalie vraie d'une comète à chaque degré

d'anomalie moyenne eſt fondée ſur le peu de différence qu'il y a entre la parabole & une ellipſe fort allongée : ſi la diſtance périhélie eſt la même dans les deux courbes le paramètre de l'ellipſe eſt à celui de la parabole, comme la diſtance aphélie eſt au grand axe ; & les vîteſſes périhélies ſont comme les racines des paramètres. (Voy. *ma théorie des comètes*, *pag.* 95). Il eſt aiſé de calculer dans pluſieurs points la petite différence entre la parabole & l'ellipſe, pour les réduire l'une à l'autre ; c'eſt la méthode que j'ai employée dans le calcul de la comète de 1759. (*Ib. pag.* 115). Il ſuffit pour cela de calculer l'anomalie vraie & le rayon vecteur ſoit dans la parabole (3042), ſoit dans l'ellipſe (3102), pour en avoir la différence à chaque degré d'anomalie moyenne ; quand on a un certain nombre de ces différences, on eſt en état de former une table des anomalies vraies dans l'ellipſe, par le moyen des anomalies paraboliques. Afin qu'on le pût faire avec plus de facilité, M. Simpſon a donné des formules & une table avec leſquelles on peut réduire la parabole à l'ellipſe (*Miſcellaneous Tracts*, 1757, *pag.* 58). M. de la Caille s'en eſt ſervi dans ſes leçons d'aſtronomie (*pag.* 268 & 292) ; mais cette formule n'étant exacte qu'à une minute près, je me diſpenſerai d'en faire uſage, & je ſuppoſerai qu'on ſuive la route ordinaire.

Différence entre la parabole & l'ellipſe.

3105. Exemple. Pour l'orbite de la comète de 1759, je ſuppoſe 28070 jours pour la durée de la révolution, & 0, 5835 pour la diſtance périhélie ; le point qui eſt à 100° d'anomalie vraie dans la parabole eſt à 144ʲ 3614 de diſtance au périhélie, dans la table générale & à 64ʲ 344 du périhélie dans la parabole donnée ; ce nombre de jours fait 49′ 30″ 80 d'anomalie moyenne dans une ellipſe de 28070 jours ; or 100° 23′ 14″ d'anomalie vraie dans cette ellipſe convertis en anomalie moyenne donnent auſſi 49′ 30″ 80, donc pour le même nombre de jours l'anomalie vraie de l'ellipſe eſt plus grande de 23′ 14″ que celle de la parabole. M. Bailly a donné une table

de ces différences depuis 90 jufqu'à 105° d'anomalie (*Mémoires préfentés*, &c. *Tom.* V, *p.* 14).

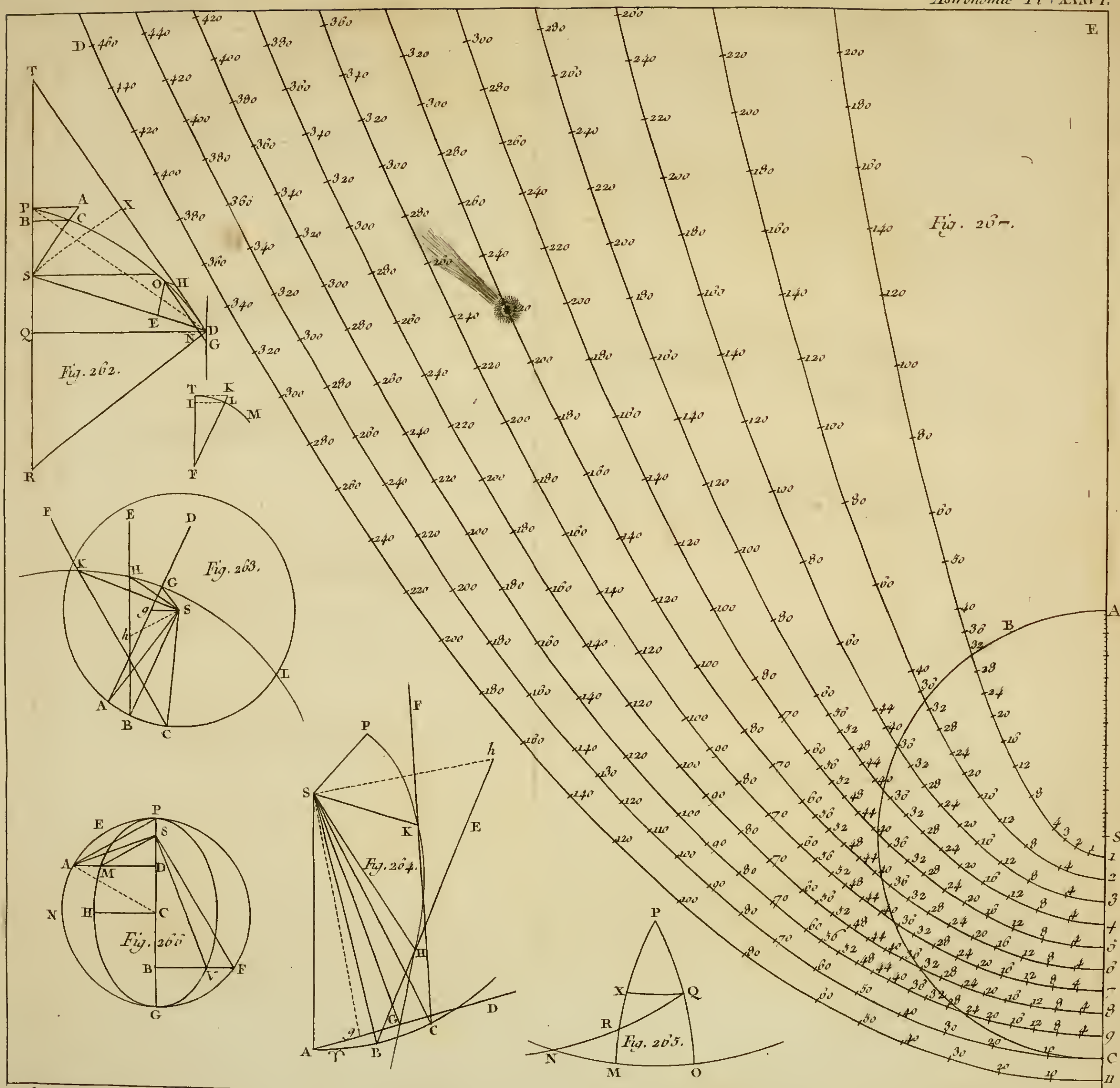
Ces anomalies font égales à 78° 26′ 30″ d'anomalie vraie ou 28′ 7″ 48 d'anomalie moyenne; mais les rayons vecteurs font fort différens, celui de la parabole eft 0,96169, celui de l'ellipfe eft 0,97220; la différence eft de plus d'un centième de la diftance totale. Si l'on change la durée de la révolution, le point où les deux anomalies font égales devient fort différent : dans une ellipfe de 27700 jours, c'eft à 77° 56′ que les anomalies font les mêmes.

3106. On peut encore faire un ufage plus commode des différences qu'il y a entre la parabole & l'ellipfe, & calculer la longitude géocentrique de la comète pour chaque jour, foit dans la parabole, foit dans l'ellipfe; par exemple, je trouvai que le premier Mai 1759 il falloit ajouter 3° 25′ 14″ à la longitude de la comète calculée dans une ellipfe de 28070 jours, pour avoir la longitude qu'on auroit obfervée fi la comète eût tourné dans une vraie parabole décrite fur la même diftance périhélie, & dans le même plan; l'on réduit ainfi les obfervations à l'état où elles doivent être pour qu'on puiffe déterminer les vrais élémens de l'orbite, par trois obfervations, fans fuppofer autre chofe que l'orbite parabolique avec les règles précédentes (3058). *Théorie des comètes*, *pag.* 115.

Quoique l'on voie ici une fort grande différence entre la parabole & l'ellipfe, en fuppofant la même diftance périhélie, cependant il fuffiroit de changer un peu cette diftance périhélie pour former une parabole qui approcheroit beaucoup de cette ellipfe de 28070 jours, & qui fe confondroit avec elle fur un affez long efpace; de manière qu'on auroit peine à les diftinguer, par les obfervations d'une comète faites dans une feule apparition.

Trouver la période par une feule apparition.

3107. Cependant, il feroit poffible, fi l'on avoit vu une comète long temps, & qu'on l'eût obfervée avec une



De la Gardette Sculp.

une grande précision, d'avoir une idée de la durée de sa révolution, ou de déterminer son ellipse par des méthodes indirectes semblables à celles que j'ai employées dans la parabole ; mais le calcul en seroit si long, & le résultat si peu susceptible de précision, que je ne pense pas devoir entrer dans ce détail. J'observerai seulement qu'en pareil cas la méthode la plus commode sera peut-être celle-ci. On déterminera d'abord dans l'hypothèse parabolique la distance périhélie, & le temps du passage au périhélie par des observations qui n'en soient pas fort éloignées, afin que cette distance périhélie convienne également, & à l'ellipse & à la parabole, & soit indépendante de l'hypothèse ; on calculera ensuite la différence entre la parabole & l'ellipse pour les observations les plus éloignées, dans différentes hypothèses de révolutions elliptiques ; les différences calculées étant comparées avec l'erreur observée, c'est-à-dire, avec la différence qu'il y a entre l'observation & le résultat de l'hypothèse parabolique ; on jugera laquelle des différentes ellipses supposées convient à ces observations éloignées. Mais comme de semblables calculs exigeroient une fort grande précision, il ne faudroit pas se contenter pour la parabole de la table que nous avons donnée, *pag.* 335. Il seroit bon de calculer en décimales, & pour des nombres de jours moins distans, les anomalies dont on auroit besoin.

3108. J'ai reconnu par un calcul fait seulement à peu-près pour la comète de 1759, que si l'on eût déterminé le périhélie par trois observations faites le 12 Mars, le 1 Avril & le 1 Mai, on auroit trouvé le 31 Mai 2′ d'erreur pour 3 ans de différence sur la révolution ; ce qui prouve qu'il n'est pas impossible de trouver la période d'une comète à 3 années près, par une seule apparition de 3 mois.

Diverses remarques sur les Comètes.

3109. On peut représenter l'inégalité du mouvement des comètes dans des ellipses fort excentriques, *Instrument cométaire.*

par le moyen d'une machine assez simple, que M. Desaguliers a donnée sous le nom d'*Instrument cométaire*; il a été aussi décrit par M. Ferguson, (*Astronomy explained*, 1764, *pag.* 288). Il consiste en deux poulies elliptiques, mobiles chacune autour de leur foyer, l'une conduit l'autre par le moyen d'une corde qui les embrasse toutes deux en se croisant entre elles; les poulies se touchent continuellement, d'où il résulte que si la première tourne uniformément, la seconde tournera plus vîte quand son périhélie touchera l'aphélie de la première, que quand son aphélie touchera le périhélie de la première. Si la seconde ellipse qui tourne inégalement, porte une alidade au-dehors de la boîte, & que cette alidade enfile un petit globe retenu dans une coulisse elliptique, il représentera très-bien la vîtesse du périhélie & la lenteur de l'aphélie; les aires seront même proportionnelles aux temps.

Effet de la parallaxe annuelle.

3110. On avoit reconnu long-temps avant Tycho, que le mouvement apparent des comètes observé pendant la durée de leur apparition, n'étoit pas uniforme; cependant Tycho n'étoit pas assez frappé de ces inégalités pour y reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle & du mouvement de la terre; j'en ai fait la remarque (1096), & j'ai annoncé qu'on trouveroit ici de quoi se convaincre du fait que Tycho révoquoit en doute.

La comète de 1556, après avoir eu un mouvement rétrograde, prit ensuite un mouvement direct suivant l'ordre des signes. Celles de 1596 [a] & de 1582 furent d'abord directes, & ensuite rétrogrades. Ce que nous avons dit des stations & des rétrogradations des planètes (1181), suffit pour faire comprendre que ces inégalités apparentes étoient une suite du mouvement de la terre, qui en nous faisant changer de place, nous fait voir sous une forme irrégulière & bizarre, des mouvemens qui sont en eux-mêmes très-réguliers.

3111. Képler reconnut très-bien dans les comètes l'effet de la parallaxe annuelle; & dans son traité des comètes il dit qu'ayant supposé le mouvement de celle de

[a] Riccioli dit 1569, en citant Képler; mais il y a 1596 dans Képler.

1618 dans une ligne droite, avec une diminution uniforme, on reconnoissoit l'effet du mouvement de la terre, soit sur la longitude, soit sur la latitude de la comète, (*pag.* 91), & que le mouvement qui parut tortueux, ne pouvoit le paroître qu'à raison de celui de la terre (*p.* 97); il termine même son premier livre en disant : Autant qu'il y a des comètes dans le ciel, autant il y a de preuves du mouvement de la terre autour du soleil, indépendamment de celui que l'on tire du mouvement des planètes.

Il faut pourtant avouer que Tycho auroit pu nous faire une réponse à laquelle il ne paroît pas avoir songé; c'est que si les comètes tournoient autour du soleil, & étoient emportées avec lui autour de la terre par un mouvement annuel, comme les planètes, on expliqueroit les mêmes apparences, tout ainsi qu'avec le mouvement de la terre. Mais quoique cela soit vrai astronomiquement, il y a toujours une absurdité physique, à laquelle on ne sauroit se prêter, de faire tourner le soleil, accompagné d'un si grand nombre d'astres, autour d'un atôme comme la terre.

3112. La comète de 1729, que M. Cassini observa pendant plusieurs mois, après avoir fait plus de 15° vers l'occident, depuis la tête du petit Cheval jusques sur la constellation de l'Aigle, se courba subitement pour retourner vers l'orient, ce qui montroit d'une manière frappante l'effet de la parallaxe annuelle. Celle qui fut apperçue le 8 Janvier 1760 près de κ d'Orion, fit autant de chemin du 8 au 9 en un seul jour, qu'elle en fit dans les trois jours suivans du 9 au 12, suivant les observations que nous fîmes tous à Paris; une semblable inégalité marque bien sensiblement l'effet de la parallaxe annuelle. Il pourroit arriver des cas où cet effet seroit bien plus grand : si une comète rétrograde dont la distance à la terre seroit égale à la distance moyenne de la lune, se trouvoit périhélie & en opposition, elle auroit 140° de mouvement par heure; il pourroit arriver par-là qu'on vît une comète aller depuis l'horizon jusqu'au zénit en moins de trois quart-d'heure, & employer ensuite plus de quatre heures à gagner l'horison occidental, (*Mém. acad.* 1760, *pag.* 108).

Effet singulier de cette parallaxe annuelle.

3113. Les Inégalités dont je viens de parler, sont purement apparentes, mais je dois dire un mot d'une autre irrégularité qu'on a reconnue en 1759, & qui affecte le mouvement réel & intrinséque de toutes les comètes dans leurs ellipses, c'est l'attraction des autres corps célestes; celle de Jupiter & de Saturne est la plus remarquable; mais il y a grande apparence que les attractions des autres planètes & des autres comètes peut y influer sensiblement.

Effets de l'attraction sur les comètes.

3114. La loi générale de l'attraction s'est manifestée de la manière la plus frappante dans le retour de la comète de 1682, observé en 1759. Sa période entre le passage par le périhélie du 26 Octobre 1607, & celui du 14 Sept. 1682, a été plus petite de 585 jours que la période suivante qui s'est terminée au 13 Mars 1759. On devoit bien s'y attendre à en juger par les inégalités de Saturne; car une comète qui s'éloigne du soleil une fois autant que Saturne, & dont la vîtesse & la tendance vers le soleil deviennent beaucoup plus petites dans la partie supérieure de son orbe, se trouve bien plus susceptible des modifications & de l'impression des autres forces, c'est-à-dire, des attractions qu'exercent sur elle toutes les planètes qu'elle rencontre.

3115. Lorsqu'on commençoit à parler en 1757 du retour de cette comète prédite par M. Halley, on s'apperçut que l'inégalité de ses périodes précédentes nous laissoit près d'une année d'incertitude sur le temps de son apparition; M. Halley avoit remarqué que cette comète en 1681 passant fort près de Jupiter en avoit dû être fortement attirée, & que cela pourroit retarder l'apparition suivante jusqu'au commencement de 1759. Mais cette considération étoit trop vague pour qu'on dût y compter, & M. Halley n'y comptoit pas lui-même; je proposai à M. Clairaut d'y appliquer sa théorie de l'attraction, ou du problême des trois corps, en lui offrant tous les calculs astronomiques dont il avoit besoin; je lui donnai les situations de la comète, & les forces que Jupiter & Saturne avoient exercées sur elle pendant l'espace de 150 ans, ou de deux révolutions, soit dans la direction des rayons vecteurs, soit

perpendiculairement aux rayons (3441), avec les ordonnées & les surfaces de toutes les courbes qui représentoient les intégrales des équations du problême (3500, 3508). Par ce moyen M. Clairaut trouva que la révolution de la comète devoit être de 611 jours plus grande que celle de 1607 à 1682, dont 100 jours pour l'action de Saturne, & 511 pour celle de Jupirer. Suivant ces premiers calculs la comète devoit passer dans son périhélie au milieu d'Avril, (Voyez ma *Théorie des comètes* 1759, *pag.* 110); elle y passa le 13 Mars, & malgré l'immensité des calculs que nous fîmes à cette occasion, M. Clairaut & moi, les quantités négligées produisirent environ un mois d'erreur dans la prédiction; mais M. Clairaut l'avoit prévu, & il a fait voir ensuite, que l'erreur se réduisoit à 22 jours, & qu'il y auroit des moyens de pousser l'approximation assez loin pour rendre l'erreur encore moindre. Les recherches de M. Clairaut sur cette matière se trouvent en abrégé dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762, & plus en détail dans sa *Théorie du mouvement des Comètes*, *in*-8° 1760 241 pages, à Paris, chez *Lambert*. On trouvera aussi de très-belles recherches de M. d'Alembert sur le même sujet, dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques*, *pag.* 97 *& suiv.* & dans la pièce de M. *Albert Euler*, qui a remporté en 1762 le prix proposé par l'académie de Péterslbourg, concurremment avec M. Clairaut.

Auteurs qui ont écrit là-dessus.

3116. Toutes les comètes que j'ai vues étoient d'une lumière si foible, si pâle, si éteinte, qu'il y a lieu de croire que leur substance a peu de densité, & qu'elles ont très-peu de masse; ainsi les dérangemens que peuvent causer leur attraction sont peu considérables; de toutes les comètes que nous connoissons, il n'y en a aucune qui puisse approcher assez de la terre pour y produire d'effet sensible; celle de 1533 est la seule qui puisse en approcher de 300 mille lieues. Mais parmi le grand nombre de celles que nous ne connoissons pas, il pourroit y en avoir qui fussent capables d'y causer des révolutions. On peut voir à ce sujet les hypothèses les plus savantes &

les plus ingénieufes, dans M. de Buffon, *Hift. nat. tom.* 1. Whifton attribue auffi le déluge à la queue d'une comète (3095). La comète de 1680, n'étant éloignée du foleil dans fon périhélie que de la 6e partie du diamètre folaire, il pourroit arriver par la réfiftance de l'atmofphère du foleil, & l'attraction des autres comètes dans fon aphélie, qu'elle retombât dans le foleil; c'eft ainfi, dit Newton que la belle étoile de 1572 a pu paroître tout d'un coup, étant ranimée & augmentée par une abondance de matière nouvelle.

Des queues & des chevelures des comètes.

3117. Les anciens ont tiré le nom des comètes de cette lumière inégale dont elles paroiffent communément environnées (3000), & ils les ont diftinguées par ce moyen en plufieurs efpèces, Pline (II. 25); Hévélius, *in cometographia*. Cependant il a paru quelquefois des comètes fans queue ni chevelure (3000); mais celles dont les queues ont paru les plus longues, font les fuivantes.

Comètes dont les queues furent très-grandes.

Celle dont parle Ariftote, qui vers l'an 371 avant J. C. occupoit le tiers de l'hémifphère, ou environ 60°. Celle dont parle Juftin (*Liv.* 37), & qui parut à la naiffance de Mithridate, 130 ans avant J. C. étoit fi terrible qu'elle fembloit embrafer tout le ciel, elle occupoit 45°. Une autre comète, au rapport de Séneque (*VII.* 15), couvroit toute la voie lactée, vers l'an 135. La comète de 1456 occupoit 2 fignes ou 60° (Pontanus, *in centiloquio*); & celle de 1460 en occupoit environ 50, fuivant le même auteur. La comète de 1618 avoit une queue au moins de 70°, fuivant Képler, & même de 104°, fuivant Longomontanus, le 10 Décembre 1618. On peut voir les mefures d'un grand nombre d'autres queues de comètes dans le P. Riccioli, (*Alm. II.* 25); mais depuis ce temps-là on a vu la comète de 1680, l'une des plus étonnantes qui eût jamais paru, par l'étendue de fa queue, (Voyez le traité de M. Caffini fur la comète de 1680 & 1681). La comète de 1744 s'eft montrée de nos jours avec une lumière en éventail ou une queue divifée en plufieurs branches, qui étoit très-remarquable, & qui s'étendit le 19 Fév. jufqu'à 30°. Voy. le *Traité de la comète de* 1744, *par M. de Chefeaux*;

à Lausanne & à Genève, *in*-8°. 1744, *pag.* 155. Dans les pays méridionaux où l'on jouit d'un ciel pur & serein, les queues de comètes se distinguent mieux & paroissent plus longues; la comète de 1680 avoit une queue de 62° à Paris, suivant M. Cassini, & de 90° à Constantinople; celle de 1759 parut à Paris presque sans queue, on avoit beaucoup de peine à en distinguer une légere trace d'un ou de deux degrés; tandis qu'à Montpellier, suivant M. de Ratte, la queue avoit 25° le 29 Avril, la partie la plus lumineuse étant de 10°. M. de la Nux, correspondant de l'académie, à l'Isle de Bourbon, la vit même beaucoup plus grande. Enfin la queue de la comète de 1769 paroissoit d'environ 10° à Paris, de 40° à Marseille, de 70° à Bologne, de 90° à M. Pingré qui étoit sur Mer, entre Ténériffe & Cadix (*Mém. acad.* 1769, *pag.* 54); mais elle étoit très-foible; c'est ainsi que dans la Zone torride la lumière zodiacale paroît constamment, & de plus de 100 degrés de longueur.

3118. Séneque savoit que les queues des comètes sont transparentes, & qu'on voit les étoiles au travers, (*liv. VII. c.* 18). Newton fait voir qu'elles sont d'une substance infiniment plus tenue & plus rare qu'on ne sauroit l'imaginer.

Appian fut le premier qui prouva que les queues des comètes étoient toujours à peu-près opposées au soleil (*Astronomicum Cæsareum*, 1540); cette règle fut confirmée alors par Gemma Frisius, Cornelius Gemma, Fracastor, Cardan; cependant Tycho-Brahé ne croyoit pas qu'elle fût bien générale ni bien démontrée, (*de com. anni* 1577, *pag.* 180); mais cette loi est actuellement reconnue. On apperçoit seulement une courbure qui est une suite de la position de la terre hors du plan de l'orbite de la comète, & du mouvement de celle-ci (*Hévélius, in cometog.* Cassini, sur la comète de 1680, *pag.* x. Newton, *l. III.*). Direction des queues de comètes.

3119. LA QUEUE des comètes, suivant Newton, vient de l'atmosphère propre de chaque comète, (*Princ. mat. liv. III. prop.* 41). Les fumées & les vapeurs peu- Cause de la queue des comètes.

vent s'en éloigner, dit-il, ou par l'impulſion des rayons ſolaires, comme le penſoit Képler, ou plutôt par la raréfaction que la chaleur produit dans ces atmoſphères.

Il confirme ce ſentiment par la comète de 1680, qui au mois de Décembre après avoir paſſé fort près du ſoleil, répandoit une lumière beaucoup plus longue & plus brillante qu'elle n'avoit fait au mois de Novembre avant ſon périhélie; cette règle eſt même générale, & lui paroît ſuffiſante pour prouver que la queue des comètes n'eſt qu'une vapeur très-légere, élevée du noyau de la comète par la force de la chaleur. M. Euler y ajoute l'impulſion de la lumière (*Mém. de Berlin*, année 1746, *pag.* 121). On n'a guère vu de queue plus grande que celle de la comète de 1680, parce qu'on n'a guère vu de comète paſſer ſi près du ſoleil; le 18 Décembre 1680 elle en étoit 166 fois plus près que la terre. Cette comète recevoit une chaleur 28000 fois plus grande que celle que nous éprouvons au ſolſtice d'été; la chaleur de l'eau bouillante eſt trois fois plus grande que celle qu'une terre ſèche reçoit alors du ſoleil, & la chaleur d'un fer rouge trois ou quatre fois plus grande que celle de l'eau bouillante, ſuivant l'eſtimation de Newton; ainſi la comète de 1680 dut être échauffée environ deux mille fois plus qu'un fer rouge, & un globe de fer de même diamètre auroit conſervé ſa chaleur plus de 50000 ans, (Newton, *Tom. III*, *pag.* 640 *édit. de* 1742; *Phil. tranſ. n°* 270). M. de Buffon eſtime que ce calcul de Newton doit être réformé dans pluſieurs points, & il ſe propoſe de publier des expériences très-curieuſes ſur la chaleur & le refroidiſſement des métaux.

Chaleur de la comète de 1680.

Explication de M. Mairan.

L'atmoſphère du ſoleil a été employée par M. de Mairan, pour expliquer la formation des queues des comètes dans ſon traité ſur les aurores boréales (849). Il faut voir auſſi l'explication du P. Boſcovich, dans la diſſertation imprimée à Rome en 1746.

Comètographie de M. Pingré.

Je finis cet article des comètes, en annonçant un traité ſur la même matière où M. Pingré nous promet l'hiſtoire, les obſervations & les théories des comètes dans le plus grand détail.

LIVRE VINGTIÈME.

DE LA ROTATION DES PLANETES, & de leurs Taches.

NOUS ſavons que la terre tourne chaque jour ſur ſon axe par un mouvement de rotation (1072) : nous ſommes aſſurés que le ſoleil, la Lune, Jupiter, Mars & Vénus tournent auſſi ſur leur axe ; ce ſont ces différentes rotations qui feront l'objet de ce vingtième livre.

3120. LA ROTATION des planètes eſt abſolument indépendante de leur révolution ; une planète peut ſuivre ſon orbite par un mouvement de tranſlation d'occident en orient, ſans tourner ſur ſon axe ; & elle peut tourner ſur un axe quelconque, en ſens contraire, & avec une vîteſſe quelconque ; une toupie tourne ſur une table, ou ſur ſon pivot, quoiqu'on l'ait jettée en l'air à une aſſez grande diſtance, & quoiqu'on tranſporte la table d'un côté ou d'un autre ; ainſi le mouvement de rotation eſt abſolument indépendant du mouvement de révolution que nous avons conſidéré dans le VIe livre ; ce n'eſt que par les obſervations qu'on peut le déterminer, & c'eſt ce que nous allons entreprendre.

La rotation eſt indépendante de la révolution.

3121. Jean Bernoulli dans un mémoire de Dynamique, où il conſidère les centres ſpontanés de rotation, fait voir qu'une force de projection appliquée, non pas au centre de la terre, mais un peu plus loin du ſoleil, & cela de $\frac{1}{150}$ du rayon, donneroit à la terre, ſuppoſée ronde & homogène, deux mouvemens aſſez conformes à ceux que l'on obſerve ; pour Mars il trouve $\frac{1}{418}$; pour Jupiter $\frac{7}{19}$, (Bern. *Op. T. IV, pag.* 283) ; pour la lune on trouve $\frac{1}{150}$ (3184). Si l'impulſion primitive eût été appliquée à de plus grandes diſtances de chaque centre, le mouvement de rotation ſeroit plus rapide.

Impulſion capable de la produire.

3122. Nous ne voyons aucune liaiſon néceſſaire en-

tre les durées des rotations, & celles des révolutions; cependant M. le Chevalier de Goimpy dans le journal des Savans (Janv. 1769) a donné des rapports qui pourroient tenir à une loi générale, & M. de Mairan s'en étoit déja occupé, (*Mém. acad.* 1729).

3123. La rotation du soleil est la première qui ait été découverte, & c'est aussi la plus sensible; les taches qui paroissent de temps en temps sur le soleil ont fait découvrir ce mouvement, & nous servent encore à l'observer. La première découverte des taches du soleil est contenue dans un grand ouvrage intitulé: *Rosa* (a) *Ursina, sive Sol ex admirando facularum & macularum suarum phœnomeno varius, à Christophoro Scheiner, Germano Suevo, è Societate Jesu*, 1630, *in-folio* 774 pages; l'impression de cet ouvrage fut commencée en 1726, à Bracciano en Italie, & finie au mois de Juin 1630.

Découverte des taches du Soleil.

3124. Le P. Scheiner étoit Professeur de Mathématiques à Ingolstadt au mois de Mars 1611, lorsqu'en regardant un jour le soleil avec une lunette d'approche, au travers de quelques nuages, il apperçut pour la première fois les taches du soleil, & les fit voir au P. Cysati & à plusieurs de ses Disciples; le bruit s'en répandit bientôt: on sollicita le P. Scheiner de publier cette découverte; mais comme ce phénomène paroissoit fort contraire aux principes de la Philosophie de ce temps-là, ses supérieurs craignirent qu'il ne vînt à se compromettre, & ses premières observations ne furent publiées que sous un nom supposé, *Appelles post tabulam*, par un Magistrat d'Augsbourg, nommé Velser, à qui le P. Scheiner en avoit écrit le détail aux mois de Novembre & de Décembre 1611, & qui publia ses trois lettres le 5 Janvier 1612, (*Rosa Urs. pag.* 18).

3125. Galilée écrivit contre Scheiner en 1619, dans son discours sur la comète de 1618, & en 1623, dans son ouvrage qui a pour titre *Il Saggiatore*, (c'est-à-dire, celui

(a) Le nom de *Rosa Ursina* vient de la rose qui est une partie des armoiries d'un Duc de Bracciano de la Maison des Ursins, à qui ce livre fut dédié.

qui pese), il l'accusa de plagiat & prétendit avoir découvert ces taches le premier ; Scheiner s'en justifie fort au long dans son ouvrage ; Jean Fabricius, fils de David Fabricius les avoit aussi observées à Vitemberg, & il en publia même la relation au mois de Juillet 1611, Képler pense qu'il les avoit vues avant le P. Scheiner, (*Ephem. pag.* 17, Weidler, *pag.* 435).

Mais quoi qu'il en puisse être de celui à qui le hazard les a pu faire voir pour la première fois, il est sûr que personne ne les observa aussi bien, & n'en donna la théorie d'une manière aussi complette que le P. Scheiner ; son ouvrage a 774 pages sur cette seule matière, & cela suffit pour faire voir avec quelle assiduité il s'en occupa, & combien il donna d'étendue à ses recherches. Hévélius le cite avec les plus grands éloges ; *incomparabilis & omnigenæ eruditionis.... ut hac in materia omnibus palmam quasi præripuisse dici possit* (*Selenog. pag.* 82).

3126. Les taches du soleil sont des parties noires irrégulieres qu'on apperçoit de temps en temps sur le soleil, & qui paroissent tourner uniformément en 25 jours & 14 heures autour du soleil (3160); on en voit une représentée en *N* (*fig.* 268), sur le disque du soleil. Définition des taches. *Pl. XXXVII. Fig.* 268.

Les facules dont Scheiner & Hévélius parlent souvent, me paroissent n'être autre chose que le fond lumineux du soleil qu'on apperçoit quelquefois dans les interstices des taches ou des ombres, & qui leur a fait croire que c'étoient des points plus lumineux que le reste du soleil. M. Cassini dit cependant aussi qu'on a vu sur le soleil des points plus brillans que le reste de sa surface (*Elem. d'ast.* 403), mais il appelle facules des taches légères & foibles que l'on apperçoit quelquefois à l'endroit même où une tache a disparu, (*Anciens mém. Tom. X, pag.* 661).

3127. Les ombres sont une nébulosité blanchâtre qui environne toujours les grandes taches ; Hévélius les compare à l'impression que l'haleine fait sur une glace de miroir en ternissant son éclat, (*Selen. pag.* 84) ; quelquefois, dit-il, cette atmosphère des taches est jaunâtre *instar halonis*, & il en donne un exemple (*pag.* 500) ; quel- Ombres sur le Soleil.

quefois ces ombres se trouvent toutes seules, & donnent ensuite naissance à des taches, comme il l'observa au mois d'Août 1643 (*Ibid. pag.* 86 & 508); ces ombres sont souvent d'une très-grande étendue. Hévélius en a vu une au mois de Juillet 1643 qui occupoit près du tiers du diamètre du soleil, (*pag.* 506).

On voit spécialement la manière dont Hévélius se représentoit les ombres & les facules, dans l'exemplaire de sa Sélénographie qu'il envoya à Louis XIV, & qui se conserve dans la Bibliothèque du Roi; toutes les planches y ayant été enluminées avec beaucoup de soin par l'auteur même; ou sous ses yeux.

Effet des taches.

3128. Les taches du soleil servent à expliquer divers phénomènes racontés dans les historiens. Ainsi dans les annales de France imprimées à Paris en 1588, (*Vie de Charlemagne*, *p.* 62), on trouve que l'an 807, XVI. *kal. April.* Mercure parut sur le soleil comme une petite tache noire, qu'on apperçut en France pendant huit jours, & que les nuages empêchèrent d'observer dans quel temps se fit l'entrée & la sortie; il a été prouvé (2000), que ce ne pouvoit être autre chose qu'une grosse tache; il en faut dire autant de ce que crut voir Scaliger (*Exerc.* 72 *contra Card.*), & Képler même le 28 Mai 1607. Scheiner (*p.*609) explique aussi par le moyen des taches du soleil plusieurs singularités qu'on trouve dans les historiens sur la diminution de lumière dans le soleil.

C'est à d'énormes taches du soleil qu'il faut rapporter, si on veut les admettre, les deux faits qui sont dans Abulfaradge (*Hist. Dynast. pag.* 94, 99). L'an 535 le soleil eut une diminution de lumière, qui dura 14 mois, & qui étoit très-sensible; l'an 626 la moitié du disque du soleil fut obscurcie, & cela dura depuis le mois d'Octobre jusqu'au mois de Juin. On voit souvent ces taches à la vue simple avec un simple verre fumé; le 15 Avril 1764, M. d'Arquier à Toulouse en vit une fort grosse, & tout le monde la voyoit avec lui sans le secours des lunettes d'approche.

Après la découverte des taches du soleil, le P. Scheiner les observa assidument; il avoit soin de rapporter à

l'écliptique les taches dont il obſervoit la ſituation par rapport au vertical, ou aux parallèles à l'équateur; par ce moyen il décrivoit ſur un carton la route d'une tache pendant les 13 jours de ſon apparition. On en trouve un très-grand nombre de gravées dans ſon ouvrage, depuis 1618, juſqu'en 1627; & elles lui firent reconnoître les règles ſuivantes (*Roſa Urſ. pag.* 225).

3129. A la fin de Mai & au commencement de Juin, les taches décrivent des lignes droites inclinées ſur l'écliptique du nord au ſud, c'eſt-à-dire, qu'elles vont de *A* en *B* (*fig.* 268). A la fin de Novembre ou au commencement de Décembre, elles décrivent des lignes droites en allant du midi au ſeptentrion, ou de *C* en *D*; pendant l'hiver & le printemps, leur route eſt concave vers le midi, & convexe du côté du nord; mais dans les ſix autres mois, ou depuis le commencement de Juin, juſqu'au commencement de Décembre, la concavité eſt tournée vers le nord, comme dans l'ellipſe *RXVMO*.

Mouvement des taches.

Fig. 268.

La plus grande ouverture de ces ellipſes arrive au commencement de Mars & de Septembre; alors le petit axe de chaque ellipſe eſt $\frac{13}{100}$ du grand axe. Toutes les taches du ſoleil, même les ombres & les facules décrivent des routes ſemblables, depuis le moment où elles paroiſſent juſqu'à celui de leur diſparition; on obſerve la même choſe dans les petites & dans les grandes, dans celles qui ne durent que quelques jours, comme dans celles qui font pluſieurs révolutions; dans celles qui traverſent le ſoleil par le centre, comme dans celles qui ſont près de ſes poles. Cette régularité ſuffit ſeule pour démontrer que ces taches ſont adhérentes au corps du ſoleil, & qu'elles n'ont d'autre mouvement que celui du ſoleil même autour de ſon axe. Les taches prouvent donc la rotation du ſoleil, & le P. Scheiner en tira bientôt cette concluſion.

Mouvement de rotation dans le Soleil.

3130. Preſque toutes les obſervations de Scheiner furent enſuite confirmées par celles d'Hévélius (*Selenog. pag.* 96); M. Caſſini les obſerva beaucoup auſſi; il en parla dans un petit ouvrage publié en 1673, & qui a pour titre *Découverte de deux nouvelles planètes autour de Saturne*,

& dans plusieurs volumes des mémoires de l'académie. M. Picard fit aussi quelques observations des taches du soleil, en 1676 & 1679 (*Hist. céleste* 1741) : M. de la Hire en a aussi donné quelques-unes (*Mém.* 1700, 1702, 1704. *Histoire de l'acad.* 1700, 1701, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1713, 1714, 1715, 1716, 1719, 1720).

Taches qui disparoissent.

Il résulte de toutes ces observations que les taches du soleil sont très-variables ; Scheiner en a vu changer de forme, croître, diminuer, se convertir en ombres, disparoître totalement. M. de la Hire a vu aussi des taches se dissiper sur le disque apparent du soleil (*Mém.* 1702, *pag.* 137). Il y a des taches qui après avoir disparu long-temps reparoissent au même endroit ; M. Cassini pensoit que la tache du mois de Mai 1702, étoit encore la même que celle du mois de Mai 1695 (*Mém. acad.* 1702, *pag.* 140), c'est-à-dire, qu'elle étoit au même endroit. On n'en a guère vu qui ayent paru plus long-temps que celle qui fut observée à la fin de 1676 & au commencement de 1677 ; elle dura pendant plus de 70 jours, & parut dans chaque révolution (M. Cassini, *Elémens d'astron.* *pag.* 81).

Durées des taches.

Temps de leurs apparitions.

3131. Les apparitions des taches du soleil n'ont rien de régulier : vers l'année 1611 qu'elles furent découvertes, on ne trouvoit presque jamais le soleil sans quelques taches ; il y en avoit souvent un très-grand nombre. Le P. Scheiner en a compté 50 tout à la fois. Bientôt elles devinrent plus rares : depuis l'année 1650, jusqu'en 1670 il n'y a pas de mémoire qu'on en ait pu trouver plus d'une ou deux, qui furent observées fort peu de temps (M. Cassini, *pag.* 82). Depuis 1695 jusqu'en 1700 l'on n'en vit aucune ; depuis 1700 jusqu'en 1710, les volumes de l'académie en parlent continuellement ; en 1710 on n'en vit qu'une seule ; en 1711 & 1712, on n'en observa point du tout ; en 1713 on n'en vit qu'une, au mois de Mai (*Mém. acad.* 1713). Depuis ce temps-là, on en a presque toujours vu : M. Cassini écrivoit en 1740 (*Elém. d'astron.* *pag.* 82), « elles sont présentement si fréquentes qu'il est » très-rare d'observer le soleil sans en appercevoir quel-

Elles sont fréquentes actuellement.

» ques-unes, & même souvent un assez grand nombre à la » fois » : pour moi je puis dire que depuis 1749, jusqu'à 1771, je ne me rappelle pas d'avoir jamais vu le soleil sans qu'il y eût des taches sur son disque, & souvent un grand nombre. C'est vers le milieu du mois de Septembre 1763, que j'ai apperçu la plus grosse & la plus noire que j'eusse jamais vue, elle avoit une minute au moins de longueur, ensorte qu'elle devoit être trois fois plus large que la terre entière ; j'en ai vu aussi de très-grosses le 15 Avril 1764, & le 11 Avril 1766.

3132. Les taches du soleil paroissent sur le bord de son disque extrêmement étroites, comme un trait fort délié, ce qui prouve qu'elles ont peu de hauteur, ou plutôt qu'elles sont à la surface même du soleil ; il faut cependant considérer que quand elles auroient une très-grande hauteur elles pourroient bien ne paroître pas au bord ou à l'extrémité du soleil, parce qu'elles n'ont aucune lumière, & qu'on ne les voit que quand elles interrompent la lumière du disque solaire ; mais du moins si elles avoient une certaine hauteur, on verroit la hauteur toute entière aussitôt qu'elle commenceroit à être toute projettée sur le soleil.

3133. Quelques Physiciens crurent autrefois que les taches du soleil étoient des corps solides qui faisoient leur révolution autour du soleil ([a]), mais si cela étoit, les taches nous cacheroient à peu-près la même portion du soleil soit sur les bords, soit au milieu ; & le temps qu'elles paroissent sur le soleil seroit plus court que le temps où on les perd de vue, au lieu que nous voyons ces taches employer autant de temps à parcourir la partie antérieure du soleil, que la partie postérieure, sauf la petite différence que doit produire la grosseur du diamètre du soleil, & la proximité de ces taches à l'un des poles du soleil ; enfin ces planètes ne pourroient pas devenir invisibles pendant des années entières (3131), & faire toutes leurs révolutions chacune dans le même intervalle de temps.

Sentimens sur leur nature.

([a]) Tarde les nomma *Sydera Borbonia*, & Maupertuis *Sydera Austriaca* ; (*Hevelii Selen. pag.* 83).

3134. Galilée, qui n'étoit point attaché au systême de l'incorruptibilité des cieux, pensa que les taches du soleil étoient une espèce de fumée, de nuage, ou d'écume qui se formoit à la surface du soleil, & qui nageoit sur un océan de matière subtile & fluide; Hévélius étoit aussi de cet avis (*Selen. pag.* 83), & il réfute fort au long à cette occasion le systême de l'incorruptibilité des cieux.

3135. Mais il me paroît évident que si ces taches étoient aussi mobiles que le supposent Galilée & Hévélius, elles ne seroient point aussi régulières qu'elles le sont dans leur cours; d'ailleurs la force centrifuge que produit la rotation du soleil, les porteroit toutes vers un même endroit, au lieu que nous les voyons, tantôt aux environs de l'équateur solaire, tantôt du côté des poles; enfin elles reparoissent quelquefois précisément au même point où elles avoient disparu (3130); ainsi je trouve beaucoup plus probable le sentiment de M. de la Hire (*Histoire acad.* 1700, *pag.* 118. *Mém.* 1702, *pag.* 138). Il pense que les taches du soleil ne sont que les éminences d'une masse solide, opaque, irrégulière, qui nage dans la matière fluide du soleil & s'y plonge quelquefois en entier. Peut-être aussi ce corps opaque n'est que la masse du soleil récouverte communément par le fluide igné, & qui par le flux & le reflux de ce fluide se montre quelquefois à la surface, & fait voir quelques-unes de ses éminences. On explique par-là d'où vient que l'on voit ces taches sous tant de figures différentes pendant qu'elles paroissent, & pourquoi après avoir disparu pendant plusieurs révolutions elles reparoissent de nouveau à la même place qu'elles devroient avoir si elles eussent continué de se montrer. On explique par-là les facules, & cette nébulosité blanchâtre dont les taches sont toujours environnées (3127), & qui sont les parties du corps solide sur lequel il ne reste plus qu'une très-petite couche de fluide. Cependant M. de la Hire pensoit d'après quelques observations qu'il falloit admettre plusieurs de ces corps opaques dans le soleil, ou supposer que la partie noire pouvoit se diviser & ensuite se réunir.

Cause des taches du soleil.

De

De l'Equateur solaire, & de la rotation du Soleil.

3136. LES TACHES DU SOLEIL ont fait connoître que le soleil tournoit sur lui-même autour de deux points, qu'on doit appeller les poles du soleil; le cercle du globe solaire qui est à même distance des deux poles (15) s'appellera l'équateur solaire; c'est par le mouvement apparent des taches qu'on déterminera la situation de cet équateur, c'est-à-dire, son inclinaison & ses nœuds sur l'écliptique. M. Cassini communiqua à l'académie, dès l'année 1675, sa méthode pour trouver la révolution du soleil, la situation de ses poles & le mouvement apparent des taches (*Du Hamel, hist. acad. pag.* 144. *Anciens Mém. t.* 10. *pag.* 578 & 727).

Méthode pour connoître l'équateur solaire.

M. de l'Isle, qui en 1713 observoit beaucoup les taches du soleil au Palais du Luxembourg à Paris, se forma une méthode qu'il explique en détail dans ses *mémoires pour servir à l'histoire de l'astronomie*, &c. 1738, *pag.* 144. On trouvera aussi dans les élémens de M. Cassini, une méthode graphique pour le même objet; mais dans laquelle il ne fait point entrer le mouvement de la terre, se contentant d'avertir qu'il faut y avoir égard; je vais bientôt expliquer plusieurs manières de déterminer exactement l'équateur solaire, & la durée de sa rotation, lorsqu'on a trois observations d'une même tache sur le soleil; ces méthodes seront également appliquables à l'équateur de la lune (3188).

3137. La manière d'observer les taches du soleil est la même que pour les passages de Vénus; on y emploie le quart de cercle (2117) ou le réticule (2136). Scheiner & Hévélius recevoient l'image du soleil dans une chambre obscure au travers d'une lunette (2481). Nous préférons aujourd'hui de regarder directement le soleil, & de déterminer la différence de hauteur & d'azimut ou la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la tache & le centre du soleil, pour en déduire la

De l'observation des taches.

différence de longitude & de latitude; car c'est toujours là qu'il faut parvenir (2129, 2138).

3138. Quand on aura observé plusieurs jours de suite la différence de longitude & de latitude entre la tache & le centre du soleil on les rapportera sur un carton, pour juger de leur progrès; soit *S* (*fig.* 268) le centre du disque solaire; *SE* une portion de l'écliptique, *M* une tache, *SL* la différence de longitude, & *ML* la différence de latitude entre le soleil & la tache; *X*, *V*, *M*, *O*, les positions successives de la tache sur son parallèle apparent *RO*, l'on verra facilement que ces positions forment à peu-près une ellipse, si ce n'est vers le commencement de Juin & de Décembre où cette ellipse se réduit à une ligne droite.

Fig. 268.

Ouverture des ellipses.

3139. L'ouverture apparente des ellipses que décrivent les taches du soleil est proportionnelle à l'inclinaison du rayon visuel, ou à l'élévation de la terre au-dessus du plan de l'équateur solaire, & cette élévation doit se mesurer au centre du soleil; soit *S* le centre du soleil (*fig.* 269), *EAQV* le plan de l'équateur solaire, *ST* la ligne dirigée vers la terre qui est toujours dans le plan de l'écliptique, & qu'il faut concevoir relevée au-dessus de la figure; l'angle *TSV* est l'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'équateur solaire; c'est l'obliquité sous laquelle nous voyons ce cercle équatorial; & le sinus de cet angle sera le petit axe de l'ellipse, le grand axe étant le sinus total (1828, 2927). Ainsi en voyant que le petit axe de ces ellipses est $\frac{13}{100}$ de leur grand axe, au temps où elles sont les plus ouvertes, c'est-à-dire, au commencement de Mars & de Septembre, on en peut conclure que l'équateur du soleil n'est jamais incliné à notre œil de plus de $7^{\circ}\frac{1}{2}$; l'angle *TSV* est la latitude héliocentrique de la terre par rapport à l'équateur du soleil; l'argument de cette latitude est la distance de la terre au nœud de l'équateur solaire, ou au 10e degré du Sagittaire (3161). Pour trouver en tout temps l'ouverture des ellipses que décriront les taches, il suffit de mul-

Fig. 269.

tiplier le ſinus de $7^{\circ}\frac{1}{2}$ par le ſinus de la diſtance de la terre ou du ſoleil à l'un des nœuds. Fig. 269.

3140. La règle précédente, pour trouver l'ouverture de ces ellipſes, ſuppoſe que la terre ſoit immobile pendant la durée de l'apparition d'une tache ; le mouvement de la terre rend le grand axe plus long, ou plutôt il empêche que la trace ne ſoit réellement une ellipſe ; & les règles précédentes ne ſont bien exactes qu'après qu'on a réduit les obſervations à ce qu'elles donneroient ſi la terre ou le ſoleil euſſent été immobiles pendant l'intervalle de ces obſervations. En effet, la terre qui s'élève continuellement au-deſſus du plan de l'équateur ſolaire, ne permet pas que le cercle décrit par la tache paroiſſe jamais exactement ſous la forme de la ligne droite, ni de l'ellipſe qui auroit lieu ſi la terre étoit immobile ; ou du moins c'eſt une ellipſe qui change tous les jours de forme ; ainſi cette trace apparente, ou cette courbe décrite ſur un carton ne nous ſert qu'à reconnoître le progrès ou l'exactitude des obſervations, & à nous conduire dans le calcul.

3141. La différence de longitude SL (*fig.* 268), & la différence de latitude LM, étant connues (2129), on en déduira la ligne SM, & l'angle LSM ; cette ligne droite SM priſe ſur le diſque apparent du ſoleil eſt la projection ou le ſinus d'un arc du globe ſolaire dont le centre eſt au centre S de ce globe ; tout ainſi que nous avons vu dans le calcul des éclipſes de ſoleil que les arcs de la circonférence de la terre projettés ſur un plan devenoient égaux à leurs ſinus (1826). Pour connoître l'arc du globe du ſoleil qui répond à la ligne droite SM, ou l'arc de diſtance, on fera cette proportion, le rayon du ſoleil réduit en ſecondes eſt au coſinus du demi-diamètre du ſoleil, comme la longueur SM, eſt au ſinus de l'arc qui lui répond, & l'on aura l'arc ou l'angle ſous lequel un obſervateur ſitué au centre du ſoleil verroit la tache M éloignée de la terre ; car la terre paroît répondre au point S, ou au pole même du cercle $AROBD$, qui eſt le limbe du ſoleil vu de la terre. Fig. 268. Arc de diſtance.

3142. La règle que je viens de donner pour cette réduction est plus exacte que celle qu'avoit donnée Mayer. Pour sentir la vérité de la mienne, il suffit de considérer le rayon *TG* (*fig.* 270) qui touche le disque solaire en *G*, & forme avec *CAT* l'angle du demi-diamètre apparent *CTG*; si cet angle est de 15′, l'angle *TCG* est de 89° 45′, & c'est exactement la perpendiculaire *GH* ou le sinus de 89° 45′ qui répond à 15′ ou à 900″; ainsi il faudra dire, 900″ est au sinus de 89° 45′, comme le nombre de secondes observé pour une distance *BE* est au sinus des degrés & minutes de l'arc *AB* qui lui répond.

Fig. 270.

Longitude de la tache.

Fig. 271.

3143. Nous pouvons actuellement déterminer la longitude héliocentrique de la tache, & sa latitude vue du soleil. Soit *P* & *E* (*fig.* 271) les poles de l'écliptique sur le globe du soleil, *PREK* le grand cercle qui sépare l'hémisphère tourné vers la terre de l'hémisphère opposé; *T* le point du globe solaire où répond la terre, c'est-à-dire, le point qui a la terre à son zénit, ou qui nous paroît répondre au centre même du disque solaire, *M* le point où est la tache, *TM* l'arc de distance déterminé par le calcul précédent (3141); l'angle *MTP* formé par le cercle de latitude *PT* & par le cercle *TM* qui joint le lieu de la terre avec celui de la tache, est composé d'un angle droit *PTL*, & de l'angle sphérique *LTM* qui est le même que l'angle plan *LSM* de la figure 268, déterminé par observation (3141). Dans le triangle sphérique *MTP* formé sur la convexité du globe solaire, l'on connoît *PT* qui est toujours de 90°, *TM* qui est l'arc de distance, & l'angle *PTM*; on cherchera l'angle *TPM* qui est la différence de longitude entre le lieu de la terre & le lieu de la tache qui répond au point *L* de l'écliptique; l'on trouvera aussi *PM* qui est la distance de la tache au pole boréal de l'écliptique, d'où l'on déduira facilement la latitude héliocentrique *LM* de cette tache. S'il s'agissoit d'une tache de la lune, il y auroit quelques considérations de plus (3189).

Latitude de la tache.

3144. On ajoutera la différence de longitude trouvée avec la longitude de la terre (c'est-à-dire, celle du soleil

augmentée de 6 signes) ; si le point *L* est réellement à la droite, ou à l'occident du centre du soleil (*fig.* 268 & 271); on la retranchera si la tache est dans la partie orientale du soleil, c'est-à-dire, si elle n'a pas encore passé sa conjonction apparente, & l'on aura la longitude de la tache, vue du centre du soleil, c'est-à-dire, le point de l'écliptique, où un observateur situé au centre du soleil verroit répondre cette tache.

Longitude de la tache.

3145. Lorsque par cette méthode on a déterminé trois positions de la tache vue du soleil, on connoît trois points *X*, *V*, *M*, (*fig.* 271) d'un petit cercle *RXVM*, par longitudes & latitudes, on peut déterminer le pole de ce petit cercle; & c'est aussi le pole de l'équateur solaire *GHK*, auquel le cercle *MR* est parallèle. Le problême seroit le même si l'on demandoit de trouver la déclinaison d'une étoile & la hauteur du pole par le moyen de trois hauteurs observées, avec deux différences d'azimut, sans avoir de méridienne; ce sont trois triangles sphériques qui ont deux côtés communs que l'on cherche, par le moyen du troisième côté qui est donné avec la différence des angles adjacents à ce côté connu. Nous en donnerons bientôt la solution (3150).

3146. Si la longitude héliocentrique d'une tache étoit la même dans les trois observations; ce seroit une preuve que le soleil ne tourne point sur son axe; car le centre du du soleil ne peut voir une tache répondre toujours au même point du ciel si cette tache est entraînée par la circonférence du soleil; la longitude héliocentrique d'une tache que nous venons de déterminer (3143) ne change donc que par le mouvement du soleil; mais elle ne change pas uniformément, parce que l'écliptique, sur laquelle nous comptons les longitudes, n'est pas l'équateur même du soleil, autour duquel se fait le mouvement du soleil, & sur lequel on a des progrès uniformes.

3147. Si la latitude d'une tache dans les trois observations étoit constante, tandis que la longitude change, on seroit assuré que la tache tourne parallèlement à l'écliptique, c'est-à-dire, autour des poles même de l'écliptique;

qui dans ce cas seroit confondue avec l'équateur du soleil.

3148. Si la longitude & la latitude de la tache changent tout à la fois, comme on l'observe réellement; c'est une preuve que la tache décrit un parallèle à quelqu'autre cercle que l'écliptique; d'où il suit que l'équateur du soleil est incliné sur l'écliptique.

3149. Si nous avons une suite d'observations d'une tache pendant une demi-révolution autour du soleil dans le temps où le soleil est dans les nœuds de son équateur, nous verrons cette tache à sa plus grande & à sa plus petite latitude; la différence de ces deux latitudes donnera le double de l'inclinaison de l'équateur solaire; car soit
Fig. 268. *AB* (*fig.* 268) le diamètre de l'équateur solaire, *KE* l'écliptique, *RO* le parallèle de la tache, les latitudes *OE* & *KR* de cette tache (quand elle est sur le cercle *AROE* de ses plus grandes latitudes) diffèrent entr'elles du double de *EB*, c'est-à-dire, du double de l'inclinaison de l'équateur solaire, puisque dans l'une des observations, la latitude *EO* de la tache est plus grande que *BO* de la quantité *BE*, & que dans l'autre observation la latitude *KR* est au contraire plus petite que *AR* ou *BO* de la même quantité $AK = EB$. Si l'une des latitudes observées étoit boréale, & l'autre australe, ce seroit la demi-somme des deux latitudes extrêmes, ou de la plus grande & de la plus petite, qui donneroit l'inclinaison de l'équateur solaire. C'est ainsi que nous trouverons l'inclinaison de l'équateur lunaire, parce que les taches de la lune peuvent s'observer pendant toute la durée d'une rotation lunaire. Mais comme nous voyons rarement les taches du soleil pendant une moitié de leur révolution, nous ne pouvons pas avoir immédiatement l'inclinaison de l'équateur solaire par les deux latitudes extrêmes; nous la déduirons dans le problême suivant de l'inégalité des trois latitudes observées. Le P. Boscovich fut le premier qui résolut ce problême, dans une dissertation publiée à Rome en 1736, sa méthode se trouve dans la première édition de cet ouvrage : voici deux autres solutions, dont la première a

été donnée par le P. Pézenas. (*Astronomie des Marins*, *pag.* 165. *Mémoires présentés*, *T. VI*).

3150. *Connoissant trois longitudes & trois latitudes héliocentriques d'une tache, trouver l'inclinaison de l'équateur solaire.* Soit *E* (*fig.* 272), le pole de l'écliptique sur le disque solaire, c'est-à-dire, le point de la surface du globe du soleil auquel répond le pole de l'écliptique; *A*, *B*, *C*, les trois positions de la tache, observée en trois points d'un parallèle à l'équateur solaire, *P* le pole de l'équateur, *EA*, *EB*, *EC* les trois distances de la tache au pole de l'écliptique données par observations (3143), de même que les différences de longitudes, qui sont les angles *AEB*, *BEC*; l'on résoudra séparément les 3 triangles sphériques *AEB*, *BEC*, *AEC* dont on connoît deux côtés & l'angle compris, & l'on trouvera les côtés *AB*, *BC* & *AC* (3696). Méthode pour trouver l'inclinaison & le nœud. *Fig.* 272.

3151. Mais il ne suffit pas de connoître le triangle *ABC*, il faut savoir à quelle distance sont ces 3 points *A*, *B*, *C* du pole *P* de l'équateur solaire; pour cela on considérera le parallèle du globe solaire sur lequel sont situés ces trois points; on connoît leurs distances entre eux, cela seul détermine la grandeur du cercle qui passe par les trois points; or, dans la sphère quand on connoît le rayon d'un petit cercle parallèle à l'équateur, on sait par-là même à quelle distance il est du pole : ainsi connoissant les distances *AB*, *BC*, *CA*, par le moyen des trois arcs de grands cercles que nous avons calculés, on connoîtra aussi leurs distances en ligne droite, qui sont les cordes, ou les doubles des sinus des moitiés de ces mêmes arcs, c'est-à-dire, les lignes droites *AB*, *BC*, *CA*, que j'ai représentées séparément; il faut donc résoudre le triangle rectiligne *ABC*, & trouver l'angle *B*. Pour cela on retranche de la demi-somme des trois côtés chacun des côtés *BA*, *BC*, on ajoute ensemble les logarithmes des deux restes, & les complémens des logar. des deux côtés, la demi-som. est le log. sin. de la moitié de l'angle rectiligne *ABC* (3708); le double du supplément de l'angle *ABC* est l'arc *AFBC* du petit cercle *AFBCD* parallèle à l'équateur solaire.

Fig. 272. Nous connoissons donc en degrés un arc de grand cercle & un arc de petit cercle, qui tous deux passent par les points A & C, c'est-à-dire, qui ont l'un & l'autre pour corde la ligne droite AC, ou dont les moitiés ont la même ligne droite pour sinus, dès-lors on connoîtra le rapport de leurs rayons (3612).

3152. Le sinus de la moitié de l'arc de petit cercle ABC est donc au sinus de la moitié de l'arc de grand cercle AC, comme le rayon de cet arc AC, ou le rayon de la sphère est au rayon du petit cercle; or le rayon de ce petit cercle ou de ce parallèle solaire est le sinus de l'arc PA, ou de la distance au pole, donc le sinus de la moitié de l'arc de petit cercle $AFBC$ est au sinus de la moitié de l'arc du grand cercle AC, comme le rayon est au sinus de PA; c'est la première partie des élémens cherchés, ou la distance de la tache au pole solaire. On trouvera l'angle PCA au moyen du triangle sphérique isoscelle, partagé en 2 triangles égaux par un arc perpendiculaire, qu'on supposera abaissé du point P sur l'arc CA, & qui partage l'angle aussi-bien que le côté AC en deux parties égales; car R : cotang. PC : : tang. $\frac{1}{2}$ AC : cos. ACP (3678). Dans le triangle AEC, on trouvera l'angle ACE (3697), qui retranché de l'angle ACP donne l'angle ECP. Dans le triangle ECP connoissant PC, EC & l'angle compris, on trouvera PE (3696); cet arc est égal à l'inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique.

Distance au pole.

3153. On peut aussi ramener ce problême à une formule analytique, dont l'usage sera encore plus facile que la solution trigonométrique expliquée ci-devant. Dans un triangle sphérique tel que PEC, cos. PC = cos. PE . cos. EC + cos. E. sin. PE . sin. EC, (3719); il en est de même des triangles PEB & PEA, ainsi l'on a ces trois équations.

Autre méthode.

EC	$= a$
EB	$= b$
EA	$= c$
BEC	$= m$
AEC	$= a$
EP	$= x$
$PA = PB = PC$	$= y$
PEC	$= z$

$$\text{Cof.}\, y = \text{cof.}\, x \,.\, \text{cof.}\, a + \text{cof.}\, z \,.\, \text{fin.}\, x \cdot \text{fin.}\, a.$$
$$\text{Cof.}\, y = \text{cof.}\, x \,.\, \text{cof.}\, b + \text{cof.}\, (z+m)\, \text{fin.}\, x \,.\, \text{fin.}\, b.$$
$$\text{Cof.}\, y = \text{cof.}\, x \,.\, \text{cof.}\, c + \text{cof.}\, (z+n)\, \text{fin.}\, x \,.\, \text{fin.}\, c.$$

De

De la première équation l'on retranche la ſeconde, & l'on a $\text{coſ.}\,x\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b) + \text{ſin.}\,x\,(\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,\overline{z+m}) = 0$. De la première on ôte la troiſième, & l'on a $\text{coſ.}\,x\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c) + \text{ſin.}\,x\,(\text{ſin.}\,a\,.\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{coſ.}\,\overline{z+n}) = 0$. Diviſant la première par la ſeconde, multipliant enſuite par $\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,c\,\text{coſ.}\,(z+n)$, & diviſant par $\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b$; on a cette équation . . .

$$\frac{\text{ſin.}\,a\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,(z+m)}{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b} = \frac{\text{ſin.}\,a\,.\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{coſ.}\,(z+n)}{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c}.$$

Mais on a $\text{coſ.}\,\overline{z+m} = \text{coſ.}\,z\,.\,\text{coſ.}\,m - \text{ſin.}\,z\,.\,\text{ſin.}\,m$ (3618), & $\text{coſ.}\,\overline{z+n} = \text{coſ.}\,z\,.\,\text{coſ.}\,n - \text{ſin.}\,z\,.\,\text{ſin.}\,m$, ſubſtituant ces valeurs, diviſant par coſ. z, & mettant tang. z au lieu de $\frac{\text{ſin.}\,z}{\text{coſ.}\,z}$; on trouvera l'équation ſuivante.

$$\frac{\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,m + \text{ſin.}\,b\,.\,\text{ſin.}\,m\,.\,\text{tang.}\,z}{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b} = \frac{\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{coſ.}\,n + \text{ſin.}\,c\,\text{ſin.}\,n\,\text{tang.}\,z}{\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c};$$

donc $$\frac{(\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,m)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c) + \text{ſin.}\,b\,.\,\text{ſin.}\,m\,.\,\text{tang.}\,z\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c)}{(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c)}$$
$$= \frac{(\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{coſ.}\,n)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b) + \text{ſin.}\,c\,.\,\text{ſin.}\,n\,.\,\text{tang.}\,z\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)}{(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c)}.$$

$$\text{tang.}\,z = \frac{(\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{coſ.}\,n)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b) - (\text{ſin.}\,a - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,m)(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c)}{\text{ſin.}\,b\,.\,\text{ſin.}\,m\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,c) - \text{ſin.}\,c\,.\,\text{ſin.}\,n\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)}.$$

C'eſt une des quantités cherchées, ſavoir la différence de longitude entre le pole de l'équateur ſolaire & la première longitude obſervée; complément de la longitude de la tache comptée ſur l'écliptique depuis l'interſection de l'équateur ſolaire avec l'écliptique.

3154. Connoiſſant l'angle z, on trouvera l'inclinaiſon x par l'équation $\text{coſ.}\,x\,(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b) + \text{ſin.}\,x\,(\text{ſin.}\,a\,.\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,\overline{z+m}) = 0$, ou $\frac{\text{ſin.}\,x}{\text{coſ.}\,x} = \text{tang.}\,x = \ldots$ $\frac{-(\text{coſ.}\,a - \text{coſ.}\,b)}{\text{ſin.}\,a\,.\,\text{coſ.}\,z - \text{ſin.}\,b\,.\,\text{coſ.}\,(z+m)}$; enfin on trouvera y ou la diſtance de la tache au pole ſolaire par le moyen du triangle *EPC*, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, ou par le moyen de la première équation $\text{coſ.}\,y = \text{coſ.}\,x\,.\,\text{coſ.}\,a + \text{coſ.}\,z\,\text{ſin.}\,x\,.\,\text{ſin.}\,a$.

Il ne faut pas oublier dans l'uſage de ces formules les changemens de ſignes qui arrivent aux ſinus (3604 & 3605); il ſera bon de placer ſur un globe les longi-

tudes & les latitudes, dont on voudra faire le calcul. Nous donnerons bientôt les résultats de ces méthodes (3160).

3155. Au reste, on pourroit très-bien se passer de ces méthodes directes, en employant différentes suppositions pour l'inclinaison de l'équateur solaire & la situation du nœud, jusqu'à ce qu'on eût trouvé celles qui satisferoient aux trois observations données. Toutes ces méthodes peuvent servir également pour l'équateur lunaire, en réduisant au centre de la lune les longitudes & les latitudes d'une tache ; mais on verra ci-après une approximation (3191) que je crois encore meilleure pour la lune.

Conditions dans les observations.

3156. Pour trouver plus exactement l'inclinaison de l'équateur solaire, il est bon de choisir des observations faites aux environs des nœuds, c'est-à-dire, vers le commencement de Juin & de Décembre (3129) ; alors la route des taches paroissant la plus inclinée sur l'écliptique, on détermine avec avantage non-seulement l'inclinaison ; mais encore le lieu du nœud. Si l'on observoit les taches dans le temps où le soleil est à 90° des nœuds, leur route étant une ellipse dont on voit difficilement les extrémités, & dont le milieu est parallèle au diamètre du soleil qui marque l'écliptique, les plus petites erreurs dans les observations nous rejetteroient fort loin pour la détermination du nœud, & l'on n'auroit pas la plus grande exactitude pour l'inclinaison.

Réduction des longitudes observées.

3157. Au moyen de l'inclinaison & du nœud de l'équateur solaire il faut réduire à cet équateur toutes les longitudes des taches qui ont été observées par rapport à l'écliptique (3144) ; car ces longitudes rapportées à l'écliptique ne sont pas suffisantes pour donner la durée de la révolution d'une tache, ou celle de la rotation du soleil qui se fait dans le plan de son équateur, à moins qu'on n'eût observé le retour d'une même tache à une même latitude ; ce mouvement est inégal sur l'écliptique ; mais il est uniforme & proportionnel au temps sur l'équateur du soleil. Il faut donc y rapporter les mouve-

mens des taches ; pour cela on les fait calculer par le moyen de quatre analogies (900). Supposons que *NL* (*fig.* 275) soit l'équateur solaire, *ML* l'arc perpendiculaire abaissé d'un lieu *M* de la tache sur l'équateur, *MB* la latitude de la tache ou l'arc perpendiculaire sur l'écliptique, *NB* la distance au nœud comptée sur l'écliptique; dans le triangle *MNB* connoissant *NB*, *BM*, on cherchera l'hypothénuse & l'angle *MNB* auquel on ajoutera, ou dont on ôtera l'angle *BNL* de 7° 30′ pour avoir l'angle *MNL* ; dans le triangle *MNL* on cherchera *ML* distance de la tache à l'équateur solaire, & la distance *NL* de la tache au nœud *N*, mesurée le long de l'équateur. *Fig. 275.*

3158. En faisant la même chose pour une autre observation, l'on aura le mouvement d'une tache sur l'équateur solaire, pour l'intervalle de temps qu'il y a entre deux observations; il suffira d'une simple analogie pour trouver la durée de la rotation entière du soleil ; car le mouvement observé est à 360° comme l'intervalle de temps observé est au temps de la rotation toute entière par rapport au nœud *N*, or ce nœud est sensiblement fixe ; ainsi l'on aura la durée de la rotation absolue du soleil par rapport aux étoiles fixes. Trouver la durée de la rotation.

3159. Les retours apparens d'une tache vers le milieu du soleil, observés de la terre, donneroient la durée de la rotation beaucoup trop grande, parce que la tache tournant autour du soleil comme la terre, & du même sens, elle nous paroît arriver sur le centre du soleil plus tard que si nous restions immobiles. Ces révolutions apparentes des taches, ou ces retours au centre du soleil sont inégaux, parce que le mouvement de la terre est inégal ; au lieu que les retours de cette tache à un même degré de longitude, calculés par les règles précédentes & réduits à l'équateur du soleil, sont égaux & uniformes, comme toutes les rotations des planètes.

3160. M. Cassini avoit trouvé d'abord la révolution moyenne des taches par rapport à la terre $27^{j}\ 12^{h}\ 20'$, il chercha cette révolution par rapport à un point fixe, en

Révolution des taches, 25 jours 14 heures 8'.

difant : $360° + 27° 7' 8''$, mouvement moyen de la terre par rapport aux équinoxes dans l'efpace de $27^j\ 12^h\ 20'$, font à $360°$ comme $27^j\ 12^h\ 20'$ font à $25^j\ 14^h\ 8'$; c'eft la durée de la rotation du foleil par rapport aux points équinoxiaux, (*Elémens d'aftron. pag.* 105. *Mém. acad.* 1700 & fuiv).

3161. L'équateur folaire, fuivant les anciennes obfervations de M. Caffini, eft incliné fur l'écliptique de $7° \frac{1}{2}$, comme on le voit dans l'hiftoire de l'académie, par M. Duhamel, & dans un abrégé d'aftronomie fait en 1678, & qui eft encore manufcrit. Le P. Scheiner fuppofoit en 1626 cette inclinaifon de 7° (*Rofa urfina*, *pag.* 562), & il affure qu'il ne l'avoit jamais trouvée moins de 6°, ni plus de 8 ; M. de l'Ifle en 1713 trouva cette inclinaifon de 6° 35', (*Mémoires pour fervir, &c. pag.* 178) ; mais il n'y employa que trois obfervations, feulement pour donner un exemple de fa méthode ; or pour avoir quelque certitude en pareille matière, il faut néceffairement plufieurs comparaifons d'obfervations prifes 3 à 3, ou combinées toutes enfemble.

Inclinaifon de l'équateur, 7°.

Nœud afcendant, 2 fignes 10°.

3162. Le nœud de l'équateur folaire fur l'écliptique étoit à $2^s\ 8°$ dans le dernier fiècle ; car M. Caffini, dans l'abrégé d'aftronomie que j'ai cité, dit que le pole boréal du foleil répond au huitième degré des Poiffons ; M. Caffini le fils trouve ce nœud à $2^s\ 10°$ par un grand nombre d'obfervations, (*Elém. d'aftron. pag.* 100) ; mais il ne feroit, fuivant les trois obfervations calculées par M. de l'Ifle, qu'à $1^s\ 26°$ de longitude. Le P. Scheiner en 1626 le trouvoit vers $2^s\ 10°$, comme M. Caffini, puifqu'il dit qu'au commencement de Décembre la route des taches eft rectiligne.

Incertitude à fixer.

3163. Les trois réfultats que je viens de rapporter quoiqu'un peu différens entre eux, ne fuffifent point encore pour nous faire conclure qu'il y ait des changemens fenfibles dans la pofition de l'équateur du foleil ; les obfervations du P. Scheiner n'étoient pas affez exactes, celles de M. de l'Ifle n'étoient pas affez éloignées de celles de M. Caffini, pour qu'on puiffe effayer d'en déduire le mou-

vement du nœud de l'équateur solaire : j'observerai aussi qu'une différence de 10″ sur la position observée d'une tache, produit au moins un degré sur le lieu du nœud qui en résulte, & environ 4′ sur l'inclinaison; l'erreur peut même devenir encore plus grande dans certains cas, ensorte qu'on ne sauroit mettre trop d'exactitude dans ces sortes d'observations. Il sera donc nécessaire d'observer encore les taches du soleil à l'avenir avec beaucoup de précision, pour connoître si l'inclinaison de son équateur & le lieu de son nœud éprouvent quelques variations; comme l'équateur terrestre en éprouve par la précession des équinoxes.

3164. M. Cassini dans son discours sur la lumière zodiacale, & M. de Mairan dans son traité de l'aurore boréale, prouvent que l'atmosphère du soleil ou la lumière zodiacale (845), est dans le plan de l'équateur du soleil, semblable à une lentille, dont le tranchant se confond avec le plan de l'équateur solaire, & c'est delà que M. de Mairan déduit les situations que doit avoir en divers temps de l'année la lumière zodiacale (*pag.* 223 & suiv.).

3165. Le célèbre Képler dont nous avons eu tant de fois occasion d'admirer le génie, en donna une preuve bien singulière à l'occasion de la rotation du soleil; il décida que le soleil tournoit sur son axe, & cela avant qu'on l'eût jamais observé; & il pensa que ce mouvement de rotation devoit être la cause du mouvement des planètes autour du soleil. Voici comme il s'exprime dans sa nouvelle physique céleste, imprimée au mois d'Avril 1609, deux ans avant les premières observations du P. Scheiner (3124) : *Modum etiam definivi argumentis talem ut sol manens quidem suo loco, rotetur tamen seu intorno.... transferatque unà secum in gyrum corpora planetarum, intenso vel remisso raptu*, (*Introd. pag.* 9).

Idées de Képler sur la rotation du soleil.

Képler en cherchant la cause du mouvement des planètes dans la rotation du soleil, pensa d'abord qu'elle devoit se faire dans le plan de l'écliptique, ensorte que les poles du soleil & les poles de l'écliptique répondissent aux mêmes points du ciel : (*De Stella Martis*, *c.* 34), il

crut auſſi que le ſoleil devoit tourner en trois jours, c'eſt-à-dire, 30 fois plus vîte que Mercure, parce que la terre tourne ſur ſon axe 30 fois plus vîte que la lune. Dans la ſuite, & après la découverte des taches, & de la véritable inclinaiſon de l'axe du ſoleil, Képler fut obligé de reconnoître que la direction & la vîteſſe de la rotation du ſoleil étoient fort différentes; mais il ſe ſervit de l'obliquité même de ce mouvement pour expliquer le déplacement de l'écliptique & le changement de latitude des étoiles fixes (2733), (*Epitome aſtron. Cop. pag.* 912, *Mém. ac.* 1758, *pag.* 356).

Prééminence du cercle de l'équateur ſolaire.

3166. M. Caſſini le fils penſa de même, que l'équateur du ſoleil pourroit ſervir de terme de comparaiſon pour les mouvemens céleſtes, & qu'on pourroit avec raiſon rapporter à ſon plan toutes les orbites planétaires; alors, par exemple, on diroit que le nœud boréal ou aſcendant de l'orbite de la terre eſt à 8^s 10° de longitude, puiſque le nœud aſcendant de l'équateur ſolaire eſt à 2^s 10°; en conſéquence M. Caſſini fit imprimer une table où l'on voit les orbites de toutes les planètes rapportées à l'équateur du ſoleil, (*Mém. acad.* 1734). M. de Mairan penſe auſſi que l'équateur ſolaire devroit être regardé comme le premier de tous les cercles céleſtes; mais ce cercle ne ſera point fixe ſi la figure du ſoleil n'eſt pas exactement ronde (3526). M. Bouguer ſoupçonna que le ſoleil n'étoit pas ſphérique, (*Mém.* 1748, *pag.* 30), & j'ai obſervé pluſieurs fois moi-même que ſon diamètre du nord au ſud, a au moins 2″ de plus que ſon diamètre d'orient en occident; peut-être cela vient-il de la décompoſition des rayons colorés; les obſervations de l'équateur ſolaire nous l'apprendront, & il y aura peut-être encore d'autres moyens de s'en aſſurer.

Avantage des obſervations qu'on en fera.

DE LA ROTATION DE LA LUNE.

3167. La lune préſente toujours à la terre à peu-près la même face; mais nous ſommes au-dedans de ſon orbite; ſi nous étions placés à une très-grande diſtance

au-delà de l'orbite lunaire, nous verrions ſucceſſivement tous les points de ſa circonférence; d'où il ſuit que la lune tourne ſur ſon axe, & qu'elle a un mouvement de rotation; M. de Mairan a fait voir par pluſieurs autres raiſonnemens que la lune tourne véritablement autour de ſon axe, par-là même qu'elle préſente toujours la même face au centre de ſon orbite, (*Mém. acad.* 1747, *p.* 1).

La lune tourne ſur ſon axe.

3168. Le mouvement de rotation de la lune eſt accompagné de circonſtances ſingulieres qui ont fort occupé les aſtronomes, & qui ſont aſſez peu connues pour mériter d'être traitées ici avec un certain détail.

Des taches de la lune.

LA SÉLÉNOGRAPHIE (a) eſt la deſcription du diſque apparent de la lune, de ſes taches, & de ſes points lumineux; avec leurs ſituations & leurs formes. On croit ſouvent appercevoir dans la lune une eſpèce de figure humaine, mais en l'examinant avec plus d'attention, on n'y voit aucune forme décidée; auſſi les anciens varioient beaucoup dans leurs opinions à ce ſujet; Cléarque & Argeſinax y crurent appercevoir l'image de l'océan & de la terre, comme par la réflexion d'un miroir. On peut voir là-deſſus toutes les opinions des anciens dans le vaſte Traité d'Hévélius ſur cette matière, qui a pour titre SELENOGRAPHIA, *in-fol.* 1647, 563 pages, & dans *Plutarque de facie in orbe lunæ.*

Différentes figures de la lune.

3169. On trouve dans la Sélénographie d'Hévélius, deux grandes figures dont l'une repréſente la pleine lune, l'autre la repréſente lorſqu'elle eſt en croiſſant ou en décours; ces figures, au jugement de M. Mayer, ſont ce qu'il y a de meilleur en ce genre; celle que Riccioli donna enſuite dans ſon Almageſte (*Tome I, pag.* 204), eſt mal gravée, mais on a l'avantage de trouver ſur la figure même, les noms de la plupart des points lumineux, qu'il faut deviner dans Hévélius, où il n'y a pas même de lettres de renvoi, ſi ce n'eſt dans une figure aſſez bizarre, où il a donné à la lune la forme d'une carte géographique.

3170. M. le Monnier regarde comme les meilleures figures de la lune, celles qui furent gravées par Mellan,

(a) Ce mot vient de Σελήνη, *Luna.*

en 1634 & 1635 (*Instit. astron. pag.* 141) : voici le titre tel que je l'ai vu sur un exemplaire de M. Séguier à Nismes : *Phasium lunæ icones quos anno salutis* 1634 & 1635, *pingebat ac sculp. Aquis sextis Claud. Mellan, Gallus, præsentibus ac flagitantibus illustribus viris Gassendo & Peyreschio.* Voy. Gassendi, (IV 355, V 322 *& suiv.*) : Vie de Gassendi 1737, *pp.* 172 & 252 ; Vie de Peyresk, par Gassendi, *pag.* 440 ; Astronomie Philolaïque, *pag.* 467). M. le Monnier acheta ces planches après la mort d'un certain d'Herman, qui avoit effacé le nom de Mellan. On voit que Gassendi envoya ces phases de la lune à Hévélius, mais en 1647 il paroît qu'il n'en avoit pas encore connoissance, (*Selenogr. pag.* 207).

3171. Nous avons en France une grande & belle figure de la pleine lune, que M. Cassini fit graver en 1692, d'après ses propres observations ; le cuivre est encore actuellement à l'Imprimerie Royale, on n'en a tiré que peu d'exemplaires ; elle se trouve plus en petit, dans les anciens mémoires de l'académie pour 1692, avec une explication de M. Cassini à l'occasion de l'éclipse de lune qui devoit arriver le 27 Juillet 1692. On en a mis une copie réduite dans la connoissance des temps depuis 1701, jusqu'en 1772, quoique successivement de quatre gravures, & de quatre grandeurs différentes ; elle se trouve dans mon Exposition du calcul astronomique, où j'ai de plus ajouté un réticule pour la libration ; enfin on en voit une copie dans la planche XXXVIII. Les noms des principales taches sont marqués comme dans le P. Riccioli, M. Cassini & M. de la Hire ; les chiffres sont à peu-près dans l'ordre suivant lequel les taches sont éclipsées d'orient en occident, cette figure ressemble assez exactement à celle de la pleine lune.

3172. Parmi les ouvrages considérables que l'on dut à la magnificence du grand Colbert, & à la confiance qu'il avoit dans M. Cassini, on doit compter les figures de la lune que M. Cassini fit dessiner en 1673, & dans les années suivantes, où l'on voyoit ses phases de jour en jour ; le dessinateur nommé Patigni, se servoit de la lunette de 34

pieds

pieds qui eſt à l'obſervatoire ; ces phaſes deſſinées en grand, avec les détails les plus étendus ſont encore entre les mains de M. Caſſini de Thury, qui m'en a fait voir 34 deſſeins au crayon, fort détaillés.

3173. M. de la Hire qui étoit lui-même fort bon peintre, voulut faire de ſon côté un ouvrage ſemblable ; il obſerva la lune avec ſoin, il en forma une figure complète de cinq à ſix pieds de diamètre, que M. de l'Iſle m'a dit avoir vue chez M. d'Ons-en-Bray, qui en avoit fait l'acquiſition ; c'eſt ſans doute un extrait de cette figure que l'on trouve dans les tables de M. de la Hire. Il avoit fait conſtruire un globe lunaire, tel qu'Hévélius le propoſe (*Sélénog. pag.* 493) ; il eſt entre les mains de M. de Fouchy, qui le retira lorſque les machines de l'académie furent tranſportées en 1745, de l'obſervatoire au jardin Royal ; M. Robert-de-Vaugondy en a le creux. Mayer avoit auſſi entrepris un globe lunaire d'après ſes propres obſervations, en partageant l'hémiſphère viſible de la lune en douze ſegmens. La mort de Mayer arrivée en 1762, ne lui a pas permis de l'achever : M. Kæſtner, ci-devant Secretaire de l'académie de Gottingen, dépoſitaire des manuſcrits de Mayer, & qui a fait imprimer ſon éloge, m'a écrit qu'il y avoit déja ſix phaſes de gravées, & deux de deſſinées, les quatre autres reſtent à faire ; la Régence d'Hanovre a acheté tous ces papiers, & ces deſſeins qui ſont extrêmement beaux, & de la plus grande exactitude ; mais pour rendre ces travaux utiles, il ne ſuffiroit pas de les imprimer, il faudroit faire des globes, auxquels on pût donner les mouvemens qu'exige la libration de la lune, dont nous allons parler.

De la Libration de la Lune.

3174. La Libration eſt un petit changement que l'on apperçoit dans la ſituation des taches de la lune ; quoique le diſque apparent ſoit à peu-près le même en tout temps, on y obſerve cependant quelques degrés de

variation ; les taches paroissent d'environ trois minutes plus ou moins éloignées des bords ; la différence va même quelquefois à un huitième de la largeur du disque lunaire. (Voyez la seconde colonne de la table , 3199).

Quatre sortes de librations.

3175. Il y a quatre sortes de librations, la libration diurne qui est égale à la parallaxe horizontale, la libration en latitude qui vient de l'inclinaison de l'axe de la lune sur l'écliptique, & la libration en longitude qui vient des inégalités du mouvement de la lune dans son orbite ; enfin il y a celle qui provient de l'attraction de la terre sur le sphéroïde lunaire. Les deux premières librations furent reconnues par Galilée, la troisième par Hévélius & Riccioli ; la quatrième a été sur-tout discutée dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1764, (3185).

3176. Galilée qui le premier observa les taches de la lune après la découverte des lunettes, (*Nuncius sydereus*, 1610, *pag.* 16), fut aussi le premier qui remarqua la libration de la lune.

Passage de Galilée.

« La lune, (dit-il), par un rapport naturel & une espèce » de sympathie avec la terre, tourne autour du centre de » la terre, & lui présente toujours une même partie déter- » minée de sa surface ; ensorte que la ligne qui joint leurs » centres, passe toujours par un même point de la surface » de la lune ([a]). Delà il suit qu'un observateur qui du » centre de la terre regarderoit la lune, verroit toujours » le même disque de la lune terminé par une même cir- » conférence ; mais quand on est à la surface de la terre, » le rayon mené au centre du globe lunaire, ne passe point » à l'endroit de la surface de la lune où passe la ligne des » centres, si ce n'est dans le cas où la lune est au zénit.

Libration diurne.

» Quand la lune se leve & se couche, le point de la sur- » face où tombe le rayon visuel, est plus haut que le » point où passe la ligne des centres, & par conséquent » l'on voit alors une portion de l'hémisphère de la lune » vers le bord supérieur, & l'on perd vers le bord infé-

([a]) Cette idée-là n'est exacte que pour ce qui concerne la libration diurne.

» rieur une partie de l'hémiſphère de la lune que l'on » verroit du centre de la terre ; & parce que la partie » de la circonférence de la lune que l'on voit eſt au-deſ- » ſus de la lune quand elle ſe lève, & au-deſſous quand » elle ſe couche, il en doit réſulter une différence aſſez » ſenſible pour qu'on voie certaines taches, ou du moins » quelques parties remarquables de la lune paroître & » diſparoître. On doit obſerver une variation ſemblable » dans la partie boréale & auſtrale du diſque lunaire, » ſuivant que la lune eſt dans l'un ou l'autre ventre du Dra- » gon, (c'eſt-à-dire, dans ſes limites); car ſi elle eſt au nord, » nous appercevons au midi de ſon hémiſphère quelques » parties nouvelles, tandis que les parties ſeptentrionales » diſparoiſſent ([a]). Nous ſommes aſſurés par le ſecours des » lunettes que ces conſéquences ont lieu réellement ; en » effet, il y a dans la lune deux certaines taches, dont l'une » eſt vers le Corus, (ou au nord nord-oueſt), quand la lune » eſt dans le méridien ([b]) ; l'autre lui eſt preſque diamétra- » lement oppoſée ; la première ſe voit même ſans lunette, » mais non pas la ſeconde ; la première eſt une petite tache » ovale, ſéparée des autres grandes taches ; la ſeconde eſt » encore plus petite, également iſolée, & ſituée dans un » eſpace aſſez clair. On obſerve d'une manière ſenſible » dans ces deux taches, les variations dont nous venons » de parler ; on voit l'une ſe rapprocher du bord de la lu- » ne quand l'autre s'en éloigne, de manière que la diſtance » de la tache qui eſt vers le *Corus*, eſt quelquefois double » de ce qu'elle eſt dans d'autres temps par rapport au » bord de la lune ; l'autre tache étant plus près du bord, » la différence eſt plus ſenſible, & la diſtance au bord eſt » quelquefois triple de ce qu'elle étoit auparavant ». (Ga-lilée, (*Dialog. de ſyſtem. mundi*, *pag.* 58. *édit. de* 1635).

([a]) Quoique le fait ſoit vrai, ce n'étoit pas une conſéquence du principe qu'il avoit établi ſur la ligne des centres, comme Galilée le ſuppoſe ; il falloit, pour expliquer ce phénomène, ſuppoſer que la lune préſentoit la même face à un même point du ciel infiniment diſtant, lorſqu'elle étoit à même longitude, ſoit au nord, ſoit au ſud de l'écliptique, ce qui a lieu véritablement (3179).

([b]) C'eſt celle qui eſt appellée *Mare Criſium*; l'autre eſt *Grimaldi*, elle eſt marquée *n°*. 1 dans la planche XXXVIII.

3177. C'eſt ainſi que Galilée apperçut le premier le changement des taches de la lune, & qu'il en aſſigna deux cauſes qui ſont encore adoptées actuellement; mais il ignora la troiſième & la plus conſidérable de toutes, qui vient de l'inégalité du mouvement de la lune dans ſon orbite; c'eſt cependant cette dernière cauſe qui produit le changement de Grimaldi & de la mer des Criſes, enſorte que Galilée ne donnoit point une explication ſuffiſante de ce qu'il avoit remarqué, qui étoit une libration en longitude; mais par une idée heureuſe il expliquoit d'avance un phénomène qu'on a obſervé long-temps après, c'eſt-à-dire, la libration en latitude.

3178. Hévélius commença en 1643 à obſerver aſſidument la libration de la lune; en 1648 il parvint à appercevoir que la libration en latitude étoit dépendante de la ſituation de la lune par rapport à ſes nœuds, comme on le voit dans ſa Sélénographie, mais il avoit alors une idée fauſſe de la libration en longitude, il ne la connut bien qu'en 1654. Hévélius obſerva premièrement que lorſque la lune étoit dans ſa plus grande latitude boréale, les taches ſituées vers le bord ſeptentrional en étoient les plus proches; ainſi *Thalès* & *Endymion* (ou *Montes Sarmatici* & *Lacus Hyperborei*), qui ſont tout près d'Hermès en allant du côté de l'orient, étoient ſenſiblement plus près du bord boréal; quand la lune s'éloignoit du zénit en ſe rapprochant de l'équateur, ces taches s'éloignoient du bord boréal, & *Tycho*, ou le *Mont Sinaï* ſe rapprochoit du bord auſtral de la lune, auſſi bien que *Schikardus* ou *Mons Troicus*, & *Zucchius* ou *Lacus Meridionalis*; delà on peut conclure que l'axe de la lune eſt toujours ſenſiblement parallèle à lui-même, & qu'un diamètre de la lune pris du nord au ſud, paſſe toujours par les mêmes étoiles fixes.

La plus grande libration en latitude.

Différentes dénominations des taches.

Je rapporte ici les noms que Riccioli a donnés aux taches de la lune, avec ceux qu'Hévélius y a ſubſtitués; le premier employa les noms des Hommes illuſtres; le ſecond des noms de l'ancienne Géographie; je préfère cependant, à l'exemple de M. Caſſini, les noms de

Riccioli ; c'eſt un hommage que nous rendons à la mémoire des aſtronomes les plus célèbres ; on les trouvera ſur la planche XXXVIII.

3179. LA PLUS GRANDE LIBRATION en longitude eſt le temps où la Mer des Criſes, (*Palus Mæotides* ſuivant Hévélius), eſt la plus éloignée du bord occidental de la lune, ce qui arrive vers 9 ſignes d'anomalie ; alors les taches orientales, telles que *Grimaldi* (*Palus Maræotides* ſuivant Hévélius), ſont les plus éloignées du bord oriental de la lune. Le contraire arrive dans la plus petite libration, telle que l'obſerva Hévélius le 17 Mai 1649. La Mer des Criſes, étoit ſi près du bord de la lune, qu'il n'a jamais vu l'intervalle auſſi petit ; la longitude vraie de la lune étoit alors moindre que la longitude moyenne, de 6°, la lune étant vers 3 ſignes d'anomalie. La plus grande libration en longitude.

La cauſe de la libration en latitude eſt évidente ſi l'on ſuppoſe que la lune préſente toujours la même face au même point du ciel, & qu'un de ſes diamètres, que nous appellerons l'*axe de la lune*, ſoit toujours incliné de 2° ſur l'écliptique. Soit *T* la terre (*fig.* 273), *TE* le plan de l'écliptique, *TC* une ligne inclinée de 2° ſur l'écliptique, *L* le centre de la lune dont l'axe *ILK* ſoit perpendiculaire à *TC* ; lorſque la latitude de la lune ou l'angle *LTE* eſt de 5°, l'angle *LTC* eſt de 3° auſſi bien que l'angle *GLD*, & une tache ſituée en *G* ſur l'équateur lunaire paroît éloignée du centre apparent *D* de la lune, de 3° ou de $\frac{1}{19}$ du rayon de la lune ; mais 14 jours après quand la lune *M* a 5° de latitude auſtrale, l'angle *ETM* étant de 5° & l'angle *CTM* de 7°, la tache qui étoit en *G* ſe trouve en *Q*, & ſa diſtance *FQ* au centre apparent *F* de la lune eſt l'arc *FQ* égal à l'angle *CTM*, = 7° ; ainſi la tache ſituée dans l'équateur paroît à 7° au midi du centre apparent *F* de la lune, tandis qu'auparavant elle paroiſſoit 3° plus au nord ; donc la tache de la lune paroît de 10° plus au midi, ou plus près du bord méridional de la lune, que lorſque la latitude étoit ſeptentrionale en *L*. Cela ſuppoſe que la ligne *TC*, à la- Explication de la libration en latitude. *Fig.* 273.

quelle l'axe eſt perpendiculaire ſoit immobile, ou que l'axe *IK* ſoit toujours parallèle à lui-même : nous verrons bientôt qu'il a un mouvement (3185); mais il n'eſt pas ſenſible en 14 jours.

3180. La cauſe de la libration en latitude ſe trouvant aſſez bien exprimée dans l'article précédent, il ne me reſte qu'à expliquer auſſi la libration en longitude par l'inégalité du mouvement de la lune dans ſon orbite. Ce fut Riccioli qui parla le premier en 1651 de cette hypothèſe; mais qui la rejetta cependant (*Alm. I*, 214, *tertia hypotheſis*), parce qu'il ſuppoſoit alors une libration trop grande, & qu'il trouvoit pluſieurs obſervations auxquelles cette hypothèſe ne ſatisfaiſoit pas. « La troiſième hypothèſe, » dit-il, ſeroit fondée ſur l'excentricité de la lune, ſi nous » imaginions que la lune préſente toujours la même face, » non à la terre, mais au centre de l'excentrique, en- » ſorte que la ligne menée du centre du globe lunaire » au centre de l'excentrique qu'elle parcourt, paſſeroit » toujours par le même point du globe lunaire ». Cette hypothèſe rejettée par Riccioli fut employée par Hévélius qui l'avoit imaginée en 1648; & dans ſa lettre écrite à Riccioli en 1654, *pag*. 46, il l'explique comme la véritable cauſe de la libration en longitude; Newton & M. Caſſini l'adoptèrent également; & je vais l'expliquer en peu de mots.

Explication de la libration en longitude. *Fig*. 274.

3181. Suivant la théorie du mouvement elliptique, le foyer ſupérieur *F* de l'orbite lunaire *ALP* (*fig*. 274), eſt celui autour duquel la lune tourne uniformément (1252): ſi donc la rotation de la lune eſt uniforme, comme le prouve l'obſervation, la lune après le quart de la durée de ſa révolution, préſentera au foyer *F* le point *B* de ſa ſurface, qui dans l'apogée *A*, étoit dirigé ſuivant *AFT*, & par conſéquent vers la terre; mais dans cette poſition du rayon *LBF*, l'angle *FLT* étant de 6 ou 7°, le point *C* de la lune qui eſt dirigé vers la terre & qui forme le centre apparent de la lune, eſt différent du point *B*, de 7° de la circonférence de la lune; ainſi la tache qui eſt en *B* (& qui paroiſſoit au centre apparent du diſque

lunaire quand la lune étoit apogée), en paroîtra éloignée de 7°, ou d'environ une huitième partie du rayon de la lune du côté de l'occident; c'eſt ce que l'on obſerve réellement; on en conclud que la durée de la rotation de la lune eſt uniforme, & égale à celle de ſa révolution.

3182. Il n'eſt pas aiſé de comprendre la raiſon de cette parfaite égalité entre les durées de la rotation & de la révolution de la lune. Newton ayant trouvé par l'attraction de la terre ſur la lune, que le diamètre de la lune dirigé vers la terre doit ſurpaſſer de 280 pieds, les diamètres perpendiculaires à notre rayon viſuel, en conclud que le plus grand diamètre doit être toujours à peu-près dirigé vers la terre: *Inde verò fit ut eadem ſemper lunæ facies in terram obvertatur, in alio enim ſitu corpus lunare quieſcere non poteſt, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redibit. Attamen oſcillationes ob parvitatem virium agitantium eſſent longè tardiſſimæ, adeo ut facies illa, quæ terram ſemper reſpicere deberet, poſſit alterum orbis lunaris umbilicum reſpicere, neque ſtatim abinde retrahi & in terram converti.* (L. III. pr. 38).

3183. Il eſt vrai que l'équateur lunaire doit être allongé dans le ſens du diamètre qui va de la lune à la terre; parce que l'attraction de la terre eſt plus grande ſur les parties qui ſont les plus près de la terre; d'un autre côté, la rotation de la lune autour de ſon axe, doit en faire un ſphéroïde aplati par les poles, & rendre les méridiens elliptiques; ainſi dans la lune, les méridiens, l'équateur & les parallèles doivent être des ellipſes; & le corps de la lune doit être, pour ainſi dire, comme un œuf qu'on auroit aplati par les côtés, indépendamment de ſon allongement naturel. Figure ſingulière de la lune.

3184. M. d'Alembert penſe qu'on ne ſauroit expliquer la rotation apparente de la lune, par la ſeule ſuppoſition de ſon allongement (*Recherches*, *II*, *pag.* 255); mais qu'il faut que la lune ait été projettée par une impulſion faite ſur un point éloigné du centre de $\frac{1}{150}$ du rayon. Il avoit peine à croire que les nœuds de l'équateur lunaire, & ceux de l'orbite lunaire euſſent le même mou- Effet de l'allongement de ce ſphéroïde.

vement; c'eſt cependant ce que prouve l'obſervation, car comme nous le dirons bientôt (3205): l'axe de la lune, au lieu d'être toujours parallèle à lui-même, & toujours incliné à l'écliptique de 2° dans le même ſens, ſuit le mouvement de l'orbite lunaire; & l'équateur de la lune change de poſition, comme l'orbite, à laquelle il eſt toujours incliné de 7°.

3185. M. de la Grange, dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1764, ſuppoſe avec Newton que la lune eſt un ſphéroïde allongé vers la terre, & il trouve que cette planète doit faire autour de ſon axe une eſpèce de balancement ou d'oſcillation, par lequel ſa vîteſſe de rotation eſt tantôt accélerée, tantôt retardée; qu'alors la lune doit nous montrer toujours à peu-près la même face, quoiqu'elle ait pû recevoir dans le principe une rotation dont la durée ne feroit point, par elle ſeule, égale à celle de la révolution. Il fait voir auſſi que la figure de la lune peut être telle que la préceſſion de ſes points équinoxiaux, ou la rétrogradation des nœuds de l'équateur lunaire, ſoit à peu-près égale au mouvement rétrograde des nœuds de l'orbite lunaire; & dans ce cas il trouve qu'il ne doit plus y avoir de nutation ſenſible dans l'axe lunaire. L'action du ſoleil dans toutes ces recherches, eſt preſque inſenſible par rapport à celle de la terre; c'eſt celle-ci qui produit le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire en agiſſant plus ou moins obliquement ſur le ſphéroïde lunaire; ainſi la préceſſion de l'équateur lunaire, & la loi du mouvement produit ſur le ſphéroïde lunaire diffèrent beaucoup de ce qu'on obſerve dans l'équateur terreſtre. Pluſieurs auteurs avoient appliqué au mouvement de la lune les formules générales trouvées pour la préceſſion des équinoxes, & que l'obſervation avoit juſtifiées par rapport à la terre; le réſultat ne s'accordoit point avec l'obſervation, mais M. de la Grange a fait voir que les formules qui ſont vraies pour la terre, ne s'appliquent pas indiſtinctement à la lune, comme on l'avoit ſuppoſé.

3186. Il eſt vrai que ſi l'on ſuppoſoit la lune homogène,

gène, & le degré d'aplatissement tel qu'il résulte de la force centrifuge de la lune, & de l'action de la terre sur la lune supposée homogène, on ne trouveroit la précession que de 61″ par mois, au lieu de 1° 26′, c'est-à-dire, qu'on trouveroit 85 fois moins que ne donne l'observation; il faudroit donc supposer l'allongement de $\frac{1}{381}$, pour trouver 1° 25′ de précession lunaire à chaque mois; mais cette quantité pourroit s'y trouver en effet, sans être apperçue, ni par la figure des phases, ni par la différence des diamètres de la lune, lors même que son grand axe seroit le plus éloigné de la direction de notre rayon visuel; on peut donc croire que la figure allongée de la lune est la cause de sa rotation & de sa libration, & du mouvement de son équateur. Dans ce cas-là, il pourroit bien se faire qu'elle ne suivît pas bien exactement la loi des distances à l'apogée, que j'ai expliquée ci-dessus (3181), mais jusqu'ici on n'y a pas remarqué de différence bien sensible; d'ailleurs la libration de la lune a été trop peu observée pour qu'on ait pu connoître parfaitement toutes ces inégalités. Je n'ai pû dire qu'un mot de ces causes physiques de la libration, sur lesquelles il faut consulter les ouvrages de M. d'Alembert & la pièce de M. de la Grange, qui sera publiée dans le IXe volume des pièces des prix.

3187. Après avoir parlé de la cause physique de la libration de la lune, je vais la considérer d'une manière purement astronomique, & détailler ce qu'on a fait jusqu'ici pour observer les loix de son mouvement de rotation. M. Cassini trouva le premier que les phénomènes de la libration se réduisoient à un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe différent de celui de l'orbite lunaire; il détermina la position de cet axe par observation, & trouva l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique de 2°½, l'inclinaison sur l'orbite de 7°½, & les nœuds de l'équateur lunaire sur l'écliptique, d'accord avec les nœuds de l'orbite lunaire, comme M. Cassini le fils l'a expliqué dans les mémoires de 1712, & dans ses élémens d'astronomie.

Explication de la libration.

Méthode pour derminer par approximation l'Équateur lunaire en employant un grand nombre d'observations.

3188. Mayer dans un très-bon mémoire qu'il a donné sur cette matière (a), n'a pas voulu déterminer par les observations la situation de l'équateur lunaire, d'une manière directe, parce que cette méthode est assujettie à trois observations (3150); mais il a cherché une approximation par le moyen de laquelle il pût faire entrer plusieurs observations dans un seul résultat, en prenant la somme ou la différence de plusieurs équations particulières, à l'exemple de M. Euler qui déterminoit ainsi les inégalités de Saturne; je vais expliquer cette méthode en détail, parce qu'elle peut servir dans d'autres recherches astronomiques.

3189. On commence d'abord par déterminer la différence d'ascension droite & de déclinaison entre une tache & le centre de la lune (2116, 2504); mais pour faire ces observations, il faut bien considérer que le parallèle apparent du bord de la lune, n'est pas un véritable parallèle à l'équateur (2539), la différence va quelquefois à plus d'un degré, & il en pourroit résulter environ 15″ d'erreur pour des taches éloignées du centre de la lune, ou moins à proportion pour celles qui en sont moins éloignées.

Lorsqu'on a trouvé la différence d'ascension droite, on cherche la différence de longitude & de latitude (2129), on en conclud la longitude & la latitude vues de la lune, de même que nous l'avons fait pour le soleil (3141 *& suiv.*); j'en donnerai un exemple à l'art. 3206.

On cherche ainsi trois fois la longitude & la latitude d'une tache vue du centre de la lune, par rapport à l'écliptique, ou à un cercle que l'on conçoit tiré par le centre

(a) *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das iahr*, 1748. Nuremberg 1750, *in*-4°. *pag.* 52-183.

de la lune, parallèlement à l'écliptique, coupant ſous un angle de 5° 9′ l'orbite de la lune où l'orbite que la terre paroît décrire autour de la lune ; c'eſt avec ces trois obſervations qu'on pourra déterminer l'équateur lunaire (3150), comme nous l'avons fait pour le ſoleil, & comme nous allons le faire par une autre méthode.

Choix des taches qu'on obſerve.

3190. Les taches qui ſont le plus près du centre apparent de la lune, ſont celles dont le changement eſt le plus ſenſible, elles doivent donc être préférées aux autres, nous avons en cela un avantage conſidérable ſur les premiers aſtronomes qui obſervèrent la libration (3178) : n'ayant point alors l'uſage des micromètres, ils n'obſervoient que les taches très voiſines des bords de la lune, dont le mouvement eſt bien moins ſenſible, & dont la figure eſt moins régulière. Mayer a choiſi la tache *n*° 24 dans notre figure appellée *Manilius*, (ou dans Hévélius *Inſula Beſbicus*, celle de *Menelaüs*, (ou *Byzantium*), celle de *Dyoniſius*, & celle de *Cenſorinus*, *n*°. 32, qui eſt ſituée à l'extrémité de *Promontorium acutum*. Ce ſont autant de points lumineux qui ſe diſtinguent très-bien, même dans la pleine lune, & qui ſe peuvent placer très-exactement ſur les fils d'un micromètre. Nous parlerons ci-après du choix qu'on doit faire entre les obſervations d'une même tache (3198). Voici la table des obſervations que Mayer fit en 1748, ſur la tache de Manilius & dont nous allons faire uſage, pour déterminer la ſituation de l'équateur lunaire ; j'y ajouterai ſes principaux réſultats ; je dois avertir que le mémoire contient de plus grands détails tant ſur les obſervations que ſur les réductions qu'on y doit faire ; mais les obſervations n'étant pas d'une extrême préciſion par la nature de l'inſtrument dont Mayer ſe ſervoit, & ſes réductions étant défectueuſes à certains égards (2539, 3142) je ne rapporte les nombres ſuivans que pour ſervir d'exemple à la méthode que je dois expliquer. Il ſeroit utile de donner une traduction entière de ce mémoire, qui eſt écrit en Allemand ; cependant je vais faire enſorte de ne laiſſer rien à deſirer ſur cet article.

Table des Observations faites sur Manilius, *pour la libration de la Lune.*

Temps moyen des observations à Nuremberg.				Arc de distance entre Manil. & la Terre; *T M* *Fig* 271.		Angle *PTM* *Fig.* 271. (3143)		Longitude apparente de la Lune. (1679)			Latitude apparente de la Lune. (1876)			Distance *P M* de Manilius au pole de l'écliptique.		Différ. de long. *TP M* entre Manilius & la Terre.		Longitude de Manilius, vue de la Lune sur l'écliptique.		
1748.	J.	H.	M.	D.	M.	D.	M.	S.	D.	M.	D.	M.		D.	M.	D.	M.	S.	D.	M.
Avr.	11	11	1	17	20	58	11	6	0	35	4	16	M	76	50	15	4	0	15	39
	13	9	3	15	8	58	35	6	27	24	5	27	M	76	52	13	14	1	10	39
Mai.	11	10	56	15	29	60	40	7	6	19	5	51	M	76	48	13	50	1	20	9
	16	16	11	13	26	28	45	9	22	14	2	31	M	75	45	6	38	3	28	52
	17	15	56	14	23	20	49	10	6	33	1	17	M	75	18	5	14	4	11	37
Juin.	5	9	58	18	2	62	16	6	2	53	4	56	M	76	59	16	20	0	19	13
	13	14	0	14	18	25	48	10	0	24	1	41	M	75	29	6	23	4	6	47
	14	12	50	15	12	16	47	10	14	43	0	25	M	75	3	4	30	4	19	13
Juil.	2	9	23	18	2	61	56	5	28	25	4	54	M	76	55	16	17	0	14	42
	4	6	49	17	36	64	29	6	23	11	5	48	M	76	57	16	16	1	9	27
	5	8	4	17	23	64	49	7	7	18	6	8	M	76	48	16	7	1	23	25
	6	8	34	16	20	62	37	7	21	34	5	57	M	76	49	14	52	2	6	26
	7	9	4	15	43	58	10	8	6	15	5	30	M	76	26	13	42	2	19	57
	8	10	4	15	8	52	0	8	21	33	4	44	M	76	7	12	14	3	3	47
	9	11	15	14	38	44	26	9	7	12	3	38	M	76	2	10	30	3	17	42
	10	12	5	14	34	34	40	9	22	50	2	19	M	75	46	8	29	4	1	19
	11	13	15	15	23	23	24	10	8	37	0	51	M	75	4	6	16	4	14	53
	12	13	5	16	0	16	57	10	23	34	0	30	S	75	13	4	46	4	28	20
	15	13	35	19	38	2	14	0	6	37	3	41	S	74	4	0	47	6	7	24
Août.	3	7	5	16	10	60	27	7	29	58	5	26	M	76	31	14	25	2	14	23
	14	11	34	20	23	4	16	1	11	2	4	45	S	74	5	1	33	7	12	35
Nov.	1	5	44	19	27	15	33	11	24	42	3	4	S	74	21	5	19	6	0	1
	2	6	29	20	26	11	50	0	9	1	3	46	S	73	51	4	16	6	13	17
Déc.	27	4	47	20	54	7	19	0	14	44	4	21	S	73	38	2	43	6	17	27
1749. Jan.	28	3	59	18	56	9	59	2	16	0	3	0	S	74	22	3	21	8	19	21
Fév.	25	11	42	17	30	14	53	2	27	53	2	0	S	75	6	4	35	9	2	28
Mars.	4	11	42	14	46	54	26	5	22	9	4	42	M	76	53	12	17	0	4	26

3191. L'équateur lunaire est représenté par le cercle
Fig. 275. *QNL* (*fig.* 275) tracé sur le globe de la lune; *D♈NB* est l'écliptique, *P* le pole de l'équateur lunaire, *A* le pole de l'écliptique, *AP* la distance de ces deux poles, qui est égale à l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, c'est cet arc *AP* (qui est d'environ 2°), que nous cherchons actuellement, & qui est une des inconnues du problême. Soit *M* une tache de la lune, telle que *Manilius*, par laquelle on tirera un cercle de latitude *AMB* jusqu'à l'écliptique *NB*, & un méridien lunaire *PML* jusqu'à l'équateur lunaire *NL*; l'arc *MB* est la latitude de la tache qu'on connoît par observation, & *AM* sa distance au

pole de l'écliptique ; cette distance est variable dans chaque observation, mais c'est une des données du problême. L'arc *M L* du méridien lunaire est la latitude sélénographique de Manilius, ou sa distance à l'équateur lunaire : c'est une quantité constante, parce que nous supposons les latitudes sélénographiques invariables comme les latitudes terrestres, & c'est une des trois choses que nous avons à chercher dans la solution de ce problême.

3192. La troisième inconnue est la longitude du point *N*, ou du nœud de l'équateur lunaire ; ayant tiré du centre de la lune une ligne $C\gamma$ dans le plan de l'écliptique, dirigée vers le point équinoxial, l'angle γCN, ou l'arc γN de l'écliptique est la longitude du point *N* que nous cherchons; mais nous savons que le point *N* est presque d'accord avec le nœud ascendant de l'orbite lunaire (3184, 3187). Supposons donc qu'il n'en diffère que d'une petite quantité θ, & appellant la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire *k*, nous aurons la longitude γN du nœud *N* de l'équateur lunaire, $k+\theta$. Appellons *g* la longitude de Manilius sur l'écliptique déduite de l'observation, ou l'arc γB de l'écliptique, & retranchons-en l'arc γN, il restera pour la distance *NB*, ou l'angle *NAB* formé au pole de l'écliptique $g-(k+\theta)$ ou $g-k-\theta$; mais le cercle de latitude *AN* qui passe par l'intersection *N* des deux cercles *QN*, *DN*, & le cercle *AP* qui passe par leurs poles, font entre eux un angle droit ; ainsi l'angle *MAP* est le complément de l'angle *MAN*, l'angle *MAP* sera donc de $90°-g+k+\theta$.

α Inclinaison de l'équateur,	$=AP$
β Dist. de Manil. à l'équat.	$=LM$
θ Dist. du nœud de l'équat. au nœud de l'orbite.	
g Longitude de Manilius,	$=\gamma B$
h Distance de Manil. au pole de l'éclipt.	$=AM$
k Longitude du nœud de l'orbite lunaire.	

3193. Dans le triangle *MAP* formé au pole de l'écliptique *A*, au pole *P* de l'équateur lunaire, & au point *M* de Manilius, on a cos. $PM=$ cos. AP. cos. $AM+$ sin. AP. sin. AM. cos. PAM (3719) ; ou cos. $90°-\beta=$ cos. α cos. $h+$ sin. α. sin. h. cos. ($90°-$

Fig. 275. $g + k + \theta$) ; donc ſin. $\beta =$ coſ. α. coſ. h + ſin. α. ſin. h. ſin. ($g - k - \theta$).

Par le moyen de trois obſervations on a trois fois la longitude d'une tache, & la latitude qui lui répond en nombres, & par conſéquent trois valeurs de g, h, k ; ainſi l'on peut former trois équations pour avoir trois valeurs de ſin. β, & ſi l'on peut réſoudre chaque équation, on dégagera α & θ, & l'on connoîtra l'inclinaiſon α de l'équateur lunaire, avec la quantité θ, dont ſon nœud diffère du nœud de l'orbite. Mais il ſeroit très-difficile & très-long de dégager par les méthodes ordinaires les inconnues α & θ de ces trois équations ; c'eſt pourquoi l'on a recours aux approximations ſuivantes, où il s'agit de ſuppoſer α & θ aſſez petits pour que leurs coſinus ſoient égaux au rayon, c'eſt-à-dire, à l'unité.

3194. Pour s'aſſurer que α & θ ſont en effet aſſez petits, il ſuffit de jetter les yeux ſur la table des obſervations de Manilius (3190) ; on y voit que ſes latitudes obſervées ne diffèrent jamais entre elles de plus de 3° 23′, car la plus grande valeur de h étoit dans la ſixième obſervation, le 5 Juin 1748, de 76° 59′, & la plus petite le 27 Décembre, dans la vingt-quatrième obſervation, de 73° 36′, la différence eſt 3° 23′, dont la moitié 1° 41′ ½ doit être à peu-près la valeur de α ; en effet, lorſque AP & AM concourent enſemble, PM eſt plus petit que AM, qui eſt conſtant, & cela de la quantité $AP = \alpha$; mais lorſque AP & AM ſont diamétralement oppoſés, PM eſt plus grand que AM de la même quantité α, car il eſt égal à la ſomme de PA & de AM, au lieu qu'auparavant il étoit égal à leur différence.

3195. On connoît donc ainſi à peu-près la valeur de α par l'inſpection de pluſieurs latitudes obſervées dans les différens points de la longitude de la tache ; on connoîtra par conſéquent ſa latitude ſélénographique, car en retranchant α ou AP de la plus petite diſtance au pole de l'écliptique, ou de AM obſervée dans le temps où elle étoit la plus grande, & où les arcs AP & AM coïncidoient, ſavoir 76° 59′, on aura 75° 17′ pour l'arc PM, & le complé-

ment ML 14° 43′, latitude félénographique de Manilius. Cette quantité feroit fuffifamment exacte, fi l'on avoit obfervé affez fouvent la latitude de la tache, pour être certain d'avoir rencontré les points où elle étoit la plus grande. Fig. 275.

3196. Cherchons auffi à peu-près la valeur de θ par l'infpection des obfervations rapportées ci-deffus; pour cela il fuffit de confidérer que dans le temps où la latitude de Manilius étoit la plus grande, elle devoit être néceffairement à 90° du nœud; or le 5 Juin 1748 cette latitude étant la plus grande, la longitude de Manilius fut obfervée de 0^s 19°; donc le nœud N étoit à 9^s 19°, & comme le nœud de l'orbite lunaire étoit alors à 10^s 11°, il s'enfuit que la différence θ auroit été de 22°. De même le 27 Décembre 1748, Manilius étant à fa plus grande latitude, & par conféquent à 90° du nœud N de l'équateur lunaire, fa longitude fut obfervée de 6^s 17°; le point N étoit donc à 9^s 17°; & comme le nœud de l'orbite lunaire, fuivant les tables, étoit alors à 10^s 0°, la différence θ fe feroit trouvée de 13°. On fent bien que ce premier réfultat ne fauroit être exact, parce qu'on ne doit pas choifir pour déterminer le lieu du nœud, le temps où la latitude eft la plus grande, mais plutôt celui où elle eft nulle, & où elle augmente le plus rapidement (1362); par exemple, les temps où la diftance de Manilius au pole de l'écliptique étoit à peu-près de 75° 17′, le 13 & le 14 Juin 1748. On pourroit donc trouver à peu-près le lieu de l'interfection N, en cherchant quelle étoit la longitude de Manilius entre le 13 & le 14, lorfque fa diftance au pole de l'écliptique étoit de 75° 17′. Mais il fuffit ici d'avoir montré que la quantité θ eft en effet affez petite pour que fon cofinus puiffe être fuppofé $= 1$.

3197. Pour fimplifier la formule fin. β, &c. (3193); l'on confidérera que fin. $(g - k - \theta) =$ fin. $(g - k)$ cof. $\theta -$ fin. θ cof. $(g - k)$ art. 3619; mais cof. $\theta = 1$, donc fin. $(g - k - \theta) =$ fin. $(g - k) -$ fin. θ cof. $(g - k)$, & faifant auffi cof. $\alpha = 1$, on aura: fin. $\beta -$ cof. $h =$ fin. h.

Fig. 275. $\sin. (g-k) \sin. \alpha - \sin. h \cos. (g-k) \sin. \alpha \sin. \theta$; il faut encore éliminer ſin. h, & coſinus h, & introduire au lieu de ſinus β, une quantité qui en dépende, mais qui ſoit plus petite & plus facile à traiter dans le calcul. Pour cela nous conſidérons que AM ne peut différer de PM que de la petite quantité α, ainſi la différence entre $AM = h$ & $PM = 90° - \beta$, ſera toujours fort petite; appellons-la en général x, on aura $\beta = 90° - h + x$, $\sin. \beta = \cos. (h - x) = \cos. h. \cos. x + \sin. h. \sin. x$, & faiſant $\cos. x = 1$, & $\sin. x = x$, $\sin. \beta = \cos. h + x \sin. h$; $\sin. \beta - \cos. h = x. \sin. h$, donc $x. \sin. h$ eſt égale à la valeur trouvée ci-devant pour $\sin. \beta - \cos. h = \sin. h. \sin. (g-k) \sin. \alpha - \sin. h \cos. (g-k) \sin. \alpha \sin. \theta$; mettant α au lieu de ſin. α, & $\beta - (90° - h)$ au lieu de x, & diviſant par ſin. h, on aura $\beta - (90° - h) = \alpha \sin. (g-k) - \alpha \sin. \theta. \cos. (g-k)$. Telle eſt l'équation du problême; où les quantités h & $g-k$ ſont données, & où les trois inconnues β, α & θ ſont ſéparées; c'eſt celle que nous allons traiter, pour en dégager ces inconnues α, θ & β. Nous choiſirons trois obſervations qui donneront trois valeurs numériques de $g-k$ & de h; ainſi l'on formera trois équations qui ne renfermeront chacune que les trois inconnues β, α & ſin. θ.

Equation du problême.

Choix des obſervations.

3198. Indépendamment du choix des taches qu'on doit obſerver (3190), pour rendre les trois obſervations les plus concluantes qu'il ſoit poſſible, on les choiſira encore aſſez loin l'une de l'autre pour que les latitudes obſervées ſoient fort différentes, & que les quantités $g-k$ (ou l'arc NB), ſoient éloignées d'environ 90°, de la première à la ſeconde, & de la ſeconde à la troiſième obſervation : par ce moyen ſi deux des obſervations ſont vers les plus grandes latitudes, l'autre ſera vers le nœud, ou ſi deux ſont vers les nœuds, l'autre ſera vers la plus grande latitude; dans le premier cas l'inclinaiſon ſera déterminée avec beaucoup de préciſion, dans le ſecond cas ce ſera le nœud qui ſera le mieux déterminé; mais on aura toujours l'inclinaiſon avec toute la préciſion de l'obſervation même.

Trois obſervations de Mayer.

3199. Mayer prend pour exemple trois obſervations parmi celles que nous avons rapportées (3190). Temps

	I.	II.	III.
Temps des obſervations,	$2^j\ 9^h 23'$	$10^j 12^o\ 5'$	$15^j 13^h 35'$
Longit. de Manil. = g,	$0^s\ 14^o 42'$	$4^s\ 1^o 19'$	$6^s\ 7^o 24'$
Diſt. au pole de l'écl. = *h*,	76 55	75 46	74 4
Longit. du Nœud = *k*,	10 9 14	10 8 48	10 8 32
Sin. $(g-k)$	+ 0,9097	+ 0,1302	− 0,8560
Coſ. $(g-k)$	+ 0,4152	− 0,9915	− 0,5170

Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation du problême $\beta-(90^o-h)=\alpha$, &c. (3197), on aura les trois équations ſuivantes, qui ne renfermeront plus que les trois inconnues α, β, θ.

$$\beta-13^o\ 5'=+0{,}9097\,\alpha-0{,}4152\,\alpha\ \text{ſin.}\ \theta.$$
$$\beta-14^o\ 14'=+0{,}1302\,\alpha+0{,}9915\,\alpha\ \text{ſin.}\ \theta.$$
$$\beta-15^o\ 56'=-0{,}8560\,\alpha+0{,}5170\,\alpha\ \text{ſin.}\ \theta.$$

3200. On pourroit dégager ces inconnues par les méthodes ordinaires d'Algèbre, mais il ſera plus facile de le faire en retranchant ſucceſſivement la première & la ſeconde équation de la troiſième, à l'exemple de M. Euler dans ſa théorie de Saturne, & l'on aura: Réſolution de ces équations.

$$-171'=-1{,}7657\,\alpha+0{,}9322\,\alpha\ \text{ſin.}\ \theta.$$
$$-102=-0{,}9862\,\alpha-0{,}4745\,\alpha\ \text{ſin.}\ \theta.$$

La première équation étant diviſée par 0,9322, & la ſeconde par −0,4745, elles deviendront

$$-183',44=-1{,}8941\,\alpha+\alpha\ \text{ſin.}\ \theta,$$
$$+214,47=+2{,}0784\,\alpha+\alpha\ \text{ſin.}\ \theta,$$

La differ. de ces deux équations eſt $397{,}91=3{,}9725\,\alpha$, donc $\alpha=100'=1^o\ 40'$, & ſubſtituant cette valeur de α dans les autres équations, l'on aura $\theta=3^o\ 36'$, & $\beta=14^o\ 33'$. Cette valeur de θ nous apprend que le nœud de l'équateur lunaire eſt ſenſiblement d'accord avec le nœud de l'orbite, puiſque la différence eſt ſi petite qu'on ne peut s'en aſſurer par les obſervations. La valeur de β nous apprend que Manilius eſt éloigné de $14^o\ 33'$ de l'équateur lunaire, c'eſt *ſa Latitude ſélénographique* (3211). Valeur de α.

3201. La ſolution de ce problême eſt aſſujétie à trois obſervations, mais la méthode a l'avantage d'en admettre tout à la fois un nombre quelconque, enſorte qu'on puiſſe

tirer les trois inconnues, non pas de trois obſervations, mais de 30, ſi on les a. Mayer ayant calculé 27 obſervations de la tache de Manilius, il en forme 27 équations ſemblables aux trois équations $\beta - 13^\circ\ 5'$, &c. de ces 27 équations il forme trois ſommes qui donnent trois équations, il les traite de la même manière que les trois équations précédentes (3200); & pour que les reſtes des ſouſtractions qu'il faut faire, ſoient plus ſenſibles, il met dans une des ſommes toutes les équations, où α a un coefficient poſitif & plus grand que dans les autres, telles ſont les équations déduites des obſervations 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 12 & 27 (3190): il met dans la ſeconde ſomme toutes les équations ou le coefficient de α, c'eſt-à-dire, ſin. $(g - k)$, eſt conſidérable, mais négatif, comme dans les obſervations 8, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26; les neuf autres équations forment la troiſième ſomme; le coefficient de α y eſt beaucoup plus petit que dans les deux autres; mais le coefficient de α ſin. θ y eſt plus conſidérable, parce que coſ. $(g - k)$ eſt fort grand, la diſtance de la tache au nœud étant petite lorſque le ſinus de $g - k$ eſt fort petit.

3202. Ayant donc formé trois ſommes, il trouve les trois équations ſuivantes qui réſultent de 27 obſervations.

Equations qui réſultent de 27 obſervations.

$$9\beta - 118^\circ\ 8' = + 8{,}4987\ \alpha - 0{,}7932\ \alpha\ \text{ſin.}\ \theta$$
$$9\beta - 140\ \ 17, = - 6{,}1404\ \alpha + 1{,}7443\ \alpha\ \text{ſin.}\ \theta$$
$$9\beta - 127\ \ 32, = + 2{,}7977\ \alpha + 7{,}9649\ \alpha\ \text{ſin.}\ \theta$$

Les 27 équations ſont compriſes dans ces trois-là, le plus avantageuſement qu'il ſoit poſſible; les quantités que l'on cherche y ſont multipliées, & par-là plus ſenſibles, & plus faciles à déterminer avec exactitude. Les coefficiens de α y ſont aſſez inégaux pour que la ſouſtraction que nous allons faire produiſe un reſte fort ſenſible, & donne avec exactitude la valeur de α.

On retranchera la première équation de la ſeconde & de la troiſième, & l'on aura deux équations, où β ne ſe trouvera plus:

$$- 564' = - 5{,}7010\ \alpha + 8{,}7581\ \alpha\ \text{ſin.}\ \theta$$
$$- 1331 = - 14{,}6391\ \alpha + 2{,}5375\ \alpha\ \text{ſin.}\ \theta$$

Pour faire évanouir fin. θ, on divifera la première par 8,7581, & la feconde par 2,5375, on aura ces deux équations, $64,398 = 0,6509\,\alpha - \alpha$ fin. θ, & $524,530 = 5,7690\,\alpha - \alpha$ fin. θ; on retranchera l'une de l'autre, & l'on aura $460,132 = 5,1181\,\alpha$, donc $\alpha = 89',90$, c'eft-à-dire, 1° 30', fubftituant cette valeur de α dans une des équations précédentes, on aura $\beta = + 14° 33'$ c'eft la latitude félénographique de Manilius, & $\theta = - 3° 45'$ différence entre le lieu du nœud de l'orbite lunaire & le lieu du nœud *N* de l'équateur. Cette quantité eft affez peu confidérable pour être regardée comme nulle; parce que l'inclinaifon étant très-petite, la moindre erreur dans les latitudes obfervées en doit produire une très-grande dans le lieu du nœud. La longitude du nœud de la lune au commencement de 1748, étoit 10ˢ 18° 56', on en retranchera les 3° 45' trouvés, & l'on aura la longitude de l'interfection *N* de l'équateur lunaire fur l'écliptique ou ♈ *N* (*fig.* 275) = 10ˢ 15° 11'.

Valeur de l'inclinaifon.

Le nœud de l'orbite d'accord avec celui de l'équateur.

3203. Ce réfultat de $\alpha = 1° 30'$ ne diffère que de 10' de celui que l'on a trouvé par trois feules obfervations (3200); mais ici l'on en a pris neuf fois plus, enforte qu'il eft probable qne la précifion de ce réfultat eft neuf fois plus grande.

Fig. 275.

3204. Mayer a calculé de même neuf obfervations faites fur la tache de Dionyfius, & douze de Cenforinus; les obfervations de Dionyfius donnent pour α & θ à peu-près la même chofe que celles de Manilius; on trouve une plus grande différence dans les déterminations que fournit la tache de Cenforinus, fur-tout pour θ, qui fe trouve de $17°\frac{1}{2}$ en plus, au lieu qu'elle étoit négative dans les deux autres cas; mais Cenforinus eft plus éloigné du centre de la lune, enforte qu'il eft dans une partie du difque où les arcs de la lune fe raccourciffent davantage & paroiffent plus petits que vers le centre; il eft donc naturel que les petites erreurs des obfervations y faffent plus d'effet.

L'obliquité de l'écliptique dans la lune, c'eft-à-dire, l'inclinaifon de l'équateur lunaire fur l'écliptique, fe trouve

par les obſervations faites ſur *Cenſorinus*, moindre d'environ 11 à 12′ que par Manilius, tandis que celles de Dionyſius donnent au contraire une ou deux minutes de plus. Mayer en peſant le degré de préciſion de ces différentes obſervations, penſa que pour avoir un juſte milieu il falloit rabattre une minute de l'obliquité que donne Manilius, & ſuppoſer $\alpha = 1° 29'$, quoique M. Caſſini l'eût donnée de 2° 40′; cela pourroit faire croire, comme le dit Mayer, que cette inclinaiſon eſt variable; mais il promettoit de faire voir dans un autre mémoire, & par des obſervations faites du temps de M. Caſſini, qu'elle avoit toujours été de $1° \frac{1}{2}$; enfin je dois ajouter ici qu'ayant moi-même obſervé les latitudes de Manilius, avec un excellent micromètre au mois d'Octobre 1763, j'ai trouvé cette inclinaiſon de 1° 43′ (3206) par des obſervations qui me paroiſſent encore plus ſûres que celles de Mayer.

Inclinaiſon de $1 \frac{1}{2}$ degré.

Mouvement des nœuds de l'équateur lunaire.

3205. Le réſultat des obſervations de Mayer, & des miennes, d'accord avec celui de M. Caſſini, eſt que *le nœud de l'équateur lunaire eſt toujours aux mêmes points du ciel que le lieu moyen du nœud de la lune*; on peut conclure même des obſervations d'Hévélius, faites il y a plus de 100 ans qu'il coïncidoit alors auſſi bien qu'aujourd'hui, du moins ſenſiblement, avec le nœud de l'orbite lunaire; enſorte qu'il faut lui ſuppoſer un mouvement de révolution en 18 ans contre l'ordre des ſignes, égal à celui des nœuds de la lune (1487). Le P. Boſcovich ayant calculé quelques obſervations de Mayer, avoit cru reconnoître que les nœuds de l'équateur lunaire avoient un mouvement rétrograde plus prompt que celui des nœuds de l'orbite lunaire; mais il eſt clair que ſi leur mouvement moyen étoit différent, on ne verroit pas la même coincidence par des obſervations faites il y a plus de 110 ans, par celles de Caſſini, & par celles de Mayer; je vais encore confirmer ce réſultat par de nouvelles obſervations.

Nouvelles obſervations de la libration.

3206. Au mois d'Octobre 1763, la lune ſe trouvoit à la fois dans ſes nœuds, dans ſes apſides & dans ſes ſyzygies; j'en ai profité pour obſerver la libration moyenne

avec les extrêmes ; j'ai donné ailleurs le détail de ces observations (*Mém. acad.* 1764, *pag.* 557), je vais seulement en rapporter trois dont j'ai fait le calcul. Le 15 Octobre 1763 à 6 heures 15′ du soir, Manilius étoit éloigné de 16′ 54″ du bord austral de la lune en déclinaison, & suivoit de 61″ $\frac{1}{2}$ le bord occidental, sur le parallèle apparent. De cette observation répétée dix fois de suite & calculée avec le plus grand soin, j'ai conclu que la latitude de cette tache étoit de 13° 8′ vue du centre de la lune, par rapport à l'écliptique, & sa longitude 4ˢ 17° 3′. Le 20 Octobre à 6ʰ 30′ la même tache suivoit de 48″ le bord de la lune, & étoit de 17′ 19″ plus boréale que le bord austral, d'où je conclus la latitude de Manilius, 14° 47′, & sa longitude 6ˢ 22° 5′.

Le 25 Octobre à 10ʰ 25′, la lune étant au nord de l'écliptique, la distance de Manilius au bord septentrional de la lune étoit de 10′ 28″, & cette tache précédoit de 1′ 30″ le bord oriental de la lune, d'où j'ai conclu que la latitude de Manilius étoit de 16° 15′, plus grande de 3° 3′ que la précédente, observée dix jours auparavant. De là je conclus par le moyen d'une méthode indirecte qu'il falloit supposer 1° 43′ pour l'inclinaison de l'équateur lunaire, 14° 35′ pour la latitude sélénographique de Manilius, & placer les nœuds de l'équateur à 2° de ceux de l'orbite lunaire, selon l'ordre des signes, cela prouve que les nœuds sont encore à peu-près d'accord, quoique les nœuds de l'orbite lunaire soient plus avancés de 60°, qu'ils ne l'étoient en 1748; ces observations prouvent donc encore le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire égal à celui de l'orbite lunaire.

Elles prouvent le mouvement de l'équateur.

3207. Le lieu du pole boréal de l'équateur lunaire précède toujours de trois signes celui du nœud ascendant de l'orbite lunaire, & si l'on ôte 3ˢ de la longitude du nœud, l'on a la longitude du pole boréal de l'équateur lunaire. On voit, en effet, que *AN* (*fig.* 275), est plus avancée que *AP* de 90°.

Lieu du pole de l'équateur lunaire.

Fig. 275.

3208. Après avoir déterminé la position de l'équateur lunaire sur l'écliptique, on peut aisément réduire à l'équa-

Fig. 275. teur lunaire les longitudes obſervées (3190), tout ainſi que nous l'avons fait pour les longitudes des taches du ſoleil (3157). Ces longitudes comptées ſur l'équateur lunaire doivent croître également en temps égaux, ſi la rotation de la lune eſt uniforme, c'eſt-à-dire, qu'en les comparant deux à deux, on doit trouver toujours la même durée pour la rotation entière de la lune : ayant fait cet examen ſur pluſieurs obſervations, Mayer a trouvé que la rotation de la lune étoit réellement uniforme, autant qu'on en peut juger par les obſervations, & que ſa durée étoit parfaitement égale à celle de la révolution, c'eſt-à-dire, de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$ (1420).

La rotation de la lune paroît uniforme.

Longitudes ſélénographiques des taches.

3209. Les longitudes des taches de la lune peuvent ſe compter comme les longitudes géographiques, en partant de quelque point remarquable du globe lunaire ; on peut donc déterminer ſur le diſque lunaire, un premier méridien fixe duquel on comptera les longitudes ſélénographiques des taches, comme on compte leurs latitudes depuis l'équateur lunaire *LNQ*. Le premier méridien lunaire eſt ſuppoſé avoir un mouvement uniforme autour des poles de la lune, & faire une révolution en $27^j\ 7^h$; ainſi il s'éloigne uniformément des points équinoxiaux du Bélier & de la Balance, marqués ſur le diſque lunaire, ou vus du centre de la lune. Si l'on ajoute ſix ſignes à la longitude moyenne de la lune, on aura la longitude de la terre vue du centre de la lune, cette longitude moyenne croît auſſi uniformément ; ainſi le premier méridien lunaire eſt toujours dirigé vers ce point du ciel qui nous eſt indiqué par l'oppoſite de la longitude moyenne de la lune. En effet, le mouvement moyen de la terre étant d'accord avec celui des taches de la lune, & la terre s'éloignant des points équinoxiaux de la lune avec autant de vîteſſe qu'une tache dans l'équateur de la lune ; il s'enſuit que la quantité dont le lieu moyen de la terre eſt éloigné des points équinoxiaux, étant comptée dans l'équateur de la lune d'occident en orient, le point où finit l'arc de l'éloignement, doit être immobile ſur la ſurface de la lune à l'égard des taches. Il eſt aiſé de voir que ce point vu

Premier méridien lunaire.

de la terre, ne paroît jamais fort éloigné du centre apparent de la lune. Si le plan de l'orbite lunaire étoit parallèle à l'équateur de la lune, & ſon mouvement uniforme, le premier méridien paſſeroit toujours par le centre apparent de la lune; mais comme l'inégalité de la lune ne va jamais à plus de 8°, il s'enſuit que le premier méridien ne paroîtra jamais éloigné du centre apparent de plus de 8° ſelon la direction de l'équateur.

3210. Ayant ainſi établi ſur la lune un premier méridien, on cherchera l'angle au pole de la lune entre une tache *M* & le nœud aſcendant *N*, ou l'arc *NL* de l'équateur lunaire, comme nous l'avons fait pour le ſoleil (3157), au moyen du triangle *APM*. L'arc *NL* diſtance de Manilius au nœud étoit de 67° 54′ le 4 Mars 1749, ſuivant l'obſervation de Mayer; la longitude moyenne de la lune étoit alors de 5^s 25° 7′, & celle de la terre vue de la lune 11^s 25° 7′, la longitude du nœud aſcendant de la lune 9^s 26° 15′; ſi on la retranche de celle de la lune, on aura 1^s 28° 52′, argument de latitude du premier méridien; ainſi le premier méridien lunaire étoit éloigné du nœud aſcendant *N* de l'orbite, & de celui de l'équateur lunaire ſur l'écliptique de 58° 52′, comptés le long de l'équateur lunaire; or l'angle *P* formé au pole de la lune entre Manilius & le nœud de l'équateur lunaire, étoit de 67° 54′; la différence eſt 9° 2′ longitude de la tache de Manilius, comptée ſur l'équateur lunaire, depuis le premier méridien, du côté de l'occident, parce que le point *M* ſe trouve à l'occident du point *N*. C'eſt ainſi que Mayer trouve la longitude ſélénographique de Manilius 9° 2′, celle de Dionyſius 17° 17′, & celle de Cenſorinus 32° 45′ à l'occident du premier méridien fixe.

Longitude de Manilius.

Longitude & latitude de 3 points.

3211. Le même triangle *APM* fait connoître la valeur de *PM*, dont le complément *ML* eſt la diſtance de la tache à l'équateur lunaire, ou la *Latitude ſélénographique* (3200). Mayer trouve celle de Manilius 14° 34′ boréale, celle de Dionyſius 2° 55′ boréale, & celle de Cenſorinus 0° 6′ auſtrale. Ces déterminations ſont priſes par un milieu entre pluſieurs obſervations; les différences

vont à près d'un demi-degré, & cela n'eſt pas extraordinaire; car chaque ſeconde d'erreur dans les meſures que l'on prend ſur le diſque lunaire, produit $3' \, 38''$ ſur la circonférence d'un grand cercle de la lune, dans les objets même ſitués le plus près du centre; d'ailleurs les obſervations de Mayer n'étoient faites qu'avec un ſimple réticule, où il falloit diviſer une minute entière par l'eſtime.

Ces longitudes & ces latitudes ſélénographiques ſont abſolument néceſſaires pour établir & retrouver en tout temps la ſituation d'une tache ſur le diſque lunaire, par rapport au centre apparent de la lune & au cercle de latitude qui paſſe par le centre de la lune; l'on pourroit prédire par leur moyen la figure du diſque lunaire pour un moment donné, & la ſituation des principales taches, ſi l'on avoit bien exactement leurs longitudes & leurs latitudes.

Situation apparente de l'équateur.

3212. Lorſqu'on regarde le diſque de la lune ſituée à la fois dans ſon périgée & dans ſon nœud, l'équateur lunaire y paroît ſous la forme d'une ligne droite, ou d'un diamètre de la lune qui paſſe d'un côté ſur le point de *Cenſorinus*, & de l'autre trois minutes au nord de *Grimaldi*; on voit les extrémités de ce diamètre ſur la figure de la lune, (*Planche* XXXVIII). Alors le premier méridien lunaire paroît ſous la forme d'un diamètre qui traverſe l'équateur, & le coupe à angles droits. Si le diamètre OE (*fig.* 276), repréſente l'équateur lunaire, le point E à l'eſt ou à l'orient, le point O à l'oueſt ou à l'occident, l'écliptique paroîtra ſur un diamètre CD incliné de $1° \frac{1}{2}$ vers l'occident, quand la lune eſt dans le nœud aſcendant; & il paroîtra incliné vers l'orient comme GF, quand la lune ſera dans le nœud deſcendant. Au contraire, quand la lune eſt dans ſes limites boréales, l'équateur lunaire paroît comme une ellipſe ABD (*fig.* 277), & l'écliptique fait une autre ellipſe ACD, plus près du centre que celle de l'équateur; dans les limites auſtrales l'équateur lunaire paroît une ellipſe AFD abaiſſée au midi, & l'écliptique eſt une ellipſe AED.

Fig. 276. *Fig.* 277.

Situation du premier méridien.

3213. Quand la lune eſt dans ſes apſides, ſon lieu vrai

Figure de la Lune dans ses moyennes librations; avec les noms de ses principales taches suivant Riccioli, Cassini, Mayer. &c.

Cette Figure est renversée.



1. Grimaldus.
2. Galileus.
3. Aristarchus
4. Keplerus.
5. Gassendus.
6. Schikardus.
7. Harpalus.
8. Heraclides.
9. Lansbergius.
10. Reinoldus
11. Copernicus.
12. Helicon.
13. Capuanus.
14. Bullialdus.
15. Eratosthenes.
16. Timocharis.
17. Plato.
18. Archimedes.
19. Insulasinus Medii.
20. Pilatus.
21. Tycho.
22. Eudoxus.
23. Aristoteles.
24. Manilius.
25. Menelaus.
26. Hermes.
27. Possidonius.
28. Dionisius.
29. Plinius
30. Catharina Cyrillus. Theophilus
31. Fracastorius
32. Promontorium acutum, Censorinus.
33. Messala.
34. Promontorium Somnii.
35. Proclus.
36. Cleomedes.
37. Snellius et Furnerius.
38. Petavius.
39. Langrenus
40. Taruntius.

A. Mare Humorum.
B. Mare Nubium
C. Mare Imbrium.
D. Mare Nectaris.
E. Mare Tranquillitatis.
F. Mare Serenitatis.
G. Mare Foecunditatis
H. Mare Crisium.

vrai étant le même que ſon lieu moyen, le premier méridien lunaire (3209) y paroît comme un diamètre *MLR* (*fig.* 278); quand elle eſt à trois ſignes d'anomalie, c'eſt une ellipſe *MSR* ſituée à l'occident du centre *L* de la lune, & quand la lune ayant paſſé ſon périgée eſt à neuf ſignes d'anomalie vraie, le premier méridien *MVR* eſt dans la partie orientale du diſque lunaire. Au moyen de ces conſidérations l'on peut appercevoir à peu-près la courbure que doivent prendre dans certains temps les directions des taches qui paroiſſent en ligne droite, quand la lune eſt dans ſes moyennes librations; cela ſuffit auſſi pour faire voir combien il y a de complication & de diverſité dans la figure du diſque lunaire, à raiſon de cette double ellipticité, & combien étoient défectueuſes les anciennes hypothèſes d'Hévélius qui ſur une figure conſtante de la lune ſe contentoit de changer la poſition du centre; on peut voir le réticule qu'il employoit pour cela, dans une planche des Inſtitutions aſtronomiques de M. le Monnier, qui répond à la page 140. *Fig. 278.*

3214. Je terminerai ce qui concerne la ſélénographie, en diſant un mot de la hauteur des montagnes de la lune. Hévélius obſerva des ſommets de montagnes dans la lune, qui étoient quelquefois éclairés quoiqu'éloignés de la ligne de lumière de la treizième partie du rayon de la lune; delà il ſuit que ces montagnes avoient de hauteur la 338e partie du rayon lunaire, ou une lieue de France. En effet, ſoit *BM* (*fig.* 279), le rayon ſolaire qui éclaire la lune en quadrature, *BE* le côté éclairé, *BH* le côté obſcur, *HM* une montagne lunaire; quand le rayon *BM* commencera à éclairer le ſommet *M*, ſi $BM = \frac{1}{13}$ du rayon ou 0,07692, la ſécante *CM* ſera 1,002953, comme on le peut voir dans les tables ordinaires où ſont les tangentes & les ſécantes; donc la hauteur perpendiculaire *HM* eſt égale à $\frac{295}{100000}$ ou $\frac{1}{338}$ du rayon; or le rayon de la lune eſt $\frac{3}{11}$ de celui de la terre; multipliant donc le rayon de la terre 3281000^{t} par $\frac{3}{11}$ & $\frac{1}{338}$, on a 2643^{t}, c'eſt-à-dire, plus d'une lieue commune

Montagnes lunaires d'une lieue.

Fig. 279.

de France, ou trois milles d'Italie, comme le trouve Hévélius, (*pag.* 266).

Galilée ſuppoſoit cette hauteur encore plus grande, car il diſoit avoir obſervé la diſtance *BM* des points lumineux de $\frac{1}{10}$ du rayon de la lune, (*Nunc Syd. pag.* 23); mais on doit préférer à cet égard les obſervations d'Hévélius. Dans ſes phaſes 30, 31 & 32 qui ſe trouvent aux environs de la quadrature, il a remarqué les plus grandes diſtances qu'il y ait jamais entre la ligne de lumière & ces ſommets les plus élevés; tels ſont ceux qu'Hévélius appelle *Mons Didymus* (ou *Albategnius*), ſitué vers l'extrémité de *Mare Nubium*, fort près du centre de la lune; *Mons Appenninus* (ou *Eratoſthènes*); *Mons Taurus* (ou *Waltherus*), ſitué à côté de *Tycho*, du côté de l'occident; ce ſont-là les plus hautes montagnes de la lune.

3215. Il paroît que parmi les montagnes de la lune il y a autant d'hétérogénéïté que dans les nôtres; il y en a qui ſont d'une matière plus denſe que les autres, & qui réfléchiſſent plus fortement la lumière, (*Hevel. Selen. pag.* 352); cela ne doit pas venir de leurs différentes hauteurs, car au temps de la pleine lune elles ſont toutes également éclairées de face, & cependant elles n'ont pas toutes la même teinte. Hévélius ſoupçonne même *Ariſtarque*, qu'il appelle *Mons Porphyrites*, d'être une eſpèce de volcan embraſé (*Selen. pag.* 354). En effet, ſa couleur paroît toujours plus rouge que celle des autres parties de la lune, & cela dans toutes les poſitions de cet aſtre; mais cela ne vient-il point de la denſité de ſa matière, ou de ſa couleur naturelle, plutôt que de la matière du feu; eſt-il probable qu'il y ait un volcan qui ſoit perpétuellement embraſé, ſans changer enfin de forme ou de couleur?

Volcan ſoupçonné dans la lune.



De la rotation et de la figure des cinq Planètes principales.

3216. Mercure eſt toujours trop loin de nous, trop engagé dans les crépuſcules ou dans les vapeurs de l'horizon, pour qu'on puiſſe diſtinguer des taches ſur ſon diſque, & examiner la durée de ſa rotation. Les phaſes même de Mercure ſont difficiles à diſtinguer, comme nous en avertit Hévélius, (*Selenog. pag.* 75); il faut y employer de grandes lunettes; on doit avoir ſoin d'en rétrécir l'ouverture, pour diminuer le trop grand éclat de la lumière de Mercure, & l'on diſtingue très-bien alors ſon croiſſant, du moins quand ☿ eſt dans la partie inférieure de ſon orbite. La cauſe des phaſes de Mercure & de Vénus eſt la même que celle des phaſes de la lune (1406). Figure de Mercure.

3217. Les phases de Vénus ſont très-apparentes, & ſe diſtinguent avec les moindres lunettes; Vénus eſt toujours ou en croiſſant, ou en forme d'ellipſe, comme on le voit pour la lune dans la figure 80, & ce fut pour Galilée une preuve démonſtrative du mouvement de Vénus autour du ſoleil (1065). Nous avons expliqué dans le Ve livre la manière de trouver la phaſe la plus brillante de Vénus (1194).

3218. La rotation de Vénus eſt très-difficile à obſerver; M. Caſſini qui avoit déterminé avec le plus grand ſuccès la rotation de Jupiter & celle de Mars, par des obſervations très-délicates, eſſaya en 1666 d'obſerver celle de Vénus; ce ne fut qu'avec beaucoup de peine qu'il apperçut une partie claire ſituée proche de la ſection de lumière; elle lui parut achever ſon mouvement en moins d'un jour, (*Journal des ſavans*, Décembre 1667, *Elémens d'aſtr. pag.* 514. *Anciens mém. T. x. pag.* 467); cependant il n'oſoit aſſurer que ce fût toujours la même partie luiſante qu'il avoit vue, ni décider ſi elle faiſoit une révolution entière, ou ſeulement une libration, n'ayant Des taches de Vénus.

pu voir la continuité de ce mouvement dans une assez grande partie de l'arc. Quoique M. Cassini eût observé ces taches de Vénus en Italie, il n'a jamais pu les distinguer à Paris avec les meilleures lunettes.

3219. M. Bianchini dans les années 1726, 1727 & 1728, observa aussi les taches de Vénus, & il en conclut que la révolution de Vénus autour de son axe n'étoit point de 23^h, comme M. Cassini l'avoit soupçonné, mais de 24 jours & 8 heures, du septentrion vers le midi dans la partie que nous voyons; il jugea que le pole boréal de cette révolution répondoit à $10^s\ 20^\circ$ de longitude, & étoit élevé de 15° sur l'écliptique, ensorte que son équateur étoit incliné de 75° sur l'écliptique, & avoit son nœud ascendant à $1^s\ 20^\circ$ de longitude; il composa à ce sujet un ouvrage qui a pour titre : *Hesperi & phosphori nova Phænomena, Romæ, in-fol.* 1728; ce livre contient sa *Célidographie*, c'est-à-dire, sa description du disque de Vénus.

Inclinaison de l'équateur de Vénus.

L'observation sur laquelle il établit sur-tout la durée de cette révolution de 23 jours, est celle du 26 Févr. 1726, dans laquelle il apperçut à peu-près la même situation des taches à $5^h\ 45'$ & à 9^h; mais M. Cassini observe qu'il est possible que l'apparition d'une nouvelle tache eût formé à 9^h un aspect à peu-près semblable à celui qui avoit lieu trois heures plutôt, que n'ayant pu observer les taches dans l'intervalle, il n'a pu savoir si elles avoient eu un mouvement, & que ses observations peuvent se concilier avec une rotation de $23^h\ 22'$ (*Mém. acad.* 1732. *Elém. d'astr. pag.* 519) : on croit assez généralement que M. Cassini a raison; & la loi observée par M. de Goimpy (3122) paroît encore l'indiquer.

Figure de Mars.

Planche VI. Fig. 80.

3220. Le globe de Mars ne paroît jamais en croissant, comme Vénus & Mercure, parce qu'il est au-delà du soleil; mais on lui voit prendre une figure elliptique, & sa rondeur est diminuée à peu-près comme celle de la lune trois jours avant son plein (*fig.* 80), (Képler, *Epit. pag.* 843. *Astr. refor. pag.* 372. Hevel. *Selenog. pag.* 42. M. Cassini, *pag.* 457).

Fontana observa en 1636 une tache obscure sur le dis-

que de Mars. Le P. Bartoli, Jésuite de Naples, écrivoit le 24 Décembre 1644, qu'avec une bonne lunette de Sirsali il avoit vu Mars presque rond avec deux taches au-dessous du milieu; cependant il y eut des temps où Zucchius ne les vit point, & cela fit soupçonner le mouvement de Mars autour de son axe, (*Astron. ref. pag.* 372). M. Cassini observa mieux que personne les taches de Mars en 1666; & elles lui firent connoître que Mars tourne sur son axe en $24^h\ 40'$; il publia pour lors un mémoire à ce sujet, qui a pour titre, *Martis circa proprium axem revolubilis observationes Bononienses.* Bononiæ, 1666, *in-fol.*; dans lequel on voit que l'axe de Mars est à peu-près perpendiculaire à son orbite, autant qu'on en peut juger par des taches qui sont peu propres à cette détermination. Il observa encore ces taches à Paris en 1670. M. Maraldi les observa en 1704 & 1706, & trouva aussi la durée de sa rotation de $24^h\ 39'$. Ces taches sont fort grandes, mais elles ne sont pas toujours bien terminées, & changent souvent de figure d'un mois à l'autre; cependant elles sont assez apparentes pour qu'on soit très-assuré de la rotation de Mars, (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 74, 1719, 1720. *Elém. d'astr. pag.* 457).

Il tourne en $14^h\ 39'$.

3221. Le globe de Jupiter est très-remarquable par son aplatissement, par ses bandes & par la promptitude de sa rotation. Il n'a point de phases sensibles, parce que nous sommes trop près du soleil par rapport à lui.

Aplatissement de Jupiter.

L'aplatissement de Jupiter fut observé par M. Cassini avant l'année 1666, comme on le voit dans un ouvrage Latin sur les taches des planètes, dont il n'y a jamais eu que les premières feuilles d'imprimées; M. Maraldi m'a fait voir ce Fragment *in-fol.* relié avec plusieurs autres ouvrages de M. Cassini, faits avant son arrivée en France & lorsqu'il habitoit encore en Italie. M. Picard observa aussi l'aplatissement de Jupiter. Depuis ce temps-là M. Pound mesura les diamètres de Jupiter, & trouva l'aplatissement entre $\frac{1}{10}$ & $\frac{1}{14}$; des observations encore plus récentes & plus exactes, que M. Short m'a communiquées, & qu'il a faites avec un héliomètre achromatique,

donnent auſſi le rapport de 13 à 14 entre le diamètre de Jupiter d'un pole à l'autre, & le diamètre de ſon équateur; ce rapport eſt conforme à la théorie. (Voyez Newton, *Princip. pag.* 415, T. III. *pag.* 91, édit. 1742. M. Clairaut, *Figure de la terre, pag.* 195 & 305). Je me ſuis ſervi de ce rapport pour trouver la figure de l'ombre de Jupiter dans les éclipſes des ſatellites (*2935*). Cet aplatiſſement de Jupiter a paru quelquefois moindre; M. Caſſini jugea même que ſon diſque étoit abſolument rond en *1690*, (*Anciens mémoires, T. II. pag.* 108); mais les obſervations que je viens de rapporter, ont été faites pluſieurs fois, & rendent le fait inconteſtable.

Bandes de Jupiter. *Fig.* 282.

3222. Les bandes obſcures que l'on voit ſur le diſque de Jupiter (*fig.* 282), furent remarquées d'abord à Naples par deux Jéſuites nommés Zuppi & Bartoli, & en *1633* par Fontana qui en figura trois, (*Novæ cœleſt. & terr. obſerv. Neap.* *1646*). Hévélius, (*Selenog. pag.* 45), le P. de Rheita, le P. Riccioli, le P. Grimaldi, les obſervèrent auſſi, (*Aſtron. reform. pag.* 370). Joſ. Campani qui conſtruiſit à Rome d'excellentes lunettes, obſerva dans Jupiter le premier Juillet *1664*, quatre bandes obſcures & deux blanches, au rapport de M. Caſſini; il y a des temps où ces bandes paroiſſent très-peu, elles ne ſont pas également bien marquées dans toute la circonférence de ſon globe; il y a des bandes interrompues, (*Elém. d'aſtr. pag.* 407). En *1691* on vit juſqu'à 7 ou 8 bandes obſcures fort près les unes des autres; ſouvent on n'en diſtingue qu'une ou deux, peut-être en *1773* en verra-t-on beaucoup, Jupiter étant périhélie & périgée, le plus près de nous qu'il ſoit poſſible.

Hévélius dans ſa ſélénographie remarqua que ces bandes étoient ſenſiblement parallèles à l'écliptique; M. Caſſini reconnut qu'elles étoient plutôt parallèles à l'équateur de Jupiter, mais cet équateur diffère très-peu du plan de l'écliptique. M. Caſſini écrivoit le 12 Octobre *1665* à M. l'Abbé Falconieri, que les ombres des ſatellites avoient cette année-là un mouvement parallèle aux bandes de Jupiter; or Jupiter étoit alors dans les nœuds

Inclinaiſon de l'axe.

des ſatellites, donc les orbites des ſatellites ſont parallèles aux cercles des bandes, & l'équateur de Jupiter dans le même plan que les orbites des ſatellites, c'eſt-à-dire, incliné d'environ 3° ſur l'orbite de Jupiter; cela produit dans Jupiter une eſpèce d'équinoxe perpétuel; mais cette quantité d'inclinaiſon ne peut s'obſerver avec préciſion.

3223. La durée de la rotation de Jupiter, indiquée par les taches dont M. Caſſini obſerva le mouvement, eſt de $9^h\ 55'\ 50''$; & lorſque M. Maraldi revit en 1713 la tache qui depuis 50 ans avoit diſparu & reparu pluſieurs fois, il trouva la durée de cette rotation $9^h\ 56'$, préciſément comme M. Caſſini l'avoit trouvée en 1665. On peut voir au ſujet des taches de Jupiter & des variations de ſes bandes, différens mémoires de M. Caſſini & de M. Maraldi, (*Mém. acad.* 1699, 1708, 1714; *Anciens mém. T.* II. *pag.* 104. *T.* X. *pag.* 1, 513 & 707).

Rotation de $9^h\ 56'$.

3224. SATURNE eſt trop éloigné de nous pour qu'on puiſſe obſerver ſa rotation; M. Huygens la croyoit de 10^h, comme celle de Jupiter, fondé ſur une induction qu'il tiroit de la diſtance, & de la période du premier ſatellite de Saturne, comparés à celles du premier ſatellite de Jupiter. On ne diſtingue pas dans le diſque de Saturne de point aſſez remarquable, pour qu'il faſſe connoître la rotation; mais on voit autour de lui une bande plus remarquable que tout ce qui s'apperçoit dans les autres planètes.

3225. L'ANNEAU DE SATURNE eſt en effet la choſe la plus ſingulière que la découverte des lunettes nous ait fait appercevoir; on le voit repréſenté dans la *fig.* 280, tel qu'il paroît dans les plus grandes lunettes; il y a des temps où ſa largeur apparente eſt encore plus grande, mais il y a d'autres temps où on ne le voit point du tout, & où Saturne paroît tout-à-fait rond; Galilée écrivoit en 1612 qu'il avoit vu Saturne compoſé de trois parties, *Saturnum triformem*; mais comme cela lui paroiſſoit fort extraordinaire, & qu'il le vit enſuite d'une forme tout-à-fait ronde; il ne ſuivit point ces obſervations. Gaſſendi en 1643 annonça auſſi que Saturne

Anneau de Saturne.

Fig. 280.

lui paroiſſoit accompagné de deux globules de même blancheur que le corps même de Saturne. On diſputa long-temps dans le dernier ſiècle ſur la vraie figure de cet anneau ; on crut voir quelquefois Saturne accompagné de deux corps ronds ou ovales, diſtincts & ſéparés ; le P. Riccioli même s'y trompa, (*Aſtron. reform. pag.* 361), Hévélius en 1647, dans ſa ſélénographie, *pag.* 44, diſoit formellement qu'il ne comprenoit rien à ces deux bras de Saturne. En 1656 dans ſa diſſertation *De Saturni facie*, il diſtingua ſix phaſes différentes de Saturne qu'il appelloit *Monoſphæricum*, *Triſphæricum*, *Sphærico-cuſpidatum*, *Sphærico-anſatum*, *Elliptico-anſatum diminutum*, *Elliptico-anſatum plenum ;* mais la ſeconde & même la troiſième phaſe étoient une illuſion optique de ſes lunettes.

3226. Perſonne avant Huygens ne comprit, & n'expliqua diſtinctement la cauſe de ces apparences de Saturne ; les uns crurent que cela venoit de la figure particulière de Saturne, vu plus ou moins obliquement, les autres de deux gros ſatellites, (Veidler, *Hiſtor. aſtr. pag.* 500). Roberval ſuppoſa des vapeurs élevées de l'équateur de Saturne ; Hodierna crut que Saturne avoit la forme d'un ſphéroïde avec deux taches obſcures, & qu'en tournant ſur ſon axe il ſe préſentoit ſous différentes formes ; le P. Riccioli, même après l'explication ingénieuſe d'Huygens, ſe trompoit encore, & prétendoit que Saturne étoit environné d'une armille mince, plane, elliptique, adhérente à Saturne en deux points, (*Aſtron. reform. pag.* 368). Je paſſe à l'explication d'Huygens, qui eſt évidemment la meilleure (*Syſt. Saturn.* 1659) ; elle fut attaquée par *Euſt. de Divinis*, Mais Huygens répondit l'année ſuivante d'une manière victorieuſe.

Ce que c'eſt que l'anneau.

3227. Saturne eſt environné d'un anneau fort mince, (3241), preſque plan (*ibid.*), concentrique à Saturne, également éloigné de ſa ſurface dans tous ſes points ; il eſt ſoutenu par la peſanteur naturelle & ſimultanée de toutes ſes parties, tout ainſi qu'un pont qui ſeroit aſſez vaſte pour environner toute la terre, ſe ſoutiendroit ſans piliers ; la partie de l'anneau qui eſt la plus proche de Saturne, eſt plus

plus lumineuſe que les parties éloignées. M. Caſſini obſerva que la largeur de l'anneau étoit diviſée en deux parties égales, par un trait obſcur dont la courbure étoit la même que celle de l'anneau; mais M. Short avec ſon grand téleſcope de 12 pieds, y a obſervé des phénomènes encore plus ſinguliers (3228). La *fig.* 280 repréſente Saturne environné de ſon anneau, dans ſon ouverture moyenne; la *fig.* 281 repréſente deux aſpects différens de l'anneau; 1°, dans le temps où l'anneau eſt le plus ouvert ſurpaſſant un peu les bords de Saturne, & formant une ellipſe *MNOP*, dans laquelle le globe de Saturne eſt inſcrit; 2°, dans le temps où il paroît au contraire extrêmement mince, comme on le voit par l'ellipſe *MSO*; il eſt alors oblique à notre œil, & Saturne approchant de la phaſe ronde (3230). On appelle *ligne des anſes* le grand axe de l'ellipſe.

Fig. 280 & 281.

3228. L'épaiſſeur des anſes *A*, *B*, eſt diviſée en deux; la partie intérieure *A* paroît avoir une lumière continue ſans interruption; la partie extérieure *B* eſt diviſée par pluſieurs lignes qui paroiſſent concentriques à la circonférence de l'anneau, & qui font croire qu'il y a pluſieurs anneaux placés dans un même plan; M. Hadley n'en voyoit qu'une avec ſon téleſcope de 5 $\frac{1}{4}$ pieds de foyer (*Phil. tranſ. n°.* 378. Abrégé VI. 222); mais M. Short m'a aſſuré en avoir vu pluſieurs; ces différentes lignes noires qui diſtinguent les couches de l'anneau dans la partie *B*, ſe rapprochent & ſe confondent vers les points *C* & *E*, parce que l'anneau y eſt trop mince, à raiſon de l'obliquité de l'œil. La bande obſcure *EE* que l'on voit ſur le diſque de Saturne, paroît être l'ombre de l'anneau, comme nous le dirons bientôt (3241). On voit auſſi quelquefois le bord de l'ombre de Saturne en *D* projettée ſur l'anneau. (*Ibid*, *pag.* 221).

Dimenſions de l'anneau.

3229. Le diamètre de l'anneau de Saturne eſt à celui du globe de Saturne, comme 7 eſt à 3, ſuivant les meſures de M. Pound; l'eſpace *AF* qu'il y a entre le globe & l'anneau, eſt à peu-près égal à la largeur de l'anneau; ou tant ſoit peu plus grand, ſuivant Huygens; ainſi la

largeur de l'anneau eſt à peu-près $\frac{1}{3}$ du diamètre de Saturne, auſſi bien que les eſpaces vides & obſcurs *AF*, que l'on voit entre le globe & les anſes. M. Whiſton, dans la vie de M. Clarke, dit que le pere de ce dernier avoit obſervé une étoile au travers d'un de ces eſpaces *AF*. (Smith, *Opt. pag.* 440).

Première cauſe de ſa diſparition.

3230. L'anneau de Saturne diſparoît quelquefois, & il y a trois cauſes qui peuvent occaſionner cette phaſe ronde. Lorſque Saturne eſt vers le 20e degré de la Vierge & des Poiſſons, le plan de ſon anneau ſe trouve dirigé vers le centre du ſoleil, & ne reçoit de lumière que ſur ſon épaiſſeur, qui n'eſt pas aſſez conſidérable pour être apperçue de ſi loin; Saturne alors paroît rond, & ſans anneau. Huygens le vit ainſi en 1655 (*Syſt. Saturn.*). M. Maraldi obſerva auſſi cette phaſe ronde, depuis le 14 Octobre 1714, juſqu'au 1 Février 1715 (*Mém. acad.* 1714, *pag.* 71, 1715, *pag.* 12, 1716, *pag.* 172). Dans certains cas, on diſtingue une bande obſcure qui traverſe Saturne par le milieu, & qui eſt formée par l'ombre de l'anneau ſur ſon diſque (*Mém. acad.* 1714, *pag.* 376) (3241).

Il ſuffit que le ſoleil ſoit élevé ſur le plan de l'anneau d'un angle de huit minutes, pour qu'il paroiſſe éclairé; auſſi cet anneau ne diſparoît faute de lumière que pendant un mois, quinze jours avant & après le paſſage de Saturne par le point du ciel qui eſt à $5^s\ 20^\circ$ ou $11^s\ 20^\circ$ de longitude.

Temps où cet anneau diſparoîtra.

Voici les temps où Saturne ſe trouvant à $5^s\ 20^\circ$ ou $11^s\ 20^\circ$, l'anneau doit être dirigé vers le ſoleil: 21 Décembre 1671; 6 Juin 1701; 31 Janvier 1715; 20 Novembre 1730; 15 Juillet 1744; 5 Mai 1760; 30 Décembre 1773; 20 Octobre 1789; 17 Juin 1803; 6 Avril 1819, &c.

Nœud de l'anneau.

3231. Le lieu du nœud de l'anneau ſur l'orbite de Saturne, & celui des nœuds des quatre premiers ſatellites (2998), que M. Maraldi trouve à $5^s\ 19^\circ\ 48'$ (*Mém. acad.* 1715 & 1716), par les obſervations de 1715, ſe trouve à $5^s\ 19^\circ\ 55'$ par les obſervations de 1685. Huygens l'avoit trouvé à $5^s\ 20^\circ\ 30'$ vers le milieu du dernier ſiècle, & M. Caſſini dit qu'il eſt à $5^s\ 22^\circ$ (*Elém. d'aſtron. pag.* 643), il faut attribuer ſans doute ces différences à

la grande difficulté qu'il y a de déterminer exactement ces interfections.

3232. L'anneau de Saturne difparoît encore lorfque le plan de l'anneau paffe par notre œil, étant dirigé vers la terre ; nous ne voyons alors que fon épaiffeur qui eft trop petite, ou qui réfléchit trop peu de lumière pour qu'on puiffe l'appercevoir ; M. Heinfius penfe qu'il faut que la terre foit élevée au moins de 30′ ou d'un demi-degré fur le plan de l'anneau, pour qu'on puiffe l'appercevoir avec un télefcope de deux pieds, ou avec une bonne lunette de 15 pieds ; mais je crois qu'on peut l'appercevoir à une moindre élévation. M. Heinfius obferva le 8 Décembre 1743, que les anfes paroiffoient encore, la terre étant élevée de $34' \frac{1}{2}$ au-deffus du plan de l'anneau ; elles étoient cependant fi foibles qu'on pouvoit juger que bientôt elles alloient difparoître fi la terre fe fût rapprochée davantage du plan de l'anneau ; mais l'angle d'élévation ou d'obliquité n'ayant pas diminué jufqu'à la difparition, l'on ne peut rien conclure de cette obfervation ; je crois donc que l'anneau doit difparoître feulement fept à huit jours avant que la terre foit dans le plan de l'anneau ; le mouvement de la terre eft caufe que ce paffage fe fait plus rapidement que celui du foleil dans le plan de l'anneau, & qu'il eft plus aifé d'obferver la difparition qui vient du paffage de la terre dans le plan de l'anneau, que celle qui vient du paffage du foleil dans ce plan ; voilà pourquoi j'expliquerai bientôt un moyen de trouver le nœud de l'anneau par ces dernières obfervations (3236). Seconde caufe de fa difparition.

3233. M. Maraldi a fait voir dans un excellent mémoire à ce fujet (*Mém. acad.* 1715, *pag.* 15), qu'il y a une troifième caufe qui peut faire difparoître pour nous l'anneau de Saturne, c'eft lorfque fon plan paffe entre le foleil & nous ; car alors fa furface éclairée n'eft point tournée vers nous ; tant que Saturne eft entre $11^s\ 20^\circ$ & $5^s\ 20^\circ$ de longitude, le foleil éclaire la furface méridionale de l'anneau ; fi la terre eft alors élevée fur la furface feptentrionale, elle ne peut voir la lumière de l'anneau, &

ce ſera un des temps de la phaſe ronde ; ainſi l'on peut voir diſparoître les anſes deux fois dans la même année, & les voir reparoître deux fois, comme on l'a véritablement obſervé, (*Mém.* 1715, *p.* 15). M. Maraldi fit voir le premier de quelle manière on pouvoit expliquer ces différentes diſpoſitions, (*Mém. acad.* 1716): nous avons eu enſuite là-deſſus une trés-bonne Diſſertation, *De apparentiis annulli Saturni*, *Autore Godofredo* HEINSIO, &c. *Lipſiæ* 1745 ; mais je vais tâcher de rendre cette théorie encore plus facile.

Troiſième cauſe de la phaſe ronde.

Pl. XXXIX. Fig. 283.

3234. Soit *LMA* (*fig.* 283) le globe de Saturne, ſur lequel on imaginera trois cercles pour repréſenter l'écliptique, l'orbite de Saturne & le cercle de l'anneau. La ligne *NM* repréſente l'orbite que le ſoleil paroît décrire en 30 ans autour de Saturne ; cette orbite eſt exactement dans le même plan & décrite avec les mêmes vîteſſes, que l'orbite de Saturne vue du ſoleil (1106). Le diamètre *ATOSL* repréſente le plan de l'anneau ; le cercle *NOI* repréſente un plan qui paſſe par le centre de Saturne parallèlement à l'écliptique ou au plan de l'orbite terreſtre : ce plan *NOI* prolongé dans l'immenſité de la ſphère céleſte, paſſe ſur les mêmes étoiles & marque dans le ciel la même trace & les mêmes points que le plan de l'orbe terreſtre également prolongé ; car comme deux lignes parallèles ne marquent dans le ciel qu'un ſeul & même point (1113), ainſi deux plans parallèles quoique l'un paſſe par le ſoleil, & l'autre par Saturne, ſont comme un ſeul & même plan, quand on les conſidère parmi les étoiles fixes ; leur éloignement eſt ſi grand, que la diſtance du ſoleil à Saturne y devient inſenſible. Delà il ſuit que ſi nous appercevons Saturne à 1° de l'écliptique, c'eſt-à-dire, à 1° des étoiles auxquelles ſe dirige l'écliptique, notre rayon viſuel faiſant avec le plan de l'écliptique terreſtre un angle d'un degré, ce même rayon qui va de Saturne à la terre, fera auſſi un angle d'un degré avec le plan de l'écliptique vu de Saturne ; & vu de Saturne, paroîtra auſſi à un degré des mêmes étoiles ſituées dans l'écliptique ; la ligne droite qui joint la terre avec Saturne, mar-

Ecliptique conſidérée dans Saturne.

que par une ses extrémités, le lieu de la terre vu de Saturne, & par l'autre le lieu de Saturne vu de la terre; ainsi la terre peut être supposée en *T* à une distance *TE* de cette écliptique, égale à la latitude de Saturne vue de la terre; car la longitude & la latitude de la terre, vues de Saturne, sont exactement sur le point opposé à celui qui marque le lieu de Saturne vu de la terre. L'arc *NOI* appartient donc à un plan que l'on conçoit parallèle au plan de l'écliptique, faisant en *N* un angle de $2^{\circ}\ 30'\ 20''$ avec l'orbite de Saturne (1376), à $3^{s}\ 21^{\circ}\ 31'$ de longitude (pour 1750) comptée sur l'éclipt. *NOI* (1347).

Supposons le nœud *S* de l'anneau & de l'orbite de Saturne à $5^{s}\ 20^{\circ}\ 8'\ 0''$ pour l'année 1744, avec M. Heinsius, (3231) & le nœud *N* de Saturne à $3^{s}\ 21^{\circ}\ 55'$, la distance *SN* sera de $58^{\circ}\ 13'$; on connoît l'angle *S*, inclinaison de l'anneau sur l'orbite de Saturne, que je suppose de 30°, en attendant que je fasse voir par les observations qu'elle est véritablement de cette quantité; ainsi dans le triangle *NSO* on trouvera $NO = 54^{\circ}\ 41'\frac{1}{2}$, qui ajouté à la longitude du nœud *N* donnera pour la longitude du nœud *O*, $5^{s}\ 16^{\circ}\ 36'\frac{1}{2}$; c'est ce que M. Maraldi & Heinsius appellent la longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique. Mais quoique le cercle *NOI* représente l'écliptique, il ne faut pas imaginer que la terre décrive ce cercle réellement, c'est seulement un cercle dont les poles étant prolongés dans l'immensité de la sphère étoilée, répondent aux mêmes points que les poles de l'écliptique ou de l'orbite de la terre. La terre étant supposée en *T* avec une latitude *TE*, & le point *E* étant éloigné de six signes de la longitude géocentrique de Saturne réduite à l'écliptique, telle qu'on l'observe de la terre, l'arc *TE* & l'angle opposé *TOE* nous feront trouver *OE*, & par conséquent la longitude du nœud *O* sur l'écliptique; c'est ainsi que M. Maraldi la trouva par les disparitions & le retour des anses qu'il observa en 1714 & 1715 (*Mém. acad.* 1716).

3235. En effet, dans le temps où l'anneau disparoît, par la seconde cause, c'est-à-dire, dans le temps où son plan est dirigé vers nous, la terre vue de Saturne paroît

Fig. 283. répondre en un point *T* du plan de l'anneau *ATSL*, à une diſtance *TE* de l'écliptique, égale à la latitude géocentrique de Saturne pour ce temps-là ; le point *E* de l'écliptique eſt celui auquel répond la terre vue de Saturne ; ainſi l'arc *EO* de l'écliptique eſt égal à la diſtance qu'il y a du lieu géocentrique de Saturne au nœud *O* de l'écliptique & de l'anneau. Dans la diſparition de l'anneau obſervée au mois d'Octobre 1714, le lieu de Saturne dans l'écliptique, oppoſé au point *E*, étoit de $5^s\ 19^\circ\ 15'$ vu de la terre, ſuivant M. Maraldi ; la latitude ſeptentrionale *ET* de la terre, égale à celle de Saturne étoit $1^\circ\ 51'$, d'où l'on conclud le côté $EO = 3^\circ\ 3'$; donc la longitude du nœud *O* étoit $5^s\ 16^\circ\ 12'$. Dans la diſparition des anſes arrivée le 22 Mars 1715, Saturne étoit à $5^s\ 20^\circ\ 14'$ avec une latitude ſeptent. *TE* de $2^\circ\ 24'$; l'angle *O* étant de $31^\circ\ 20'$ (3237), on trouvera $EO = 3^\circ\ 57'$, & la longit. du point *O* $5^s\ 16^\circ\ 17'$. Dans le retour des anſes le 12 Juillet Saturne étoit à $5^s\ 19^\circ\ 52'$ avec $2^\circ\ 9'$ de latit. donc $TE = 3^\circ\ 33'$, & le lieu du nœud $O = 5^s\ 16^\circ\ 19'$. M. Maraldi s'en tient à $5^s\ 16^\circ\ 17'$ pour 1715. Si l'on veut l'avoir pour un autre temps quelconque, on ajoutera la préceſſion des équinoxes, par exemple, $25'$ pour 30 ans, & l'on aura $5^s\ 16^\circ\ 42'$ pour 1745, ce qui diffère à peine de $5^s\ 16^\circ\ 36'$ que M. Heinſius emploie dans ſes calculs.

Nœud de l'anneau ſur l'écliptique.

Autre moyen de trouver le nœud de l'anneau.

3236. Ces déterminations donnent auſſi un moyen de trouver le nœud *S* de l'anneau ſur l'orbite de Saturne, car dans le triangle *SON* ſuppoſant l'angle *S* de 30°, l'angle *N* de $2^\circ\ 30'\ 40''$ & la diſtance *ON* du nœud *N* de l'orbite au nœud *O* de l'anneau ſur l'écliptique ; on trouve $SN = 58^\circ\ 4'\ 10''$, qui ajouté à la longitude du nœud *N* de Saturne, donne celle du nœud $S = 5^s\ 19^\circ\ 48'$ ſur l'orbite de Saturne ; ainſi voilà un moyen de trouver le nœud de l'anneau ſur l'orbite de Saturne, non par le temps où le ſoleil ceſſe de l'éclairer (3230) ; mais par le temps où nous ceſſons de le voir, & où il paſſe par notre œil, ce qui eſt encore plus exact, comme je l'ai fait remarquer ; on en peut conclure auſſi l'inclinaiſon *NOA* de l'anneau ſur l'écliptique, & on la trouve de $31^\circ\ 20'$.

3237. Dans la détermination du nœud de l'anneau, j'ai supposé connue son inclinaison, parce qu'une petite incertitude sur l'inclinaison n'empêcheroit pas qu'on ne déterminât fort bien le lieu du nœud. Je passe actuellement à la recherche de cette inclinaison. Lorsque Saturne est le plus éloigné du nœud de l'anneau, & que la terre est la plus élevée au-dessus du plan de l'anneau, il nous paroît sous la forme d'une ellipse *MNOP* (*fig.* 281); le petit axe est la moitié du grand, du moins en réduisant les observations au centre du soleil; comme nous le dirons dans un instant (3240); ainsi en supposant l'anneau absolument circulaire, il faut que son inclinaison soit de 30° sur le plan de l'orbite de Saturne, pour paroître sous cette forme (1828); par-là il est aisé de savoir quelle doit être l'inclinaison de cet anneau sur le plan de l'écliptique; car dans le triange *NOS* (*fig.* 283), on connoît l'angle *N* de 2° 30′, la distance *NS* des nœuds, & l'angle *S* de 30°. On aura facilement l'angle *O*; M. Heinsius le trouve de 31° 23′ 17″: M. Maraldi suppose cet angle de 31° 20′ (*Mém. acad.* 1716), la différence est insensible. C'est aussi l'inclinaison que nous avons supposée pour les orbites des quatre premiers satellites de Saturne (2998). On verra bientôt (3239), que quoique l'inclinaison soit de 31° 20′, nous n'observons jamais l'anneau d'une si grande ouverture, à cause de la latitude de Saturne.

Fig. 283.

Fig. 281.

Inclinaison de l'anneau.

Fig. 283.

Il nous reste à chercher sous quelle forme l'anneau doit nous paroître en différens temps, ou l'angle d'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'anneau, pour être en état de prédire sa disparition. C'est la matière du problême suivant, que M. Maraldi n'a point donné dans son mémoire, & que M. Heinsius a résolu d'une manière fort longue & fort obscure; en voici une solution plus simple.

3238. PROBLÊME. *Connoissant l'inclinaison & les nœuds de l'anneau sur l'écliptique*, trouver l'angle d'élévation de la terre au-dessus du plan de l'anneau. Soit *B* le lieu de la terre, opposé à la longitude géocentrique de Saturne; *BF* la latitude de la terre vue de Saturne, égale à la latitude de Saturne vue de la terre, mais de dé-

Elévation de l'œil sur l'anneau.

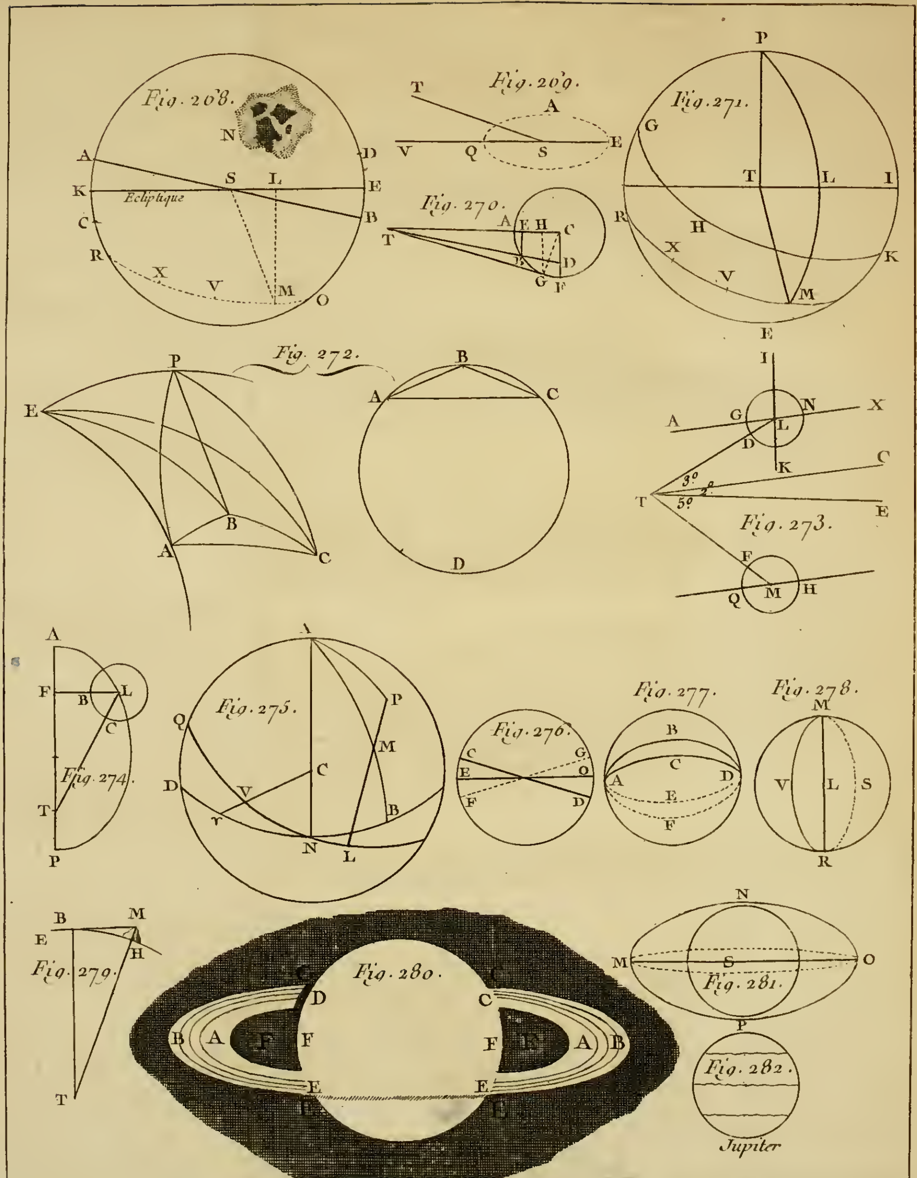
nomination contraire, *OF* la différence entre la longitude de la terre vue de Saturne, & celle du nœud de l'anneau 5^s 16° 36'; dans le triangle *IBO* l'on cherchera *BO*, & l'angle *O*, la somme ou la différence de *BOI*, & de l'angle *SOF* inclinaison de l'anneau sur l'écliptique = 31° 23', donnera l'angle *SOB*; dans le triangle *BOG* l'on connoît l'hypothénuse *OB*, & l'angle *BOS*, l'on cherchera *BG* qui est la latitude de la terre par rapport à l'anneau, vue de Saturne, ou l'élévation de la terre au-dessus de l'anneau; les analogies sont les mêmes que dans l'article 900.

3239. Exemple. Le 8 Décembre 1743, la longitude de Saturne vue de la terre étoit 5^s 18° 33', & sa latit. 1° 53' bor. (1144) ainsi le lieu de la terre *B* (*fig.* 284), répondoit sur l'écliptique au point *F* à 11^s 18° 33'; la longitude du nœud descendant de l'anneau *O* étoit à 11^s 16° 36', donc l'argument de latitude *OF* étoit de 1° 57'. La latitude *FB* de la terre étoit de 1° 53' australe, d'où il suit que l'hypothénuse *BO* étoit de 2° 42', & l'angle *BOF* de 44° 1', ôtant l'angle *FOG* = 31° 23', il reste *BOG* = 12° 38', avec lequel on trouvera *BG* = 35', c'étoit l'élévation de la terre, ou plutôt sa dépression au midi du plan de l'anneau. La *fig.* 284, est disposée pour les cas où la terre est près du nœud descendant de l'anneau, & la *fig.* 283, pour le nœud opposé. Delà il suit que quand Saturne est à 2^s 16° ou 8^s 16° de longitude géocentrique, son anneau doit paroître en général le plus ouvert; il l'étoit par exemple, au mois d'Avril 1767.

Fig. 284.

Effet de la latitude de Saturne.

Mais la latitude de Saturne apporte quelque modification à cette plus grande ouverture; par exemple, le 22 Avril 1767, Saturne étant à 2^s 16° 55', avec un 1° 10' de latitude australe, & le nœud *O* étant à 5^s 16° 55'; on aura *OF* = 90°, l'angle *BOF* de 1° 10' vers le nord, & l'angle *BOG* de 30° 13'; ainsi quoique l'inclinaison de l'anneau fut de 31° 23', & que la terre fût la plus éloignée qu'elle pût être des nœuds de l'anneau, il n'étoit vu de la terre que sous une inclinaison de 30° 13', quantité dont la terre étoit sous la face méridionale du plan de


Fig. 268.
Ecliptique
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Fig. 273.
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.
Jupiter

de l'anneau le 22 Avril 1767. C'eſt dans de pareilles circonſtances qu'il importe de meſurer avec le plus grand ſoin le rapport des diamètres de l'anneau, ſi l'on veut connoître ſon inclinaiſon; car ſi elle eſt exactement de 31° 23′, le petit axe de l'anneau ſera au grand, comme le ſinus de 30° 13′ eſt au rayon, ou comme $50\frac{1}{3}$ eſt à 100, c'eſt-à-dire, préciſément la moitié, car la fraction $\frac{1}{3}$ ne ſauroit s'apprécier avec nos inſtrumens, n'étant que $\frac{1}{7}$ de ſeconde ou la cent cinquantième partie du petit axe, qui en total n'eſt que de 20″.

3240. Par le moyen de l'élévation de notre œil ſur le plan de l'anneau, on trouve la figure de l'anneau, ou le rapport des axes de ſon ellipſe pour un temps quelconque; car le grand axe eſt toujours au petit comme le rayon eſt au ſinus de cette élévation (1828). *Figure de l'anneau.*

L'élévation du ſoleil au-deſſus du plan de l'anneau eſt plus aiſée à calculer. Suppoſons le ſoleil en *C* (*fig.* 283), l'arc *CD* perpendiculaire ſur l'anneau *LSA*, *CD* eſt la lat. du ſoleil par rapport à l'anneau, qui ſe trouve, en diſant: le ſinus total eſt au ſinus de la diſtance héliocentrique *CS* de Saturne au nœud *S* (5^s 20° 8′) meſurée ſur l'orbite de Saturne *MCSN*, comme le ſinus de 31° 23′ 17″, eſt au ſinus de *CD* qui eſt l'inclinaiſon du ſoleil ſur le plan de l'anneau. Delà on conclud aiſément la figure de l'anneau vue du ſoleil, & l'on peut réduire les obſervations qu'on en fait ſur la terre à celles qui ſeroient faites dans le ſoleil, & l'on trouve par-là l'inclinaiſon de l'anneau ſur l'orbite de Saturne, dans les temps où le lieu de Saturne vu du ſoleil eſt à 2^s 20°, ou 8^s 20°; c'eſt ainſi qu'on a trouvé cette inclinaiſon de 30°; on en a conclu celle de l'anneau ſur l'écliptique 31° 20′ par la réſolution d'un triangle (3237). *Elévation du ſoleil ſur l'anneau. Fig. 283.*

3241. Il me reſte à faire ſur l'anneau de Saturne quelques réflexions annoncées dans la définition (3227), & qui ſuppoſent les remarques précédentes. J'ai dit que l'anneau eſt fort mince; en effet, quand il eſt dirigé vers le ſoleil & qu'il n'eſt éclairé que par ſon épaiſſeur, nous n'y voyons aucune lumière, & quand il eſt dirigé vers nous *L'anneau eſt fort mince.*

de ſorte qu'il ne nous préſente que ſon épaiſſeur, nous ne le diſtinguons point. Il eſt vrai qu'on diſtingue ſur Saturne l'ombre de l'anneau, dans les cas même où l'anneau ne paroît point; cela fit croire à M. Huygens que l'anneau avoit une épaiſſeur ſenſible, mais qui réfléchiſſoit peu de lumière; on pourroit cependant expliquer cette ombre que nous appercevons ſur Saturne, ſans cette ſuppoſition; en effet, quand l'anneau dirigé vers le ſoleil eſt éclairé par ſon épaiſſeur, la terre n'étant pas exactement dans le plan de l'anneau le voit projetté ſur Saturne en forme de bande obſcure. Quand l'anneau dirigé vers la terre ne nous préſente que ſon épaiſſeur, nous ne le voyons point, mais le ſoleil l'éclaire alors obliquement, de ſorte que l'anneau répand ſur Saturne une ombre plus conſidérable que celle de ſon épaiſſeur. Il faudroit que l'anneau paſſât en même temps par le ſoleil & par la terre, pour qu'on pût décider que ſon épaiſſeur ne jette pas d'ombre ſenſible ſur Saturne. M. Maraldi a reconnu encore d'une autre manière que l'anneau étoit très-mince; il ſuppoſe que les anſes diſparoiſſent quand l'anneau paſſe par notre œil, & qu'elles reparoiſſent auſſi-tôt que l'anneau ceſſe d'être dirigé vers le centre de la terre, il trouve par ces deux phaſes le même réſultat pour le lieu du nœud, ce qui prouve qu'on le voit dès qu'il a la moindre obliquité, c'eſt-à-dire, que ſon épaiſſeur eſt ſi petite qu'il eſt inutile d'y avoir égard dans le calcul (*Mém.* 1716, *pag.* 179).

L'anneau n'eſt pas abſolument plan.

3242. J'ai dit que l'anneau eſt preſque plan, il ne l'eſt cependant pas bien exactement; car M. Maraldi obſerva qu'une des anſes diſparoiſſoit avant l'autre. M. Heinſius obſerva le 29 Novembre 1743, que le bras oriental étoit plus court que l'autre, vers le temps où ces deux bras commençoient à diſparoître. En 1671 lorſque les bras furent prêts à diſparoître, ils ſe racourcirent un peu (*Anciens Mém. tom. x*, *pag.* 583), or ſi l'anneau étoit dans un ſeul plan, toutes ſes parties diſparoîtroient à la fois, car la différence des largeurs dans une ellipſe auſſi étroite eſt une choſe inſenſible; donc ces obſervations

prouvent qu'il y a un peu de courbure dans le plan de l'anneau.

3243. M. de Maupertuis, dans ſon diſcours ſur la figure des aſtres explique la formation de l'anneau par la queue d'une comète que Saturne a forcé de circuler autour de lui. On peut dire auſſi que dans la formation des planètes, quelle qu'en ait été la cauſe, la matière qui retombant tout à la fois s'eſt trouvée également éloignée du centre, eſt reſtée ſuſpendue comme une voûte ſoutenue par la pouſſée égale de toutes ſes parties. Les partiſans des cauſes finales trouvent que cet anneau étoit néceſſaire à une planète qui reçoit du ſoleil cent fois moins de lumière que nous. Quoi qu'il en ſoit, c'eſt une choſe bien ſingulière que cette couronne qui a 64 millions de lieues de diamètre avec 9000 lieues de largeur tout autour.

De la formation de l'anneau.

3244. On a cru remarquer auſſi ſur le globe de Saturne des bandes ſemblables à celles de Jupiter (3222), mais beaucoup plus foibles. M. Caſſini en obſerva deux en 1675, 1683, 1696, 1708 & 1719; mais il n'y apperçut pas la courbure qu'il auroit dû y avoir dans ces bandes, ſi elles avoient été adhérentes au globe de Saturne; en conſéquence, M. Caſſini le fils penſa qu'elles étoient conſidérablement éloignées du globe de Saturne, à peu-près comme les nuages qui ſouvent environnent la terre d'aſſez loin (*Elém. d'aſtron. pag.* 338, *Mém. ac.* 1715, *pag.* 41, *Phil. tranſ. abr. vol.* 4, *pag.* 32).

Bandes de Saturne.

M. Caſſini ne put appercevoir ſur le globe de Saturne aucun point remarquable dont le mouvement pût faire diſtinguer ſa rotation; nous ſommes donc à cet égard dans la même incertitude que par rapport à Mercure (3216), & nous ignorons même ſi Saturne a un mouvement ſur ſon axe.

Sa rotation eſt inconnue.

3245. On trouvera de plus grands détails ſur les taches de Vénus, de Mars, de Jupiter & de Saturne dans l'optique de Smith, *pag.* 409 & ſuiv. où l'auteur a raſſemblé la plupart des découvertes faites par le ſecours des grandes lunettes & des grands téleſcopes; on

n'a fait jusqu'ici qu'un petit nombre d'observations de cette espèce, parce que les grands & bons télescopes sont fort rares & les grandes lunettes fort embarrassantes.

DE LA PLURALITE DES MONDES.

Pluralité des Mondes soutenue par les Anciens.

3246. La ressemblance que l'on a vue entre les planètes & la terre dans le cours de ce livre, nous conduit à parler aussi de leur destination; les plus grands Philosophes ont pensé qu'elles étoient destinées à recevoir des êtres vivans comme nous, & qu'elles étoient habitées. La pluralité des mondes se trouvoit déja dans les Orphiques, ces anciennes poësies Grecques attribuées à Orphée (Plut. *de Plac. phil.* L. 2, *c.* 13), les Pythagoriciens tels que Philolaüs, Nicetas, Heraclides, enseignoient que les astres étoient autant de mondes (Plut. *L.* 2, *c.* 13 & 30), Achilles Tatius, *Isag. ad Arati phœn. c.* 10. Diog. Laërt. *in Emped.*). Plusieurs anciens Philosophes admettoient même une infinité de mondes hors de la portée de nos yeux. Epicure, Lucrece (*L.* 2, *V.* 1069), tous les Epicuriens, étoient du même sentiment; & Métrodore trouvoit qu'il étoit aussi absurde de ne mettre qu'un seul monde dans le vide infini, que de dire qu'il ne pouvoit croître qu'un seul épi de bled dans une vaste campagne (Plut. *L.* 1, *c.* 5): Xenophanes, Zenon d'Elée, Anaximenes, Anaximandre, Leucippe, Democrite, le soutenoient de même. Enfin il y avoit aussi des Philosophes qui en admettant que notre monde étoit unique, donnoient des habitans à la lune; tels étoit Anaxagore (Macrob. *Somn. Scip. L.* 1, *c.* 11), Xenophanes (Cic. *Ac. qu. L.* 4); Lucien (Plutarque *de Oracul. defectu*; *de facie in orbe lunæ*). On peut voir une liste beaucoup plus ample de ces opinions des Anciens sur la pluralité des mondes, dans Fabricius (*Bibliot. Gr. tom.* I. *c.* 20), & dans le Mémoire de M. Bonamy, (*Acad. des inscr. tom.* IX). Hévélius en paroissoit aussi persuadé en 1647, lorsqu'il parloit de la différence des habitans des hémisphères de la lune: *Quòd si in luna dentur res creatæ viventes, illæ quæ habi-*

Par Hévélius.

tant in hemiſphærio lunæ patente & aperto terræ, ratione luminis ſunt melioris conditionis quàm illæ quæ colunt hemiſphærium lunæ nobis abſconditum ac latens. (*Sélénogr. pag.* 294), il les appelle *Selenitæ*, & il examine aſſez au long tous les phénomènes qui s'obſervent dans leur planète, à l'exemple de Képler, *Aſtron. lunaris.*

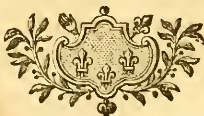
3247. La pluralité des mondes fut enſuite ornée par M. de Fontenelle de toutes les graces & de tout l'eſprit qu'on peut mettre dans des conjectures phyſiques; M. Huygens (mort en 1695) dans ſon livre intitulé *Coſmotheoros*, diſſerta auſſi fort au long ſur cette matière. En effet, la reſſemblance eſt ſi parfaite entre la terre & les autres planètes, que ſi la terre a été faite pour être habitée, nous ne pouvons douter que les planètes ne le ſoient également; celui qui voudroit s'y refuſer feroit auſſi inconſéquent que celui qui dans un troupeau de moutons vu de loin, ſoutiendroit que les uns peuvent avoir des entrailles d'animaux, & les autres ne contenir que des pierres. Par MM. de Fontenelle & Huygens.

3248. Nous voyons ſix planètes autour du ſoleil, la terre eſt la troiſième; elles tournent toutes les ſix dans des orbites elliptiques; elles ont un mouvement de rotation comme la terre; elles ont, comme elle, des taches, des inégalités, des montagnes; il y en a trois qui ont des ſatellites, & la terre en eſt une; Jupiter eſt aplati comme la terre; enfin, il n'y a pas un ſeul caractère viſible de reſſemblance qui ne s'obſerve réellement entre les planètes & la terre: eſt-il poſſible de ſuppoſer que l'exiſtence des êtres vivans & penſans ſoit reſtrainte à la terre; ſur quoi feroit fondé ce privilege, ſi ce n'eſt peut-être ſur l'imagination étroite & timide de ceux qui ne peuvent s'élever au-delà des objets de leurs ſenſations immédiates? Ce que je dis des ſix planètes qui tournent autour du ſoleil, s'étendra naturellement à tous les ſyſtêmes planétaires qui environnent les étoiles; chaque étoile paroît être, comme le ſoleil, un corps lumineux & immobile, & ſi le ſoleil eſt fait pour retenir & éclairer les planètes Reſſemblance des planètes avec la terre.

qui l'environnent, on doit présumer la même chose de chaque étoile.

3249. Il y a eu des écrivains aussi timides que religieux, qui ont réprouvé ce système comme contraire à la Religion; c'étoit mal soutenir la gloire du Créateur : si l'étendue de ses ouvrages annonce sa puissance, peut-on en donner une idée plus magnifique & plus sublime ? Nous voyons à la vue simple, plusieurs milliers d'étoiles, il n'y a aucune région du ciel où une lunette ordinaire n'en fasse voir presque autant que l'œil en distingue dans tout un hémisphère ; quand nous passons à de grands télescopes, nous découvrons un nouvel ordre de choses, & une autre multitude d'étoiles qu'on ne soupçonnoit pas avec les lunettes ; & plus les instrumens sont parfaits, plus cette infinité de nouveaux mondes se multiplie & s'étend : l'imagination perce au-delà du télescope, elle y voit une nouvelle multitude de mondes, infiniment plus grande que celle dont nos foibles yeux appercevoient la trace ; l'imagination va plus loin, elle cherche des bornes ; quel spectacle ? La seule difficulté qu'un Philosophe peut avoir sur l'existence des habitans de tant de millions de planètes, c'est l'obscurité des causes finales qu'il est bien difficile d'admettre, quand on voit les erreurs où sont tombés les plus grands philosophes, Fermat, Leibnitz, Maupertuis, &c. en voulant employer ces causes finales, ou ces suppositions méthaphysiques de prétendus rapports entre les effets que nous connoissons & les causes que nous leur assignons, ou les fins pour lesquelles nous les croyons exister.

Immensité de l'univers.



LIVRE VINGT-UNIEME.

DU CALCUL DIFFERENTIEL,

& du Calcul intégral, appliqués à l'Astronomie.

PARMI les propriétés des sections coniques & les méthodes du calcul infinitésimal, il y en a que nous employons dans ce livre, & qu'on ne trouveroit pas dans les traités ordinaires ; leurs applications à l'astronomie sont d'ailleurs assez multipliées pour mériter d'être rassemblées ici, sur-tout avec des démonstrations plus simples qu'on ne les trouve ailleurs.

3250. Les ouvrages auxquels on pourra recourir pour avoir de plus grands détails, relativement aux Sections Coniques, sont le *Traité analytique des sections coniques*, par M. le Marquis de l'Hôpital, Paris 1707 & 1720 *in*-4°; le grand Traité de M. de la Hire, *in-folio* ; l'Analyse démontrée du P. Reynau ; le Traité des Sections Coniques du P. Boscovich qui forme le IIIe volume de ses Élémens de Mathématiques, imprimés à Rome en 1754, *in*-8° ; celui de Robert Simpson, imprimé à Edimbourg en 1750, *in*-4° ; l'*introduction aux Sections Coniques*, par M. Mauduit, *à Paris*, *chez* Desaint, *in*-8° 1761 ; l'Ouvrage de M. l'Abbé de la Chapelle ; les Institutions Mathématiques de M. l'Abbé Sauri, imprimées en 1770, &c.

3251. LA PARABOLE est une courbe formée à la surface d'un cône par une section parallèle au côté du cône ; telle est la courbe *PCOD* (*fig*. 262). Soit son abcisse $PQ = x$ son ordonnée $QD = y$, & p son paramètre, l'équat. de la parab. est $y^2 = px$. Le point S dans lequel l'abscisse $PS = \frac{p}{4}$ s'appelle le foyer, parce tous les rayons parallèles à l'axe qui tombent dans la concavité de la parabole se réunissent en ce point, comme on le prouve dans tous les livres élémentaires des sections coniques. Nous avons démontré

Pl. XXXVI. *Fig. 262.*

déjà quelques propriétés de la parabole 3027 & suiv. 3033, 3043, il ne nous reste que peu de chose à ajouter.

3252. Le rayon vecteur SD dans une parabole, (ou la distance du foyer à la circonférence), est égal à l'abscisse plus le quart du paramètre; car $SQ = x - \frac{p}{4}$, $PT = x$, $DQ^2 = px$; dans le triangle DSQ rectangle en Q l'on aura $SD = \sqrt{DQ^2 + QS^2} = \sqrt{\left(px + xx - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16}\right)} = x + \frac{p}{4}$. Delà il suit que SD est aussi égale à ST & à SR, la ligne DR étant perpendiculaire à DT, car $ST = SP + PT = \frac{p}{4} + x$; & $SR = PQ - PS + QR = x - \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = x + \frac{p}{4}$. Ainsi le triangle TSD est isoscelle, comme nous le supposerons dans l'article suivant. On voit également que la sous-normale $QR = SR + SP - PQ = \frac{p}{2}$, ainsi la sous-normale est double du paramètre.

3253. Le rayon vecteur SD est égal à $\frac{SP}{(\text{cos.}\, \frac{1}{2} PSD)^2}$, c'est-à-dire, que le carré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3032) est au carré du rayon, comme la distance périhélie est au rayon vecteur. Si du foyer S on abaisse sur la tangente TD une perpendiculaire SX, l'angle TSD sera partagé en deux parties égales, puisque le triangle TSD est isocelle (3252); & parce SX est parallèle à DR, l'angle DRQ est égal à l'angle XST, c'est-à-dire à la moitié de PSD qui est l'anomalie vraie; dans le triangle RDT rectangle en D, on aura à cause de la perpendiculaire DQ cette proportion, $RQ : RD :: RD : RT$, ou $2PS : RD :: RD : 2SD$, donc $2PS : 2SD :: RQ^2 : RD^2$; mais $RQ : RD ::$ cos. $QRD : 1$; donc $PS : SD ::$ cos. $QRD^2 : 1 ::$ cos. $\frac{1}{2} PSD^2 : 1$; donc $SD = \frac{SP}{(\text{cos.}\, \frac{1}{2} PSD)^2}$, nous avons fait usage de cette propriété pour le calcul des comètes (3042).

PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE.

3254. L'ELLIPSE [a] est de toutes les courbes celle dont les astronomes font le plus d'usage, sur-tout dans les projections des éclipses, dans les calculs des orbites planétaires, & dans ceux de la figure de la terre. C'est une courbe de forme ovale ou alongée, dans laquelle les carrés des ordonnées sont aux rectangles correspondans des segmens du grand axe, comme le carré du petit axe est au carré du grand. Utilité de l'ellipse. Définition.

Soit *AMPI* (*fig.* 285) la circonférence d'une ellipse, *C* le centre, *AP* le grand axe, *CZ* la moitié du petit axe, *MB* l'ordonnée, *AB* & *BP* les deux segmens ; on a par la définition, ou par la propriété fondamentale de l'ellipse, $MB^2 : AB \,.\, BP :: CZ^2 : AC \,.\, CP$, & faisant $CA = a$, $CZ = b$, $CB = x$, $MB = y$, on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx)$; c'est l'équation de l'ellipse, de laquelle il faut partir comme d'une définition ; on démontre facilement que cette équation a lieu quand on coupe obliquement un cône ou un cylindre. Quelquefois au lieu de $\frac{bb}{aa}$ on met $\frac{p}{2a}$, en nommant p une troisième proportionnelle aux axes $2a$ & $2b$, c'est ce qu'on appelle le paramètre du grand axe. Si l'on compte l'abscisse x, non du centre, mais du sommet, on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Pl. XXXIX. Fig. 285. Equation de l'ellipse.

3255. On peut tirer de cette équation la valeur de x en y, si l'on considère que $(a - x)^2 = aa - 2ax + xx$; mais dans l'ellipse $2ax - xx = \frac{aa}{bb}y^2$; donc $(a - x)^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$, & $a - x = \frac{a}{b}\sqrt{bb - yy}$.

[a] Ce mot vient de Ἐλλείπω, *deficio*, comme parabole & hyperbole indiquent l'*égalité* & l'*excès*, parce que dans l'équation générale des Sections Coniques, $y^2 = 2px \pm p\frac{xx}{a}$, le carré de l'ordonnée est plus petit que le rectangle $2px$ de l'abscisse & du paramètre, égal ou plus grand, suivant qu'on a une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

Pl. XXX. Fig. 229. 3256. Si l'on décrit ſur le même axe HK (*fig.* 229), & autour du même centre C une ellipſe HLK, & un cercle HIK, on a dans le cercle, $DM^2 = HM.MK$; mais par la propriété de l'ellipſe, on a $MF^2 : HM.MK :: CL^2 : CI^2$, donc en mettant dans cette proportion à la place de $HM.MK$ ſa valeur DM^2, l'on aura $MF^2 : DM^2 :: CL^2 : CI^2$, donc $MF : DM :: CL.CI$; c'eſt-à-dire, que les ordonnées de l'ellipſe ſont proportionnelles aux ordonnées du cercle; enſorte que ſi l'on diviſe en deux parties égales toutes les ordonnées DM, CI, &c. d'un demi-cercle $KDIH$, la ligne qui paſſe par tous les points de diviſion, eſt une ellipſe $KFLH$; nous avons fait uſage fort ſouvent de cette proportion conſtante qu'il y a entre les ordonnées du cercle & celles de l'ellipſe (art. 1240, 1827, 2246, 3103, &c.).

3257. Cette propriété de l'ellipſe fait voir que tout cercle projetté ſur un plan qui lui eſt incliné y produit une ellipſe, comme nous l'avions déja remarqué (1827). La conſidération de cette projection fournit un moyen bien ſimple de démontrer que la propriété des axes (3254) a lieu auſſi, par rapport à deux diamètres de l'ellipſe tels
Pl. XXXI. Fig. 239. que MEN, QEq (*fig.* 239), dont l'un eſt parallèle aux ordonnées de l'autre; c'eſt-à-dire, que $Ss^2 : Qq^2 : NV.VM : NE.EM$. En effet, toutes les ordonnées Ss, Qq de l'ellipſe qui ſont parallèles entre elles, ſont plus petites que les ordonnées XO, Ff du cercle dont elles ſont les projections, & plus petites dans un rapport conſtant; les ſegmens NV, VM, NE, EM, dans l'ellipſe ſont plus petits que les ſegmens YZ, ZB, YE, EB, dont ils ſont les projections, & plus petits dans un rapport conſtant, puiſque les lignes de l'ellipſe ſont toutes également inclinées ſur le plan du cercle projetté; mais dans le cercle les carrés des ordonnées ſont égaux aux produits des ſegmens, donc dans l'ellipſe ils ſont dans un rapport conſtant; ſi par exemple les carrés des ordonnées elliptiques ſont la moitié des carrés des ordonnées circulaires, & que les produits des ſegmens dans l'ellipſe ſoient le quart de ceux du cercle, les carrés

des ordonnées elliptiques ſeront toujours doubles des rectangles de leurs ſegmens.

3258. Il ſuit encore delà que ſi deux lignes *MN* & *AR* ſe coupent dans l'ellipſe (*fig.* 288), & qu'elles ſoient parallèles à deux diamètres *GF*, *BD*, l'on aura cette proportion $AP.PR : MP.PN :: BQ.QD : GQ.QF$. En effet, les ordonnées *RA*, *BD* ſont plus petites que les ordonnées circulaires, dont elles ſont les projections ; mais elles ſont entre elles dans le même rapport ; les ſegmens *MP*, *PN*, *GQ*, *QF*, ſont les mêmes que les ſegmens circulaires, dont ils ſont les projections ; donc puiſque les carrés des ordonnées étoient égaux aux produits des ſegmens dans le cercle, ils ſeront en raiſon conſtante dans l'ellipſe ; c'eſt ce que M. de l'Hôpital démontre d'une manière fort longue (art. 165, *pag.* 108, édit. de 1720). *Pl. XXXIX. Fig.* 288.

3259. La sous-tangente *QR* de l'ellipſe (*fig.* 287) eſt $= \frac{aa-xx}{x}$, comme dans le cercle, en comptant les abſciſſes du centre. Concevez un cercle décrit ſur le rayon *CA*, mais incliné au plan de la figure, enſorte que ſa projection ortographique ſoit une ellipſe (1827) ; au point qui a ſa projection en *F* concevez une tangente au cercle ; cette tangente aura pour projection la tangente *FQ* de l'ellipſe ; car tout autre point du cercle au-dedans de la tangente ſe projettera en un point de l'ellipſe au-dedans du point *F*, ainſi le point *F* eſt le ſeul qui ſoit commun à la ligne *FQ* & à l'ellipſe ; donc la ligne *FQ*, projection de la tangente au cercle, eſt tangente à l'ellipſe, donc elles aboutiſſent l'une & l'autre au même point *Q* du grand axe ; mais dans le cercle on a $x : y :: y : RQ$; ou $RQ = \frac{aa-xx}{x}$, donc c'eſt auſſi la valeur de la ſous-tangente dans l'ellipſe. Sous-tangente. *Fig.* 287.

Corollaires. La diſtance *CQ* du centre à la tangente eſt $= \frac{aa}{x}$, puiſqu'elle eſt la ſomme de *CR* & *RQ*, l'on a donc $CL : CA :: CA : CQ$. L'équation de l'ellipſe étant la même par rapport au petit axe de l'ellipſe, l'on a

Fig. 287. pour le petit axe $CG:CB::CB:CX$, & $CX.CG = CB^2$.

3260. Si la ligne *FNH* eſt perpendiculaire en *F* à la tangente *QFTX*, le produit de *FH* par *FN* eſt égal au carré du demi-petit axe; car à cauſe des triangles ſemblables *CTX*, *FNR*, $CT:CX::FR:FN$, ou $FH:CX::CG:FN$, donc $FH.FN = CX.CG = CB^2$.

Pl. XXXI. Fig. 239. 3261. Le point *Q* de l'ellipſe (*fig.* 239), étant la projection du point *F* du cercle circonſcrit, la tangente de l'ellipſe en *Q* eſt la projection de celle du cercle en *F* (3259); la tangente à l'ellipſe en *Q* eſt parallèle au diamètre conjugué *MN*; d'où il ſuit que la tangente en *F* eſt parallèle au rayon *EY*, dont *EN* eſt la projection; ainſi le rayon *EF* fait un angle droit avec le rayon *EY*, ou avec le rayon *EB*. J'ai fait uſage de cette propriété pour l'aberration (2832, 2842).

3262. Le parallélogramme fait ſur deux diamètres conjugués eſt conſtant; ou ce qui revient au même le produit du demi-diamètre *EQ*, & de la perpendiculaire *QH*, abaiſſée ſur ſon demi-diamètre conjugué *EM* eſt égal au rectangle ou au produit des demi-axes. Puiſque l'angle *FEB* eſt toujours droit, le carré formé ſur *FE* & *EB* eſt conſtant, quelle que ſoit la ſituation des points *F* & *B* qui ont leur projection en *Q* & en *M*; le parallélogramme formé ſur *QE* & *EM* eſt la projection de ce carré; la ſurface de cette projection eſt conſtante, parce que de quelle manière qu'une figure ſoit placée dans un plan, ſa projection ſur un autre plan d'une inclinaiſon donnée eſt toujours dans le même rapport avec la figure projettée; quoique la projection change de forme : on comprendra facilement la vérité de ce principe ſi l'on diviſe, dans tous les cas, la figure projettée, par exemple, le carré fait ſur *FEB* en élémens ou lignes perpendiculaires à la commune ſection des deux plans, ou a *LE*; la ſomme de ces élémens ſera toujours conſtante, puiſque c'eſt la ſurface du carré; chacun a pour projection une ligne plus petite dans le rapport du coſinus de l'inclinaiſon au ſinus total (1825), donc la ſomme qui en réſulte ſera dans tous les cas une

ſurface plus petite dans ce même rapport que la ſurface donnée. Ainſi le carré fait ſur *EFB* ayant pour projection le parallélogramme fait ſur les diamètres conjugués *QE*, *EM*, ce parallélogramme ou le produit de *EQ* par *QH* eſt une quantité conſtante, quelque ſoit le point *Q*. Mais lorſque le point *Q* eſt en *L*, & le point *M* en *G*, ce parallélogramme eſt le rectangle des deux demi-axes, $= ab$, donc $QE \, . \, QH = ab$. J'ai fait uſage de ce théorême pour le calcul de l'aberration (2843). *Fig. 239.*

3263. La somme *des carrés de deux diamètres conjugués eſt conſtante*; c'eſt-à-dire, toujours égale à la ſomme des carrés des deux axes. Par exemple, $EQ^2 + EM^2 = 1 + b^2$, en nommant 1 le demi-grand axe de l'ellipſe, & b le demi-petit axe. Si l'on conçoit les points *Q* & *M* de l'ellipſe, comme étant les projections des points *F* & *B* du cercle, l'élévation perpendiculaire du point *F* du cercle au-deſſus du plan de l'ellipſe ſera le côté d'un triangle rectangle, dont *FD* ou le ſinus de l'arc *FL* eſt l'hypothénuſe, & *QD* l'autre côté; le carré de cette élévation ſera donc égal au carré de *FD* moins le carré de *QD* qui eſt dans le même rapport à chaque point de l'ellipſe; donc le carré de cette élévation ſera comme le carré du ſinus de *FL*. Puiſque *FB* eſt un quart-de-cercle, l'abaiſſement du point *B* au-deſſous de la figure ſera comme le carré du coſinus de *LF*, donc la ſomme des carrés de l'abaiſſement & de l'élévation ſera conſtante; mais les carrés des hypothénuſes *FE* & *EB* ſont conſtans, donc la ſomme des carrés des côtés *EQ*, *EM* eſt conſtante, c'eſt-à-dire, par-tout égale à la ſomme des carrés des demi-axes.

Corollaire. Par la même raiſon, la ſomme des carrés des abſciſſes *EC*, *ED* qui répondent aux diamètres conjugués eſt conſtante, puiſque l'une eſt le coſinus de *LB*, & l'autre le ſinus; & que le carré de ſinus plus celui du coſinus fait toujours le carré du rayon; donc $EC^2 + ED^2 = EL^2$.

3264. Lorſque l'abſciſſe *EV* (*fig.* 238) eſt le ſinus d'un nombre de degrés pris ſur le cercle circonſcrit *CD*, l'ordonnée *SV* eſt le coſinus d'un arc ſemblable, ou de

Fig. 238. pareil nombre de degrés pris sur le cercle inscrit ABF. Supposons l'arc CD de 50°, & l'arc AT de 50°, & tirons un rayon ETD ; le sinus DG de l'arc CD est égal à l'abscisse EV; donc EV est le sinus de 50° dans le grand cercle ; la ligne SV qui est égale à PE, est aussi le cosinus de 50° dans le cercle ATB, car $ET : ED :: TR$ ou $SV : DV$, ou $\frac{DV}{ED} = \frac{SV}{ET}$; or $\frac{DV}{ED}$ est le cosinus de l'arc CD de 50° (3613) ; donc $\frac{SV}{ET}$ est aussi le cosinus de 50°, ou le cosinus de l'arc AT; donc si l'abscisse EV est le sinus de 50° dans le grand cercle, l'ordonnée SV en sera le cosinus dans le petit cercle. Nous avons fait usage de cette propriété dans les articles 1843, 2767, 2825.

Pl. XXXVI. Fig. 266. 3265. Le secteur elliptique $GSVG$ (*fig.* 266) est au secteur circulaire $GSFG$, comme le petit axe de l'ellipse est au grand axe. Car toutes les ordonnées de l'ellipse sont à celles qui leur répondent dans le cercle en raison constante, & comme le petit axe est au grand axe (3256); ainsi le segment elliptique GBV qui est comme composé d'une infinité ordonnées à l'ellipse, sera au segment GBF composé d'une infinité d'ordonnées au cercle, dans ce même rapport du petit axe au grand axe. Les triangles rectilignes BSV, BSF, sont entre eux comme leurs bases BV, VF, c'est-à-dire, encore comme le petit axe est au grand axe ; donc les sommes, ou les secteurs entiers GSV, GSF, composés chacun d'un triangle & d'un segment, sont encore comme le petit axe est au grand axe de l'ellipse.

3266. La même chose doit s'étendre à l'ellipse entière, comme à chacune de ses parties ; ainsi la surface d'une ellipse est à celle du cercle circonscrit, comme le petit axe est au grand axe. Nous avons supposé cette vérité (1239).

3267. Si l'on appelle a & b les demi-axes de l'ellipse, & c la valeur de la circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, (c'est-à-dire, à peu-près le nombre 6,28), la surface de l'ellipse sera $\frac{cba}{2}$, car la circonférence dé-

crite sur le demi-grand axe est alors ca, la surface est $\frac{ca^2}{2}$, celle de l'ellipse est à celle du cercle, comme a est à b, donc celle de l'ellipse est $\frac{ca^2}{2} \cdot \frac{b}{a}$ ou $\frac{cab}{2}$. Surface de l'ellipse.

3268. La surface d'une ellipse est donc égale à celle d'un cercle, dont le diamètre est moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse; car le rayon de ce cercle seroit $\sqrt{ab}$, & sa surface $\frac{c}{2}\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}$ ou $\frac{cab}{2}$, égal à la surface de l'ellipse. Nous en avons fait usage (1257, 3331).

3269. Si de l'extrémité Z du petit axe (*fig.* 285), avec un rayon ZS égal au demi-grand axe CA, l'on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points S & F, qu'on appelle les foyers; supposant $CZ = b$, $CS = e$, $CA = a$, l'on aura $aa - ee = bb$. *Fig.* 285.

3270. Le rayon vecteur SM est égal à $\frac{PB.SA}{CA} - SB$; c'est-à-dire, $= \frac{(a+x)(a+e) - a(e+x)}{a}$, ou ce qui revient au même $\frac{a^2+ex}{a}$. Par la propriété la plus connue de l'ellipse, & que nous démontrerons même bientôt, on a $SM + FM = 2a$, supposons $SM = a + z$, & $FM = a - z$, on aura BM^2 ou $y^2 = SM^2 - SB^2 = aa + 2az + zz - ee - 2ex - xx = FM^2 - FB^2 = aa - 2az + zz - ee + 2ex - xx$, donc $2az - 2ex = -2az + 2ex$, $z = \frac{ex}{a}$, donc $SM = a + \frac{ex}{a}$, ou ce qui revient au même, comme on l'a vu au commencement de cet artic., $SM = \frac{PB.SA}{CA} - SB$. (Ceci se rapporte à l'article 1240). Rayon vecteur.

3271. Pour prouver que dans l'ellipse on a $SM + FM = 2a$, comme je l'ai supposé; il suffit de faire voir que cette supposition seule conduit à l'équation de l'ellipse; or $\frac{ex}{a}$ qu'on a déduit de cette supposition, étant mis à la place de z dans la première équation donnée par le triangle rectangle, on a $y^2 = a^2 + \frac{eexx}{aa} - ee - xx$;

Fig. 285. donc $aayy = a^4 + eexx - aaee - a^2x^2$, ce qui revient à cette proportion $aa : aa - ee$ (ou bb) :: $aa - xx : y^2$; propriété primitive de l'ellipse (3254).

3272. Si l'on tire au point V, un rayon vecteur SV, un diamètre VCn, est un diamètre conjugué CI, ce dernier intercepte sur le rayon vecteur SV une partie Vq égale à AC. En effet, ayant tiré Fh parallèle au diamètre CI, l'on aura $FV = Vh$, puisque les angles FVu, SVN sont égaux par la propriété des foyers de l'ellipse, & par conséquent leurs alternes F & h; mais à cause des triangles semblables SCq, SFh, dans lesquels $SC = CF$, on a aussi $Sq = qh$, donc Vq est égal à la demi-somme de FV & Vh, plus la moitié de Sh, c'est-à-dire, à la moitié de FV & de VS, ou à la moitié du grand axe.

3273. Le rayon vecteur $SM = \frac{PB.SA}{CA} - SB$ (3270) peut aussi s'exprimer par $SM = PS + \frac{CS.PB}{CA}$ (3102); car $PB.(SA - CS)$, c'est-à-dire, $PB.CA$ est la même chose que $CA.(PS + SB)$; donc $PB.SA - SB.CA = CA.PS + CS.PB$, ou $\frac{PB.SA}{CA} - SB = PS + \frac{CS.PB}{CA}$.

Fig. 287. 3274. La normale FN (*fig.* 287) est égale à $\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - a^2xx + b^2xx}$; car dans le triangle NFQ rectangle en F, $QR : RF :: RF : RN$, ou $\frac{aa - xx}{x} : \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx} :: \frac{b}{a}\sqrt{aa - xx} : \frac{bbx}{a^2}$; c'est la valeur de la sous-normale dont nous ferons usage (3582).

Sous-normale.

Dans le triangle rectangle NFR, $FN^2 = \sqrt{FR^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(aa - xx) + \frac{b^4x^2}{a^4}} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - a^2xx + b^2xx}$. Nous en ferons bientôt usage (3276).

Normale.

3275. Si de l'extrémité F d'un diamètre FC l'on abaisse une perpendiculaire FH sur son diamètre conjugué $ECHD$, & que l'on nomme m & n le sinus & le cos. de l'angle DCL, on aura $CH.FH = mn(aa - bb)$. Car $RN = \frac{bbx}{aa}$ (3274); donc $CN = x - \frac{bbx}{aa}$. Mais $CQ = \frac{aa}{x}$ (3259), donc

donc $CN.CQ = aa - bb$. Dans le triangle CNH rectangle en H, $CN : CH :: 1 :$ sin. CNH ou au cosinus n de l'angle HCN; de même $CQ : CT$ ou $FH :: 1 : m$; ainsi l'on a ces deux proportions; $1 : n :: CN : CH$, & $1 : m :: CQ : FH$; multipliant terme à terme, $1 : mn :: CN.CQ$, (ou $aa - bb$) : $CH.FH$; donc enfin $CH.FH = mn\,(aa - bb)$ art. 3538.

3276. Le rayon osculateur ou le rayon de la développée dans une ellipse est égal au cube de la normale divisé par le quart du carré du paramètre. Soit FP (*fig.* 286) le diamètre du cercle FSP, qui touche l'ellipse en F & se confond avec elle plus qu'aucun autre cercle, FCV le diamètre de l'ellipse qui passe au point de contact, & qui est coupé en S par le cercle osculateur; DFM est un arc infiniment petit, ou supposé assez petit pour être commun au cercle & à l'ellipse; cette supposition va nous servir à trouver la valeur du diamètre FP, parce que ce cercle qui a une ordonnée infiniment petite, commune avec l'ellipse, & répondante à une même abscisse FO la touche au point F sans la couper; ce cercle a au moins trois points communs avec l'ellipse; tout cercle plus grand ou plus petit sortiroit de l'ellipse ou rentreroit au-dedans. Par la propriété des cordes qui se coupent dans un cercle, on a $MO.OD = FO.OS$, & parce que $MO = OD$, l'ordonnée de l'ellipse étant coupée en deux parties égales par le diamètre FC, $MO^2 = FO.OS$; mais par la propriété des diamètres de l'ellipse $MO.OD$ ou $FO.OS : FO.OV :: CE^2 : CF^2$ (3257); donc $OS : OV :: CE^2 : CF^2$, ou bien $FS : FV$ ou $2CF :: CE^2 : CF^2$, donc $FS = \frac{2CE^2}{CF}$, c'est-à-dire, au paramètre du diamètre FCV (3254); ainsi le cercle osculateur intercepte toujours sur le diam. FV de l'ellipse une partie FS égale au paramètre de ce diam. *Fig.* 286.

Pour trouver la valeur de FP l'on considérera que $FH : FC :: FS : FP$, donc $FP = \frac{2CE^2}{FH}$; $FH^2 : CA^2 :: CB^2 : CE^2$ (3262), $FH^2 : CA^2 :: FH.FN : CE^2$ (3260); $CE^2 = \frac{CA^2.FN}{FH}$, donc $\frac{1}{2}FP$ ou $\frac{CE^2}{FH}$ est égal à $\frac{CA^2.FN}{FH^2}$; mais le pa-

Fig. 286. ramètre p de l'axe $AY = \frac{2CB^2}{CA}$ (3254), donc $\frac{1}{2}p.CA = CB^2, = FH.FN$ (3260); $FH = \frac{p.CA}{2FN}$, $FH^2 = \frac{pp.CA^2}{4FN^2}$; $\frac{1}{2}FP$, qui eſt $= \frac{CA^2FN}{FH^2}$, eſt donc auſſi $= \frac{4CA^2FN^3}{pp.CA^2} = \frac{FN^3}{\frac{1}{4}pp}$, c'eſt-à-dire, $\frac{4b^3}{pp}\sqrt{1-xx+bbxx}^3$ (3274) & mettant $4b^4$ à la place de pp, $\frac{1}{8}(1-xx+bbxx)^{\frac{3}{2}}$. Au ſujet des rayons oſculateurs on peut voir M. de l'Hôpital : *Analyſe des inf. petits*, art. 89. M. Euler *Introduct. in analyſin infinitorum*, Tom. II. art. 317. Le P. Boſcovich, *Sectionum conicarum elementa*, art. 523. Nous avons fait uſage de cette expreſſion, pour trouver l'aplatiſſement de la terre (2676).

Equation de l'ellipſe.

3277. L'équation de l'ellipſe, entre le rayon vecteur & l'anomalie vraie (1234), eſt celle dont on fait uſage dans les calculs de l'attraction (3465, 3493). Dans une ellipſe dont le demi-axe eſt a, l'anomalie $MSA = u$, le *Fig.* 285. rayon vecteur SM (*fig.* 285) $= r$, l'excentricité $CS = e$, le demi-paramètre $= p, = \frac{bb}{a} = \frac{aa-ee}{a}$, l'on a $\frac{p}{r} = \frac{a - e.\text{coſ}.u.}{a}$. En effet, ſoit priſe $CK = \frac{aa}{e}$, on aura $KB = \frac{aa}{e} + x = \frac{aa+ex}{e} = MH$; $SK = \frac{aa}{e} - e = \frac{aa-ee}{e} = \frac{ap}{e}$; mais $SM = \frac{aa+ex}{a}$ (3270), & $\frac{aa+ex}{a} : \frac{aa+ex}{e} :: e : a$, donc $SM : MH :: e : a$, ou $r = \frac{e}{a}MH$; mais $MH = SB + SK = r\,\text{coſ}.\,u + \frac{aa-ee}{e}$, donc r ou $\frac{e}{a}MH = \frac{aa-ee+er\,\text{coſ}.\,u}{a}$, $\frac{ar-er\,\text{coſ}.\,u}{a} = \frac{aa-ee}{a} = p$, donc $\frac{p}{r} = \frac{a-e.\,\text{coſ}.\,u}{a}$.

3278. Cette expreſſion donne la valeur du rayon vecteur r en parties du demi-axe, ou de la diſt. moy. a qui eſt priſe pour unité, car $r = \frac{ap}{a-e\,\text{coſ}.\,u}$. Suppoſons $u = 90°$, on aura $r = p$, c'eſt-à-dire, qu'alors le rayon vecteur eſt égal au demi-paramètre de l'ellipſe ; ce qui eſt connu d'ailleurs, puiſque l'ordonnée entière au foyer d'une ſection conique eſt toujours égale au paramètre.

3279. Si l'on vouloit supposer le demi-axe $= 1$, l'on trouveroit $r = \frac{p}{1 - e \operatorname{cos}. u} = \frac{1 - ee}{1 - e \operatorname{cos}. u}$, c'est le rayon vecteur, & l'équation de l'orbite devient $\frac{p}{r} = 1 - e \operatorname{cos}. u$.

3280. Si au lieu de l'angle u qui exprime l'anomalie vraie, on substitue l'angle compté d'un autre point quelconque, éloigné de l'apside, d'une quantité m, l'anomalie vraie étant $u - m$, il faudra mettre $u - m$ à la place de u; l'on aura (3620), $\frac{p}{r} = 1 - e \operatorname{cos}. u \operatorname{cos}. m - e \operatorname{sin}. m \operatorname{sin}. u$, & faisant les constantes $e \operatorname{cos}. m = h$, $e \operatorname{sin}. m = g$, on trouvera $\frac{p}{r} = 1 - h \operatorname{cos}. u - g \operatorname{sin}. u$, c'est la forme sous laquelle on l'emploie dans le calcul des attractions (3459), l'apside étant immobile. Equation plus générale.

3281. Si dans le même temps que la planète décrit un angle u la ligne des apsides avançoit elle-même, c'est-à-dire, si l'apside étoit mobile, & que son mouvement fût à celui de la planète, comme $1 - m$ est à 1, le mouvement de la planète étant u, celui de l'apside seroit $u - mu$; l'anomalie vraie de la planète dans son ellipse mobile seroit mu, & l'équation de l'ellipse mobile $\frac{p}{r} = 1 - e \operatorname{cos}. mu$; on en fait usage dans certains cas (3512). Equation de l'ellipse mobile.

3282. La section oblique d'un sphéroïde elliptique aplati, tel que la terre, est toujours une ellipse. Soit GF (*fig.* 288), le diamètre de l'équateur, AR le diamètre de la section oblique AOR dont on cherche la nature, BD un diamètre de l'ellipse tiré parallélement à la section AR; MN le diamètre d'un parallèle MON; PO une ordonnée commune au cercle MON & à la courbe ROA. Par la propriété du cercle l'on a $MP . PN = PO^2$, mais par la propriété de l'ellipse GBF, $AP . PR : MP . PN :: QD^2 : GQ^2$, (3258) donc $AP . PR : PO^2 :: QD^2 : GQ^2$, c'est-à-dire, en raison constante, quelle que soit la situation du point P sur la ligne AR; donc la courbe AOR est une ellipse semblable à celle qui passe par BD. Cette proposition est nécessaire dans les recherches de la figure de la terre (3580). Section d'un sphéroïde. *Fig.* 288.

Fig. 288. Cette propoſition a lieu pour les cas même, où le plan de ſection n'eſt point parallèle à l'axe, ni perpendiculaire au plan de l'équateur ; mais la propoſition ſuivante eſt limitée à un plan de ſection parallèle au petit axe du ſpéroïde, ou à l'axe du monde.

3283. La ſection d'un ſphéroïde aplati tel que la terre, parallèlement au méridien eſt une ellipſe ſemblable au méridien. Car ſi la ligne *AR* devient perpendiculaire à *GQF*, le rapport de GQ^2 à DQ^2 deviendra celui du carré du grand axe au carré du petit axe ; donc dans la ſection *AOR*, lorſque *AR* ſera parallèle à l'axe du monde le rapport des axes ſera le même que dans l'ellipſe *GDF*.

3284. Delà il ſuit que la ſection d'un ſphéroïde elliptique eſt toujours ſemblable à l'ellipſe du méridien pourvu que le plan de cette ſection ſoit perpendiculaire au plan de l'équateur, car alors il ſera toujours parallèle à quelqu'un des méridiens ; c'eſt ce que ſuppoſe M. Clairaut, dans ſa figure de la terre, *pag*. 181.

De l'Arithmétique des Infinis, ou du Calcul des ſuites.

Puiſſances d'un binome.

3285. Le carré d'un binome $a + b$ eſt $aa + 2ab + bb$, ſon cube eſt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & ſi l'on continue à chercher les puiſſances de ce binome en multipliant continuellement par $a + b$, on remarquera bientôt que les puiſſances de a vont toujours en diminuant d'une unité, a^3, a^2, &c. que celles de b vont toujours en augmentant, b, b^2, b^3, &c. que les coëfficiens de ces différens termes ſont les lignes verticales du triangle arithmétique, dont M. Paſchal donna la deſcription en 1654.

Élévation des puiſſances.

3286. Règle générale *pour élever un binome* a + b *à une puiſſance quelconque m*. On mettra d'abord les puiſſances de a, ou du premier terme, dans cet ordre, a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, &c. en diminuant toujours l'expoſant d'une unité à chaque terme; 2°. l'on écrira les puiſſances de b ou du ſecond terme, dans cet ordre,

1, b, b^2, b^3, &c. en augmentant toujours l'exposant d'une unité ; 3°. on écrira les exposans dans cet ordre, 1, m, $\frac{m.(m-1)}{1.2}$, $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$, $\frac{m(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$, & ainsi de suite.

3287. Ce théorême de Newton est d'un usage immense dans tous les calculs de l'attraction, & il faut avoir la règle suivante très-familière quand on veut s'occuper de pareilles recherches : $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m.(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3$, &c.

3288. Pour exprimer la quantité $\frac{1}{1+2\beta}$ (2679) dans laquelle β est une fraction très-petite, on peut considérer cette quantité, comme si c'étoit $1+2\beta$ élevé à la puissance -1, suivant le calcul des exposans qui fut donné par Wallis, en 1655, (*Arithmet. infinit.*) ; si l'on y applique la formule précédente, on trouvera $1-2\beta$, en négligeant les termes suivans. On auroit la même chose en faisant la division à la manière ordinaire. Calcul des exposans.

On trouve par les mêmes principes que la différence des carrés est double de celle des racines, quand la différence est fort petite (2676) ; car le carré de $1+\alpha$ est $1+2\alpha$, en négligeant α^2 qui est le carré d'une fraction très-petite, & par conséquent encore plus négligeable.

3289. Pour élever à la puissance $-\frac{3}{2}$ le binome $1+(mm-1)ss$, dont nous avons fait usage (2676), on emploie la formule 3287 ; les puissances du premier terme sont toutes égales à 1, celles du second terme sont $(mm-1)ss$, $(mm-1)^2 s^4$, &c. ; les coëfficiens sont, 1, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}.-\frac{5}{2}.\frac{1}{2}$, ou $+\frac{15}{8}$, &c. donc le binome $(1+(mm-1)ss)^{-\frac{3}{2}} = 1-\frac{3}{2}(mm-1)ss+\frac{15}{8}(m^2-1)^2 s^4$, &c.

3290. Cette règle générale pour l'élévation des puissances nous sert à exprimer le côté d'un triangle rectiligne, dont on connoît les deux autres côtés & l'angle compris, ce qui est d'un grand usage pour le calcul des forces attractives des planètes (3485). Soit le triangle *RTS* (*fig.* 290), dont on connoît le côté $ST=r$, le côté Trouver le troisième côté d'un triangle. *Fig.* 290.

Fig. 290. $SR=f$ & l'angle compris $RST=t$, on demande le côté $RT=s$, & la valeur de $\frac{1}{s^3}$. Je ſuppoſe d'abord que $RT=s=\sqrt{f^2-2fr\text{ coſ. }t+r^2}$ (3637), $s^3=(f^2+r^2-2fr\text{ coſ. }t)^{\frac{3}{2}}$, donc $\frac{1}{s^3}=(f^2+r^2-2fr\text{ coſ. }t)^{-\frac{3}{2}}$, qu'il faut développer en une ſuite de termes où il n'y ait que coſ. t, $2t$, $3t$, &c. (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 15). Voici une manière de le faire, adaptée aux uſages de l'attraction; mais dans laquelle je ſuppoſe f beaucoup plus grand que r.

Pour réduire ce trinome à la formule générale (3287); ſoit $2fr\text{ coſ. }t-r^2=a$, enſorte que $\frac{1}{s^3}=(f^2-a)^{-\frac{3}{2}}$, & en élevant f^2-a à la puiſſance $-\frac{3}{2}$, l'on aura, par la règle générale $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}+\frac{15a^2}{8f^7}+\frac{35a^3}{16f^9}+\frac{315a^4}{128f^{11}}$, &c. On ſubſtituera pour a, a^2, a^3 leurs valeurs; d'abord pour a la valeur $2fr\text{ coſ. }t-r^2$; pour a^2 l'on aura $4f^2r^2\text{ coſ. }t^2-4fr^3\text{ coſ. }t+r^4$; mais coſ. $t^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{ coſ. }2t$ (3627); ainſi $a^2=2f^2r^2+2f^2r^2\text{ coſ. }2t-4fr^3\text{ coſ. }t+r^4$. De même $a^3=8f^3r^3\text{ coſ. }t^3-12f^2r^4\text{ coſ. }t^2+6fr^5\text{ coſ. }t-r^6$, mais coſ. $t^3=\frac{3}{4}\text{ coſ. }t+\frac{1}{4}\text{ coſ. }3t$ (3631), donc $a^3=6f^3r^3\text{ coſ. }t+2f^3r^3\text{ coſ. }3t-6f^2r^4-6f^2r^4\text{ coſ. }2t+6fr^5\text{ coſ. }t-r^6$. L'on trouvera auſſi $a^4=16f^4r^4\text{ coſ. }t^4-32f^3r^5\text{ coſ. }t^3+24f^2r^6\text{ coſ. }t^2-8fr^7\text{ coſ. }t+r^8$; mais coſ. $t^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\text{ coſ. }2t+\frac{1}{8}\text{ coſ. }4t$ (3632); ſubſtituant cette valeur, auſſi bien que celles de coſ. t^3 & coſ. t^2, l'on a $a^4=6f^4r^4+8f^4r^4\text{ coſ. }2t+2f^4r^4\text{ coſ. }4t-24f^3r^5\text{ coſ. }t$. Je néglige les cinq autres termes qui ſont plus petits, parce qu'ils ſont multipliés par de plus hautes puiſſances de r & de moindres puiſſances de f, & que je ſuppoſe f beaucoup plus grand que r; ces valeurs de a, a^2, &c. ſubſtituées dans la ſérie $\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}$, &c. donnent $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{9r^2}{4f^5}+\frac{225r^4}{64f^7}+\left(\frac{3r}{f^4}+\frac{45r^3}{8f^6}\right)\text{ coſ. }t+\left(\frac{15r^2}{4f^5}+\frac{105r^4}{16f^7}\right)\text{ coſ. }2t+\frac{35r^3}{8f^6}\text{ coſ. }3t+\frac{315}{64}\cdot\frac{r^4}{f^7}\text{ coſ. }4t$.

Les coëfficiens, tels que $\frac{9}{4}$, $\frac{225}{64}$, &c. sont formés de l'addition des différentes fractions, qu'il faut ajouter ou soustraire suivant les signes; ainsi parmi les termes $\frac{r^4}{f^7}$ on trouvera $\frac{15}{8} - \frac{105}{8} + \frac{6.315}{128}$ qui sont $\frac{120}{64} - \frac{840}{64} + \frac{945}{64} = \frac{225}{64} \frac{r^4}{f^7}$, & ainsi des autres. Si l'on poussoit plus loin les termes où se trouve cos. $4t$, on auroit des termes divisés par f^9, qui deviennent beaucoup moindres, pourvu qu'on suppose que f soit 5 à 6 fois plus grand que r, comme dans l'art. 3485.

3291. LE RETOUR DES SUITES est la méthode qui enseigne à dégager l'inconnue d'une série; je suppose qu'on ait une série $z = ay + by^2 + cy^3 + ey^4$, &c. on peut en trouver la racine y, par la méthode des indéterminées. Supposons la quantité $y = hz + iz^2 + kz^3 + lz^4$, on prendra le carré & le cube de cette série, en négligeant les puissances qui sont au-dessus de z^6, on les substituera dans $z = ay + by^2 + cy^3$, &c. & l'on aura une nouvelle série composée de z, & de ses puissances; tous les termes de cette série qui renfermeront z, sont égaux au coefficient indéterminé h, tous ceux qui renferment z^2 sont égaux à i, &c.; ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de coefficiens indéterminés dans $hz + iz$, &c. l'on en déduira la valeur de ces coefficiens, & l'on aura $y = \frac{a}{z} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2 e}{a^7} z^4 + \frac{14b^4 + 6a^2 be - 21ab^2 c + 3a^2 c^2 - a^3 f}{a^9} z^5$, &c. Je n'entre pas dans le détail de ce calcul, on le peut voir dans les *Elémens de Mathémat.* de Wolf, &c. Je ne l'indique ici que pour servir à trouver les sinus (3315). Retour des suites.

3292. PROBLEME. Résoudre l'équation $x = u + a$ sin. mu, ou trouver la valeur de u en x, dans la supposition que a est une fraction assez petite, comme $\frac{1}{10}$ ou 0, 1.

SOLUTION. supposons pour une première approximation que u soit égale à x, puisqu'elles diffèrent peu l'une de l'autre, le terme a sin. mu étant très-petit; cette supposition nous donnera une valeur de u, & substituant cette

valeur de u dans le petit terme a ſin. mu, il en réſultera une erreur encore plus petite dans la valeur de u, puiſqu'elle ne ſera que la dixième partie du petit terme a ſin. mu; en ſuppoſant donc $x = u$, on a $x = u + a$ ſin. mx, ou $u = x - a$ ſin. mx, $mu = mx - ma$ ſin. mx; donc $u = x - a$ ſin. $(mx - ma$ ſin. $mx)$. Pour rendre ce ſecond terme plus ſimple, on mettra ſa valeur (3619), ſin. mx coſ. (ma ſin. mx) — coſ. mx ſin. (ma ſin. mx); on ſuppoſera auſſi le coſinus du petit arc ma ſin. mx égal à l'unité, & le ſinus égal à l'arc lui-même, car il n'en diffère que d'une quantité où entre le cube de la petite fraction a (3315), de ſorte que ſi $a = \frac{1}{10}$, on a $a^3 = \frac{1}{1000}$, ce qui rend la différence de cet arc à ſon ſinus, mille fois plus petite que l'arc; nous pouvons donc ſuppoſer que le ſinus eſt égal à l'arc lui-même, & au lieu de ſin. (ma ſin. mx) mettre ſeulement l'arc ma ſin. mx; en faiſant ces deux ſubſtitutions, nous aurons $u = x - a$ ſin. $mx + ma^2$ coſ. mx ſin. mx, donc $u = x - a$ ſin. $mx + \frac{ma^2}{2}$ ſin. $2mx$ (3625).

3293. Cette ſeconde valeur de u en x approche encore plus de la vérité, puiſqu'on n'y a pas même négligé le terme qui renferme a^2 ou qui eſt dix fois plus petit que celui qui renferme ſeulement a. Si l'on ſubſtituoit cette valeur de u & du ſinus de mu, dans le ſecond terme de l'équation donnée $x = u + a$ ſin. mu, on auroit une troiſième approximation dans laquelle ſe trouveroient même les termes qui renferment a^3, ou le cube de la petite fraction a.

M. Clairaut trouve qu'on auroit dans ce cas-là $u = x - a\left(1 - \frac{m^2 a^2}{8}\right)$ ſin. $mx + \frac{1}{2} a^2 m$ ſin. $2mx - \frac{3}{8} a^3 m^2$ ſin. $3mx$ (*Pièce ſur la Théorie de la Lune*, art. XXXI). Il réſout dans le même endroit l'équation plus compliquée $x = u + a$ ſin. $mu + b$ ſin. $pu + c$ ſin. qu, & elle lui eſt néceſſaire pour la théorie de la lune où il y a trois termes aſſez conſidérables (3479); on peut voir de plus grands détails ſur cette eſpèce d'équations dans les *Mémoires de l'académie* 1760, *pag.* 325, à l'occaſion de mes calculs ſur les inégalités de Vénus, produites par l'attraction de la terre.

Du

Du calcul différentiel & Intégral.

3294. L'USAGE que nous ferons dans ce livre-ci, & dans le fuivant du calcul des infiniment petits, exigeroit que nous en donnaffions ici quelques notions, comme nous l'avions fait dans la première édition de cet ouvrage; mais l'abondance des matières nous oblige à renvoyer pour celle-ci aux traités de calcul différentiel de M. le Marquis de l'Hôpital, de M. Euler, &c. Nous nous contenterons de rappeller ici les règles générales, & les applications dont nous avons befoin.

Si l'on appelle x une quantité variable quelconque, & dx une augmentation infiniment petite, qu'on appelle fa différentielle, celle de mx fera mdx, celle de x^m fera $mx^{m-1}dx$. Pour avoir la différentielle du produit de deux quantités x & y, il n'y a qu'à mettre $x+dx$ à la place de x, & $y+dy$ à la place de y, multipliant les quantités ainfi augmentées, on a $xy+xdy+ydx+dxdy$, il faut rejetter $dxdy$ comme étant infiniment plus petit que dx & que dy; ainfi le produit xy a augmenté de $xdy+ydx$; c'eft donc-là fa différentielle. D'où fuit la règle générale pour différentier un produit. *Multipliez chacune des quantités par la différentielle de l'autre, & prenez la fomme des produits.* Différentier un produit.

Les différences fecondes, telles que ddx, fe traitent de la même manière que les différences premières, on en verra divers exemples.

3295. La même règle fert à différentier $\frac{x}{y}$ qui revient à xy^{-1}, fuivant le calcul des expofans; la différentielle eft donc $y^{-1}dx - xy^{-2}dy$, ou $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$, ou $\frac{ydx - xdy}{y^2}$. Différentier une fraction.

De la même manière l'on pourra différentier une quantité fractionnaire, telle que $\frac{f^2 dr}{Mrr}$ (3454), & l'on trouvera $\frac{f^2 ddr}{Srr} - \frac{2 Srdr f^2 dr}{S^2 r^4}$ ou $\frac{f^2 ddr}{Sr^2} - \frac{2 f^2 dr^2}{Sr^3}$.

3296. Si le rapport de deux quantités x & y eſt conſtant, les différentielles de ces deux quantités ſeront encore dans le même rapport; car alors il faut que ces deux variables, avec leurs augmentations, aient encore le même rapport, ou que $x+dx$ ſoit à $y+dy$, comme x eſt à y; donc $x+dx-x:y+dy-y::x:y$, ou $dx:dy::x:y$. Si le rapport de x à y eſt égal à une quantité conſtante a, & qu'on ait $\frac{x}{y}=a$, on aura $x=ay$ & $dx=ady$ (3294); donc $\frac{dx}{dy}=a$. Nous en ferons uſage, art. 3837.

3297. La différentielle de $\sqrt{1+x}$, ou d'une quantité irrationnelle quelconque, ſe trouve en la réduiſant à une quantité rationnelle: ſuppoſons $\sqrt{1+x}=y$, & cherchons la différentielle de y; nous aurons $1+x=y^2$, $dx=2ydy$ (3304), $dy=\frac{dx}{2y}=\frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$.

3298. La différentielle de $\frac{1}{5}xx\sqrt{x}$, ou $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}dx$, eſt $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx$. De même la différentielle de $\frac{4}{3}bx\sqrt{x}$ ou $\frac{4}{3}bx^{\frac{3}{2}}$ eſt $\frac{3}{2}.\frac{4}{3}\,bx^{\frac{1}{2}}dx$ ou $2b\sqrt{x}dx$; on s'en ſert quelquefois pour trouver l'attraction d'un ſphéroïde.

3299. On trouve, par cette méthode, que la différentielle de $\sqrt{1+xx}$ eſt $\frac{xdx}{\sqrt{1+xx}}$, & que celle de $\sqrt{1-xx}$ eſt $\frac{-xdx}{\sqrt{1-xx}}$; la différentielle de $\frac{a}{\sqrt{1-x}}$ eſt $\frac{adx}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, & celle de $x\sqrt{1-xx}$ eſt $dx\sqrt{1-xx}-\frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}}$.

De-là il ſuit que la différentielle de $\sqrt{f^2+\int \Pi r^3 du}$ (3452) eſt $\frac{\Pi r^3 du}{\sqrt{f^2+2\int \Pi r^3 du}}$, car il n'y a qu'à mettre dans l'expreſſion $\sqrt{1-xx}$, f^2 au lieu de 1, & $2\int \Pi r^3 du$ à la place de xx. Nous ferons voir bientôt que la diffé-

rentielle de $2\int \pi r^3 du$ n'eſt autre choſe que $2\pi r^3 du$ (3301).

Lorſqu'une quantité qui a augmenté juſqu'à un certain terme eſt prête à diminuer, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt arrivée à ſon *maximum*, elle ceſſe d'augmenter, alors ſa différentielle eſt nulle ou égale à zéro; c'eſt en quoi conſiſte la régle de *maximis* & *minimis*, dont nous ferons uſage plus d'une fois.

3300. LE CALCUL INTÉGRAL eſt l'inverſe du calcul différentiel : nous avons ſuppoſé que dx étoit la différentielle de x (3294), nous dirons ici que l'intégrale de dx eſt x. On dira de même que l'intégrale de $mx^{m-1}dx$ eſt x^m, d'où ſuit la règle ſuivante pour intégrer les quantités où il n'y a qu'une ſimple puiſſance de l'inconnue x : *augmentez d'une unité l'expoſant de l'inconnue* x, *& diviſez-la par cet expoſant ainſi augmenté, & par* d x:

Règle d'intégration.

Trouver l'intégrale d'une quantité comme $mx^{m-1}dx$, C'eſt trouver le rapport qu'il y a entre x & la quantité qui a produit $mx^{m-1}dx$ par ſon petit accroiſſement; nous connoiſſons la relation des différentielles ou des petits accroiſſemens, & nous en voulons conclure celle des quantités finies qui ont reçu ces petits accroiſſemens; cela eſt extrêmement utile dans les calculs de l'attraction, parce que le petit accroiſſement de diſtance ou de vîteſſe que produit une certaine attraction ſe trouve facilement, mais le total de la quantité, à laquelle appartient ce petit accroiſſement, ſeroit impoſſible à trouver ſans les règles de ces petits accroiſſemens. V. *le Traité du calcul intégral* par M. de Bougainville, en 2 *vol. in*-4°. 1754 & 1756 (chez Deſaint & Saillant); on doit conſulter auſſi l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre *Inſtitutionum calculi integralis, vol. I. & II. Petropoli*, 1768, 542 *pag. in*-4°; les traités des fluxions de Newton, de Mac-laurin, & de Simpſon; l'analyſe démontrée du P. Reynau, & les leçons que Jean Bernoulli compoſa en 1691, (*Bern. opera. tom. III. pag.* 388); le calcul intégral du P. Jacquier, & du P. le Seur, celui du P.

Utilité du calcul intégral.

Riccati, les opuscules de M. d'Alembert, le recueil des mémoires de M. Fontaine, les mémoires de l'académie des sciences de Paris; ceux Berlin, de Péterſbourg, de Turin.

3301. Quand on ne peut intégrer une différentielle, on se contente d'indiquer son intégrale, & cela se fait par le moyen de la lettre $\int$; ainsi l'intégrale de r^3du est $\int r^3 du$; & par la même raison la différentielle de $\int r^3 du$ seroit $r^3 du$ tout simplement, comme nous l'avons supposé (3299).

Pour avoir l'intégrale de $\frac{aa-xx}{aa} \cdot \frac{xxdx}{a}$, il suffit d'achever la multiplication qui n'est qu'indiquée, & l'on aura $\frac{xxdx}{a} - \frac{x^4dx}{a^3}$, dont l'intégrale est $\frac{x^3}{3a} - \frac{x^5}{5a^3}$ (3300); si l'on fait $x=a$, elle deviendra $\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{5}a^2 = \frac{2}{15}a^2$, c'est l'intégrale de $\frac{aa-xx}{aa} \cdot \frac{xxdx}{a}$ pour le cas où $x=a$.

Autres formules différentielles.

3302. Suivant la règle donnée pour les fractions (3295), la différentielle de $\frac{fdr\sqrt{1+2\rho}}{rrdu}$ (3453), en supposant du constant, sera composée de trois termes; 1°. la différentielle de dr qui est ddr, multipliée par tout le reste de la quantité donnée; 2°. la différentielle de $\sqrt{1+2\rho}$ qui est $\frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}}$ (3297) multipliée par tout le reste de la quantité; 3°. la différentielle de $\frac{1}{rrdu}$ qui est $\frac{-2rdrdu}{r^4du^2}$ (3295) multipliée par $fdr\sqrt{1+2\rho}$; la différentielle totale sera $\frac{fddr\sqrt{1+2\rho}}{rrdu} + \frac{fdr}{rrdu} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}} - \frac{2frdr^2du\sqrt{1+2\rho}}{r^4du^3}$.

3303. La différentielle de $\frac{1}{2}(\int \Pi rdx)^2$ se trouvera par la règle ordinaire (3294), en multipliant la quantité donnée par son exposant 2, diminuant l'exposant lui-même d'un, & multipliant encore par la différentielle de l'inconnue simple $\int \Pi rdx$, qui est Πrdx (3301); on aura donc $\Pi rdx \int \Pi rdx$ pour la différentielle de $\frac{1}{2}(\int \Pi rdx)^2$ (3452).

3304. La différentielle d'une quantité comme $a+x$ composée d'une constante a & d'une variable x, est dx aussi bien que celle de la quantité x toute seule; la constante n'y entre pour rien; ainsi quand on a une différentielle dx, son intégrale est x, mais en général cette quantité x doit être augmentée de quelque constante a pour exprimer la quantité que l'on cherchoit, c'est-à-dire, $a+x$; ordinairement les conditions & les circonstances d'un problême déterminent la constante qu'il faut ajouter à l'intégrale. Compléter une intégrale.

3305. Souvent il arrive par la nature du problême que l'intégrale cherchée, doit être égale à zéro, quand l'inconnue elle-même s'évanouit; si l'on reconnoît que ce cas doive avoir lieu, on observera la règle suivante; quelques auteurs appellent cela en général compléter l'intégrale, mais improprement, puisque ce n'est que satisfaire à la condition particulière du problême. Après avoir intégré par les règles précédentes, on fera l'inconnue $=0$; si toute la quantité ne devient pas aussi $=0$, qu'elle ait une valeur, on retranchera cette valeur de l'intégrale trouvée, & l'on aura l'intégrale complète; car puis qu'on est sûr que la quantité finie qui auroit produit la différentielle donnée, doit disparoître quand l'inconnue $=$zéro; il faut donc la rendre telle, & en ôter ce qui est nécessaire pour que le total s'évanouisse avec l'inconnue, si l'on veut avoir la quantité qui a dû produire la différentielle donnée : j'ai fait usage de cette règle dans les articles 2687, 3458, &c.

3306. Pour avoir l'intégrale de $4s^3\sqrt{1-ss}\,ds$ (2687) il faut transformer cette différentielle en une quantité rationelle, afin de pouvoir y appliquer la règle générale (3300); faisons donc $\sqrt{1-ss}=z$; $1-ss=zz$, $ss=1-zz$, $s=\sqrt{1-zz}$, $dz=\frac{-z\,dx}{\sqrt{1-zz}}$ (3298), $4s^3=4(1-zz)\sqrt{1-zz}$; donc la différentielle proposée $4s^3\sqrt{1-ss}\,ds=-4z^2dz(1-zz)=4z^4dz$

$-4z^2 dz$, dont l'intégrale (3300) $= \frac{4}{5}z^5 - \frac{4}{3}z^3$; il faut y ſubſtituer les valeurs de z^5 & de z^3, & l'on aura $\frac{4}{5}(1-ss)^2\sqrt{1-ss} - \frac{4}{3}(1-ss)\sqrt{1-ss}$. Pour compléter cette intégrale (3305), on fera $s=0$, parce que l'on eſt sûr par la nature du problême que *Ih* (*fig.* 222), c'eſt-à-dire, la valeur que l'on cherche, eſt nulle quand $s=0$; alors l'intégrale deviendra $\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{15}$; cela prouve qu'il faut l'augmenter de $\frac{8}{15}$; par ce moyen l'on aura l'intégrale complète, c'eſt-à-dire, celle qui diſparoîtra entiérement quand s ſera nulle, $= \frac{4}{5}(1-ss)^2\sqrt{1-ss} - \frac{4}{3}(1-ss)\sqrt{1-ss} + \frac{8}{15}$.

Différentielles des ſinus.

3307. Le plus grand uſage que nous faſſions du calcul intégral eſt pour les ſinus. Suppoſons qu'un arc x augmente ou diminue d'une quantité infiniment petite dx, alors ſon ſinus augmentera ou diminuera d'une quantité dx coſ. x; c'eſt-à-dire, que d ſin. $x = dx$ coſ. x. Soit un arc *AB* (*fig.* 293), dont le ſinus eſt *BD*, le coſinus *DC*, la différentielle *BE*; le ſinus diminuera de la quantité *BF*, lorſque l'arc diminuera de *BE*, & le coſinus croîtra de la quantité *FE*; ainſi *BF* $= d$ ſin. x; *FE* $= d$ coſ. x. Le triangle infiniment petit *BEF* eſt ſemblable au triangle *BCD*, car ils ſont tous deux rectangles, & de plus l'angle *FBE* qui eſt le complément de *CBF* eſt égal à l'angle *BCD*; donc *BF* : *BE* : : *CD* : *BC*; c'eſt-à-dire, d ſin. $x : dx : :$ coſ. $x : 1$, donc d ſin. $x = dx$ coſ. x. (Fig. 293.)

3308. On trouvera de même que d coſ. $x = -dx$ ſin. x, car les triangles ſemblables *BCD*, *BEF* donnent cette proportion *FE* : *BE* : : *BD* : *BC*, c'eſt-à-dire, $+d$ coſ. $x : -dx : :$ ſin. $x : 1$, donc d coſ. $x = -dx$ ſin. x. Cette expreſſion a un ſigne négatif, tandis que la précédente avoit un ſigne poſitif, parce que les coſinus changent en ſens contraire des ſinus, ils décroiſſent tandis que les arcs ou les ſinus augmentent.

Connoiſſant la différentielle de coſ. x, on doit chercher celle de coſ. mx dont nous ferons un fréquent uſage dans les calculs de l'attraction; la différentielle de x eſt dx, celle de mx eſt mdx; au lieu de coſ. x nous aurons coſ.

mx, ainsi au lieu de l'expression trouvée ci-devant $-dx$ sin. x, nous aurons d cos. $mx = -mdx$ sin. mx. Par la même raison si l'on cherchoit la différentielle de $+\frac{\alpha}{m}$ cos. mx, on auroit $-\alpha$ sin. $mx\,dx$; nous allons en tirer une règle générale, dont nous ferons souvent usage.

Pour intégrer une formule, α sin. $mx\,dx$, qui renferme un sinus, il faut 1°, changer les signes, 2°, mettre cosinus à la place de sinus, 3° diviser la formule par mdx, m étant le multiple de x compris dans la formule, & l'on a l'intégrale cherchée $-\frac{\alpha}{m}$ cos. mx. Règle pour intégrer.

3309. Il est aisé de démontrer que l'intégrale de αcos.$mxdx$ sera $\frac{\alpha}{m}$ sin. mx, car si l'on différentie cette expression on a $\frac{\alpha}{m}$ cos. $mx.\,mdx = \alpha$ cos. $mx\,dx$ qui est la quantité proposée. Ainsi pour intégrer une formule qui renferme un cosinus il faut, sans changer les signes, mettre sinus à la place de cosinus, & diviser la quantité par mdx; nous avons fait usage de ces formules dans les art. 1631, 3458, 3469, &c.

3310. La tangente AG (*fig.* 293), diminue de la quantité GH, quand l'arc diminue de la quantité BE; pour exprimer cette différentielle GH de la tangente AG, on considérera que les triangles GHI, CBD sont semblables; donc $GH : IH :: CB : CD$, c'est-à-dire, $GH : IH :: 1 :$ cos. x; donc $GH = \frac{IH}{\text{cos. } x}$. Les triangles, ou petits secteurs CBE, CIH sont semblables; donc $CB : BE :: CI : IH$, ou $1 : dx ::$ sec. $x : IH$, donc $IH = dx$ sec. x; enfin, $CD : CB :: CA : CG$, ou cos. $x : 1 :: 1 :$ sec. x, donc sec. $x = \frac{1}{\text{cos. } x}$; donc $IH\ (= dx$ sec. $x) = \frac{dx}{\text{cos. } x}$, & substituant cette valeur de IH dans la valeur de $GH = \frac{IH}{\text{cos. } x}$, on a $GH = \frac{dx}{\text{cos. } x^2}$; donc d tang. $x = \frac{dx}{\text{cos. } x^2}$. On en verra l'usage (3458). Fig. 293. Différentielle de la tangente.

3311. J'ai supposé dans ces calculs que la ligne GI étoit parallèle à HE & que l'angle GHI étoit le complement de l'angle IGH; ils ne diffèrent entre eux que par

l'angle infiniment petit *ICH*; or toutes les fois qu'on compare entre elles deux quantités finies (telles que les angles finis *G* & *H*), on néglige les quantités infiniment petites dont elles peuvent différer entre elles, & qui ne produiroient que des infiniment petits du second ordre.

D'ailleurs, comme on le verra bientôt, dans un triangle dont les côtés sont infiniment petits, (les angles étant des angles finis, comme ils le sont nécessairement, ou du moins deux d'entre eux), un changement infiniment petit dans un des angles ne change les côtés, dont on calcule les rapports, que d'un infiniment petit du second ordre (3349). C'est une considération qu'il faut avoir présente dans tous les calculs de cette espèce.

3312. La différentielle de $\frac{s}{\text{cos. } u}$ (3458), renferme la différentielle de s multipliée par $\frac{1}{\text{cos. } u}$ moins la différentielle de cos. u, qui est $-$ sin. $u\,du$ (3308) multipliée par s, & divisée par cos. u^2 (3295), c'est-à-dire, par le carré du dénominateur cos. u; cette différentielle de $\frac{s}{\text{cos. } u}$ est donc $\frac{ds}{\text{cos. } u} + \frac{s\,du \text{ sin. } u}{\text{cos. } u^2}$. Nous en ferons usage (3458).

3313. Il arrive souvent dans le calcul intégral que l'on traite des quantités variables comme si elles étoient constantes; par exemple, la différentielle de $\frac{dr}{dx}$, en supposant dx constant sera simplement $\frac{ddr}{dx}$; mais ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est qu'en l'exprimant ainsi $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$, on ne suppose plus que dx soit constant. Supposons $An = dx$ (*fig.* 304), $Nn = dr$, ensorte que $\frac{dr}{dx}$ soit la sécante de l'angle AnN; soit $\frac{dr}{dx} = z$, & ayant pris $MD = z$ construisons une nouvelle courbe *ODB*, dans laquelle $DF = dx$, $BF = dz$, & $\frac{dz}{dx}$ ou $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ sera la tangente de l'angle fini *FDB*. Or, cet angle fini sera le même, soit

Planche XL. Fig. 304.

ſoit que dx ſoit conſtant ou qu'il varie d'une petite quantité ddx (3311), ainſi l'expreſſion $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ ne ſuppoſe point que dx ſoit conſtant, & l'on peut dire que c'eſt la différentielle de $\frac{dr}{dx}$, même dans le cas où dx eſt variable. Nous ferons uſage de cette remarque (3453).

3314. L'expreſſion d'un arc par le moyen de ſa tangente, peut ſe trouver par les principes expoſés juſqu'ici. Soit AG (*fig.* 293) $=t$, $GH=dt$, $CG^2=1+tt$, on a ces deux proportions (3310), $HI:GH::CA:CG$, & $CH:HI::CE:EB$, donc $EB=\frac{dt}{1+t^2}$, & exprimant $\frac{1}{1+t^2}$ en ſérie (3288) on a $EB=dt-t^2\,dt+t^4\,dt-t^6\,dt$ &c, dont l'intégrale (3300) eſt l'arc $AB=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7$, &c. Cette valeur d'un arc de cercle eſt employée dans la *Figure de la terre* de M. Clairaut, *pag.* 179. Trouver un arc par la tangente. *Fig.* 293.

On peut trouver de même un arc par le moyen de ſon ſinus. Dans le triangle BFE, ſi l'on ſuppoſe $AD=x$ & $BD=y$, l'on aura $BE=\sqrt{dx^2+dy^2}$, mais $BD^2=y^2=2x-xx$; donc $dx=\frac{y\,dy}{1-x}$, $dx^2=\frac{y^2\,dy^2}{(1-x)^2}$, $dx^2+dy^2=\frac{(1-x)^2\,dy^2+y^2\,dy^2}{(1-x)^2}=\frac{dy^2}{1-y^2}$, donc $\sqrt{dy^2+dx^2}=dy\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, réduiſant en ſérie (3287), & intégrant chaque terme, l'on aura l'arc $AB=y+\frac{1}{2.3}y^3+\frac{1.3}{2.4.5}y^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$, &c. Par ſon ſinus.

3315. Il eſt un peu plus difficile, quand on connoît l'arc lui-même, de trouver le ſinus BD, ou la valeur de y; pour y parvenir on appellera z l'arc cherché, & l'on réſoudra l'équation $z=y+\frac{1}{2.3}y^3+\frac{1.3}{2.4.5}y^5$, &c. par approximation (3291), & l'on aura le ſinus $y=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$, ou $y=z-\frac{1}{1.2.3}z^3+\frac{1}{1.2.3.4.5}z^5$, &c. Expreſſion des ſinus.

Ainſi lorſqu'on connoît un arc a en ſecondes, on con-

noît ſon ſinus $a - \frac{a^3}{6}$; donc la différence entre un petit arc & ſon ſinus eſt égale à $\frac{a^3}{6}$, ou la ſixième partie du cube de cet arc; or comme le cube d'une petite fraction devient une fraction beaucoup plus petite, on voit combien il eſt permis de négliger la différence entre un petit arc & ſon ſinus; ſi a eſt infiniment petit, a^3 eſt un infiniment petit du troiſième ordre, qu'il faut rejetter du calcul, comme je l'ai fait (3028, 3338, 3353).

Expreſſion des coſinus.

3316. Le coſinus CD d'un arc AB, dont le ſinus $BD = y$, eſt $\sqrt{1 - y^2}$; ſi donc on extrait la racine de 1 moins le carré du ſinus exprimé par la ſérie $z - \frac{1}{1.2.3} z^3$, &c. l'on aura pour la valeur du coſinus la ſérie ſuivante, $1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720}$, &c. (Voy. *Philoſ. tranſact.* n°. 219. *Volfii Elementa*, *T. 1*). D'où il ſuit que ſi l'arc z eſt infiniment petit, le coſinus $1 - \frac{z^2}{2}$ différera du rayon 1 d'une quantité $\frac{z^2}{2}$ qui eſt infiniment plus petite que l'arc, ou qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre par rapport au rayon.

Cette expreſſion $\frac{z^2}{2}$ en y ajoutant les termes ſuivans de la ſérie, donne le ſinus verſe d'un arc z; on trouveroit, par exemple, que pour un arc d'une minute le ſinus verſe en décimales du rayon eſt 0,000000042307975, comme dans les grandes tables de Rheticus (3904). Si l'on veut en conclure le ſinus verſe de l'arc décrit par la lune en une ſeconde de temps, on prendra pour plus d'exactitude le mouvement diurne ; de ſon logarithme ; on ôtera celui de 24 heures réduites en ſecondes, & l'on aura le logarithme de l'arc décrit en une ſeconde 9,7395852; le double de ce logarithme moins le double de celui de 1′ ou 60″ ajouté avec le logarithme du ſinus verſe de 1′ qui eſt 2,6264222, donne le logarithme du ſinus verſe de l'arc décrit par la lune en une ſeconde de temps 8,5492901; la caractériſtique 8 indique ordinai-

rement qu'il y a deux zéro dans le nombre cherché; mais ici il y en a dix de plus, parce qu'on a ajouté 10 pour faire la soustraction des logarithmes. Si l'on ajoute ce logarithme avec celui de la distance de la lune en pieds, qui est 9,0729303 sa parallaxe sous l'équateur étant de 57′ 13″, on a le logarithme de 0,004190062 qui vaut environ $\frac{1}{239}$ de pied. Nous en ferons usage (3397).

3317. Si l'on a une quantité fort petite, telle que a sin. A, son sinus sera égal à $(a - \frac{1}{8}a^3)$ sin. $A + \frac{a^3}{24}$ sin. $3A$, car le sinus est égal à l'arc moins la sixième partie du cube de l'arc (3315), donc le sinus de a sin. A est égal à a sin. $A - \frac{a^3 \text{ sin. } A^3}{6}$; mais sin. $A^3 = \frac{3}{4}$ sin. $A - \frac{1}{4}$ sin. $3A$ (3630); donc le sinus cherché $= a$ sin. $A - \frac{a^3}{6} \cdot \frac{3}{4}$ sin. $A + \frac{a^3}{24}$ sin. $3A = (a - \frac{1}{8}a^3)$ sin. $A + \frac{a^3}{24}$ sin. $3A$, en négligeant les puissances ultérieures de a, qui est supposée une petite fraction.

3318. On trouveroit par une méthode semblable, la valeur du cosinus de a sin. A, qui est $1 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ cos. $2A$. On a besoin de ces valeurs pour faire les calculs & les approximations que j'ai indiquées (3294, 3338), & qui sont d'un usage fréquent pour la théorie de la lune.

3319. On déduit de l'article 3315, une manière d'exprimer en secondes la différence d'un arc à son sinus. Supposons un arc a fort petit, par exemple, égal à 1° ou 3600″; on divisera d'abord cet arc par 57° ou 206265″ qui est la longueur du rayon exprimé en secondes, & l'on aura l'arc exprimé en décimales du rayon (3359), dont le logarithme est 8,24188; le triple de ce logarithme est 4,72564, logarithme de a^3; on en ôtera celui de 6, & l'on aura le logarithme d'une fraction du rayon qui est égale à $\frac{a^3}{6}$; c'est-à-dire, à l'excès de l'arc a sur son sinus en parties du rayon; si l'on veut exprimer

cet excès en secondes on le multipliera par 57° (en ajoutant le logarithme 5,31442), & l'on aura 0″ 18 ; c'est pour cela que j'ai supposé (1629) le sinus de la parallaxe de la lune égal à la parallaxe elle-même ; il faudroit que l'arc fût de 3° 12′ 49″ pour que la différence entre l'arc & le sinus fût seulement de 5″. J'ai supposé de même dans le calcul de l'équation du centre, que les petits arcs étoient égaux à leurs sinus (1247).

Différence d'un arc à son sinus.

3320. La règle précédente pour trouver la différence d'un arc à son sinus se réduit à cette autre règle plus simple : du triple du logarithme de l'arc en secondes : ôtez le logarithme 1, 4070053 vous aurez celui de la différence cherchée ; c'est ainsi qu'on pourroit construire la table de l'article 1248 ou la prolonger. Enfin on peut se servir des tables des sinus, en disant l'arc égal au rayon est à l'unité, comme l'arc donné est à sa valeur en parties du rayon ; on la retranchera du sinus de cet arc pris dans les tables, & l'on aura la différence en décimales, on la multipliera par 206265″, & l'on aura cette différence en secondes.

Calcul des segmens.

Fig. 266.

3321. Connoissant l'arc *PA* (*fig.* 266) du cercle circonscrit à une ellipse *PMH*, trouver le segment *PEAP*, & la surface circulaire *PSA* qui se termine au foyer *S* de l'ellipse. Soit $CP = 1$, $PS = b$, l'arc *AP* de 18° ou 64800″, on réduira cet arc *AP* en décimales du rayon en le divisant par l'arc de 57°, on aura 0, 3142 pour l'arc *AP* en parties du rayon ; si on le multiplie par la moitié du rayon *CP*, ou par $\frac{1}{2}$, on aura la surface du secteur $PCA = 0, 1571$. La surface du triangle *CAD* est égale à la moitié du produit de *AD* par *DC*, ou du sinus de 18° par le cosinus, c'est-à-dire, 0, 1469 ; le triangle *APD* est égal au produit du sinus *AD* par la moitié du sinus verse *PD*, c'est-à-dire, 0, 0076 ; ces deux triangles étant ôtés de la surface du secteur *PCA*, il reste le segment $PEAP = 0, 0026$. M. Halley, dans la table qu'il a donnée pour faciliter le calcul du mouvement des comètes (3101) dans une orbite elliptique, emploie le double de ce segment, qu'il trouve 0, 00514227.

3322. La quadrature du cercle, confifte à trouver la furface ABD (*fig.* 290), dont la différentielle eft le petit rectangle $FEKD$; fuppofons le rayon $=a$, $CD=x$, $DK=dx$, $BD=\sqrt{aa-xx}$, $FEKD$ fera $=\sqrt{aa-xx}.dx$, c'eft la différentielle dont il faudroit avoir l'intégrale pour trouver la quadrature du cercle; mais nous ne connoiffons aucune quantité qui étant différentiée (3294) puiffe produire $\sqrt{aa-xx}\,dx$. Il faut donc fe contenter de trouver la quadrature du cercle par approximation; ce qui eft aifé dès qu'on connoît les finus, ou les fegmens par les approximations précédentes. Suppofant le diamètre égal à 1, l'on a pour la circonférence le nombre fuivant calculé par *Ludoph de Ceulen* : 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751. (*Hiftoire de la quadrature du cercle*, par M. Montucla, 1754). Fig. 290. Rapport du diamètre à la circonférence.

3323. IL Y A DES DIFFÉRENTIELLES dont on ne peut avoir l'intégrale, fi ce n'eft en fuppofant connue la mefure des arcs de cercle; ces intégrales dépendent donc de la quadrature du cercle; telle eft l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$; il n'y a aucune quantité qui étant différentiée (3294 & fuiv.) puiffe faire $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$; mais fi l'on fait BD (*fig.* 293) égal à x, CD fera $=\sqrt{1-xx}$; mais $CD:CB::BF:BE$, donc $BE=\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, c'eft la différentielle de l'arc BA; ainfi l'intégrale fera l'arc dont le finus eft x; fi donc on avoit la mefure rigoureufe & exacte d'un arc dont le finus eft x, on auroit par la même l'intégrale exacte de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$. Quoiqu'on ne l'ait que par approximation, on ne laiffe pas de regarder comme réfolu un problême que l'on a réduit ainfi à la quadrature ou à la rectification du cercle; & il y en a un très-grand nombre. (V. *le Calcul Intégral* de M. de Bougainville). Nous ferons ufage plufieurs fois de cette manière d'intégrer (3568). Intégrale par la quadrature du cercle. Fig. 293.

3324. On réduit à la quantité $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ beaucoup d'autres différentielles ; comme $\sqrt{1-xx}\,dx$ qui exprime un ſegment de cercle, l'intégrale s'en trouvera par le moyen d'un arc dont x eſt le ſinus. En effet, $\sqrt{1-xx}\,dx = \frac{\sqrt{1-xx}\,dx + \sqrt{1-xx}\,dx}{2} = \frac{\sqrt{1-xx}}{2}\,dx + \frac{dx}{2\sqrt{1-xx}} - \frac{xx\,dx}{2\sqrt{1-xx}}$; mais $\sqrt{1-xx}\,dx - \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ eſt la différ. de $x\sqrt{1-xx}$ (3298), & $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ eſt la différentielle d'un arc dont x eſt le ſinus (3323), donc nommant cet arc z, l'intégrale des trois termes précédens ou de $\sqrt{1-xx}\,dx$ ſera $\frac{z}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-xx}$. Nous en ferons uſage (3568).

3325. L'intégrale de $\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ dépend également de la rectification du cercle, c'eſt-à-dire, que ſi l'on avoit l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ on auroit celle de $\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$; & voici la manière de les ramener l'une à l'autre. On choiſit une troiſième quantité $x\sqrt{1-xx}$, dont la différentielle renferme celle qui eſt donnée, & celle d'un arc de cercle ou d'un ſegment ; cette nouvelle quantité étant différentiée (3294 & 3298) donnera $dx\sqrt{1-xx} - \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-xx}}$; réduiſant à même dénominateur, on aura $\frac{dx(1-xx)}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$, qui eſt égale à la différentielle de $x\sqrt{1-xx}$; cette quantité revient auſſi à $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ ou $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{2xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$; ainſi les intégrales ſeront égales, & l'on aura $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - 2\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} = x\sqrt{1-xx}$; donc $\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-xx} + \int\frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$; c'eſt-à-dire, que l'inté-

grale cherchée eſt compoſée de deux quantités dont l'une $-\frac{x}{2}\sqrt{1-xx}$ eſt une quantité algébrique finie, l'autre $\int\frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$, eſt une quantité qui eſt donnée ſeulement par la quadrature du cercle (3323); c'eſt la moitié de l'arc même dont x eſt le ſinus, & ſi cet arc s'appelle z, l'on aura $\frac{z-x\sqrt{1-xx}}{2}$ pour l'intégrale de $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-xx}}$. Nous en ferons uſage (3560).

3326. On trouvera par une méthode ſemblable, l'intégrale de $xx\sqrt{aa-xx}\,dx$, en ſuppoſant connue celle de $dx\sqrt{aa-xx}$ (3322); on choiſit une fonction de x dont la différentielle renferme ces deux différentielles propoſées; telle eſt la quantité $x\,(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$, ou $x\,(aa-xx)\sqrt{aa-xx}$, ou bien $aax\sqrt{aa-xx}-x^3\sqrt{aa-xx}$; on en prend la différentielle $aa\,dx\sqrt{aa-xx}-\frac{aax^2\,dx}{\sqrt{aa-xx}}-3x^2\sqrt{aa-xx}\,dx+\frac{x^4\,dx}{\sqrt{aa-xx}}$; les trois derniers termes ſe réduiſent à l'expreſſion ſuivante, $\frac{-aax^2\,dx-3x^2(aa-xx)\,dx+x^4\,dx}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{-aax^2\,dx-3a^2x^2\,dx+3x^4\,dx+x^4dx}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{-4a^2x^2\,dx+4x^4dx}{\sqrt{aa-xx}}=\frac{-4x^2(aa-xx)\,dx}{\sqrt{aa-xx}}=-4xx\sqrt{aa-xx}\,dx$; donc la différentielle de $x\,(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ eſt $aa\sqrt{aa-xx}\,dx-4xx\sqrt{aa-xx}\,dx$; donc $x\,(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=\int aa\sqrt{aa-xx}\,dx-\int 4x^2\sqrt{aa-xx}\,dx$, ainſi l'intégrale cherchée $\int xx\sqrt{aa-xx}\,dx=\frac{1}{4}aa\int\sqrt{aa-xx}\,dx-\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$. Si dans l'intégrale on fait $x=a$ & $\int\sqrt{aa-xx}\,dx=A$, qui eſt la valeur d'un quart-de-cercle, le terme $\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ diſparoît & l'on trouve $\frac{aaA}{4}$ pour l'intégrale cherchée; c'eſt ſous cette forme que nous en ferons uſage (3538).

3327. La surface d'un segment parabolique est les deux tiers du produit de l'ordonnée & de l'abscisse ; car le petit rectangle élémentaire, dont la surface est $y\,d\,x$ ou $\frac{2y^2\,dy}{p}$ étant intégré, donne $\frac{2}{3}\frac{y^3}{p}$, & mettant px pour y^2, il se réduit à $\frac{2}{3}xy$, comme nous l'avons supposé (3033).

Mais on a souvent besoin dans les calculs de l'attraction de trouver $\int y\,d\,x$, sans avoir y exprimée en x, & sans pouvoir réduire la formule à une fonction de x & de dx; il faut alors calculer arithmétiquement un grand nombre de fois la valeur de y. Pour cela on considère ces valeurs comme les ordonnées d'une courbe dont x est l'abscisse, & y l'ordonnée ; la surface de cette courbe est $\int y\,d\,x$, & cette surface calculée ainsi par des opérations arithmétiques, donne à très-peu-près l'intégrale cherchée. Supposons que PM, SN, TV (*fig.* 289), représentent trois valeurs de y, qui exprimées en nombres, soient a, b, c; PS & ST étant chacune égales à 1, la surface $PMVT$ supposée rectiligne, sera $\frac{a+b}{2}+\frac{c+b}{2}$, & s'il y avoit un grand nombre d'ordonnées d, e, f, &c. on auroit pour les espaces suivans $\frac{d+e}{2}+\frac{e+f}{2}$, &c. Cela suppose que les arcs MN, NV soient sensiblement rectilignes ; mais si la ligne MNV qui joint trois ordonnées consécutives, est un arc de courbe parabolique déterminé par ces trois ordonnées, le calcul en sera plus exact : voici la manière de trouver la surface du segment $PMVT$ dans ce cas-là.

Pl. XXXIX. Fig. 289.

3328. Dans une courbe parabolique, c'est-à-dire, dont l'équation générale est $y=m+nx+px^2+qx^3$, &c. Si l'on a trois ordonnées a, b, c, répondantes aux abscisses 0, 1, 2, la surface $PMVT$ sera $=\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c$. Substituons pour m, n, p des fonctions de a, b, c, qui soient telles que mettant zéro à la place de x, comme cela doit avoir lieu au point P l'on ait $y=a$, que mettant 1 à la place de x, l'on ait $y=b$, ce qui a lieu en S, & qu'en mettant 2 à la place de x, l'équation devienne $y=c$, comme au point T; ces conditions sont remplies en supposant

Equation des courbes paraboliques.

ſuppoſant $y = a + (b - a)x + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})x(x - 1)$; l'élément de la ſurface de la courbe, ou le petit trapèze *PMmp* ſera $ydx = adx + (b - a)xdx + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})(xxdx - xdx)$, dont l'intégrale $\int ydx = PMVT = ax + \frac{b-a}{2}x^2 + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2})(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})$; dans cette expreſſion de l'aire *PMVT* l'on ſubſtituera $PT = 2$, à la place de x, & l'on aura la ſurface dans le cas des trois ordonnées, $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$.

3329. Si l'on avoit une ſuite d'ordonnées a, b, c, d, e, f, g, k, dans une courbe plus étendue, on trouveroit l'aire de la courbe en la diviſant en pluſieurs arcs de même eſpèce, on auroit le ſegment compris entre les ordonnées a & c, $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$; le ſegment compris entre les ordonnées c, d, e, ſeroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}e$, le ſegment compris entre les ordonnées e, f, g, ſeroit $\frac{1}{3}e + \frac{4}{3}f + \frac{1}{3}g$, &c. Ainſi la ſomme ſeroit égale à un tiers de la première & de la dernière, plus $\frac{4}{3}$ de la ſeconde, de la quatrième, &c. c'eſt-à-dire, de tous les termes pairs, plus $\frac{2}{3}$ de la troiſième, de la cinquième, &c. c'eſt-à-dire, de tous les nombres impairs: par-là nous chercherons la ſurface des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne pourroit avoir autrement (3502).

3330. Le calcul intégral ſert à trouver la ſurface & la cubature des ſolides, auſſi bien que la quadrature des courbes, mais le ſeul uſage que nous en faſſions dans l'aſtronomie conſiſte à trouver la ſolidité, ou le volume de la terre, en la ſuppoſant produite par la rotation d'une ellipſe autour de ſon petit axe.

Soit une ellipſe *PLQO* (*fig.* 304), qui tourne autour de l'axe CP pour engendrer un ſphéroïde aplati; ſoit $QM = x$, $ML = y$, $CQ = a$, $CP = b$; on aura par la propriété de l'ellipſe (3254) $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - xx)$ $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$, & prenant la différentielle (3294), $2a^2ydy = 2ab^2dx - 2b^2xdx$; $dx = \frac{2a^2ydy}{2ab^2 - 2b^2x} =$ *Planc. XL. Fig.* 304.

$\frac{a^2 y dy}{b^2(a-x)}$; $dx^2 = \frac{a^4 y^2 dy^2}{b^4(a-x)^2} = \frac{a^4 y^2 dy^2}{b^4 (aa - \frac{aa}{bb} y^2)}$ (3255); $= \frac{a^2 y^2 dy^2}{b^4 - b^2 y^2}$; ainsi l'arc $Ll = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ (3314) $= \sqrt{\frac{a^2 y^2 dy^2 + b^4 dy^2 - b^2 y^2 dy^2}{b^4 - b^2 y^2}} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2}{b^2 - y^2}}$; & si l'on appelle e l'excentricité, enforte que l'on ait $ee = aa - bb$, on aura $Ll = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 + eey^2}{b^2 - y^2}}$. Nommant p la circonférence pour le rayon 1 (3322), l'on aura pour le rayon $CM = a - x$ ou $\frac{a}{b}\sqrt{bb - yy}$ (3255) la circonférence $\frac{pa}{b}\sqrt{bb - yy}$, qui multipliée par l'élément de l'ellipse ou par Ll donnera la différentielle de la surface du sphéroïde, $= \frac{dy}{b}\frac{pa}{b}\sqrt{b^4 + eey^2} = \frac{epady}{bb}\sqrt{\frac{b^4}{ee} + y^2}$ qu'il faut intégrer. On réduit d'abord le radical en série (3287); & l'on a $\sqrt{\frac{b^4}{ee} + y^2} = \frac{b^2}{e} + \frac{ey^2}{2b^2} - \frac{e^3 y^4}{8b^6} + \frac{e^5 y^6}{16 . b^{10}} - \frac{5 e^7 y^8}{128 . b^{14}} + \frac{7 e^9 y^{10}}{256 . b^{18}} - \frac{21 e^{11} y^{12}}{1024 . b^{22}}$, &c. multipliant par dy & intégrant chaque terme, on trouve $\frac{b^2 y}{e} + \frac{ey^3}{6b^2} - \frac{e^3 y^5}{40 b^6} + \frac{e^5 y^7}{112 b^{10}} - \frac{5 e^7 y^9}{1152 b^{14}} + \frac{7 e^9 y^{11}}{2816 b^{18}} - \frac{21 e^{11} y^{13}}{13312 b^{22}}$, &c. On fera $y = b$ pour avoir le demi-sphéroïde, on doublera le tout & l'on multipliera par $\frac{epa}{bb}$, l'on aura $\frac{2epa}{bb}\left(\frac{b^3}{e} + \frac{eb}{6} - \frac{e^3}{40 b} + \frac{e^5}{112 b^3} - \frac{5 e^7}{1152 b^5} + \frac{7 e^9}{2816 b^7} - \frac{21 . e^{11}}{13312 b^9}\text{ \&c.}\right)$ dont les premiers termes sont $2pab + \frac{pae^2}{3b} - \frac{e^4 pa}{20 b^3} + \frac{e^6 pa}{56 b^5}$. &c. C'est la surface du sphéroïde; nous en avons donné la valeur (2693).

Solidité de la terre.

3331. La solidité ou le volume du sphéroïde est le produit des deux tiers du grand axe par la surface du méridien. En faisant $CM = x$ l'on aura $\frac{pa}{b}\sqrt{bb - yy}$ pour la circonférence décrite par le mouvement du point

M autour du centre C, multipliant par $\frac{a}{2b}\sqrt{bb-yy}$, on aura la ſurface du cercle décrit par $RL = \frac{pa^2}{2bb}(bb-yy)$; multipliant par dy & intégrant, l'on trouve $\frac{pa^2y}{2} - \frac{pa^2y^3}{6bb}$, valeur du ſolide décrit par le ſegment $CQLR$. Si l'on fait $y=b$, l'on a $\frac{1}{3}pa^2b$, qu'il faut doubler pour avoir la valeur du ſphéroïde entier $\frac{2}{3}p\,a^2b$; ou ce qui revient au même $\frac{pba}{2}\cdot\frac{4}{3}a$. Mais la ſurface de l'ellipſe eſt $\frac{pba}{2}$ (3267); ſi l'on appelle A cette ſurface, l'on aura le ſphéroïde $=\frac{4}{3}aA$. On en verra l'uſage à l'occaſion de la préceſſion des équinoxes (3541 & 3552). Nous avons déja même employé l'expreſſion de la ſolidité du ſphéroïde (2693).

3332. La ſolidité que nous avons trouvée $\frac{pba}{2}\cdot\frac{4}{3}a$, ou $\frac{2}{3}p\,b\,a^2$ ſeroit $=\frac{2}{3}p\,b^2a$, dans le cas du ſphéroïde allongé que produit une ellipſe en tournant autour de ſon grand axe, parce que le carré de b qui devient le diamètre tournant, prend la place du carré de a. Dans le cas de la ſphère où $b=a$, l'on a pour la ſolidité $\frac{2}{3}p\,a^3$. Nous en ferons uſage en parlant des marées (3598).

3333. Suppoſons maintenant une ſphère qui par une force étrangère ſe change en un ellipſoïde allongé, en conſervant la même quantité de matière; ſuppoſons le demi-diamètre de la ſphère $=b$, la différence des deux demi-axes du nouvel ellipſoïde $=\beta$, & cherchons le rapport de ces deux demi-axes; ſoit la différence entre le rayon de la ſphère, qui eſt égale au ſphéroïde, & le demi-petit axe $=x$, on aura $b-x$ pour le demi petit axe du ſphéroïde, & $b+\beta-x$ pour le demi-grand axe, donc la ſolidité de l'ellipſoïde ſera $\frac{2}{3}p(b+\beta-x)(b-x)^2$ & négligeant les produits ou les puiſſances des quantités β & x qui ſont fort petites; cette ſolidité $=\frac{2}{3}p(b^3-3b^2x+b^2\beta)$ qu'il faut égaler à $\frac{2}{3}p\,b^3$ qui eſt la ſolidité de la ſphère, & l'on a $3b^2x=b^2\beta$; donc $x=\frac{1}{3}\beta$. Nous

nous ſervirons de cette propoſition quand il s'agira du flux & du reflux de la mer (3598).

Expreſſions analytiques de l'Anomalie vraie & du Rayon vecteur.

3334. Les calculs de l'attraction, & ceux où l'on fait uſage des anomalies ou des rayons vecteurs, exigent que ces quantités ſoient exprimées analytiquement, ainſi que M. Clairaut l'a fait dans ſa théorie de la lune : voici les formules qu'il a données pour cet effet, mais dont il n'a pas publié les calculs ; on en verra l'uſage ci-après (3496).

Fig. 285. Soit le demi-axe CA (*fig.* 285) $=1$, le rayon vecteur SM $=r$, l'anomalie vraie $ASM=u$, l'anomalie moyenne $=z$, l'excentricité $CS=c$, l'angle $MSm=du$; on aura le petit ſecteur elliptique $MSm=\frac{rrdu}{2}$, parce que le petit arc qui meſure l'angle du eſt rdu (3357). Soit p la circonférence pour le rayon $CA=1$, & $\frac{p}{2}$ ſa ſurface, on aura $\frac{p}{2}\sqrt{1-cc}$ pour la ſurface de l'ellipſe (3267) ; $\frac{dz}{2}$ eſt la ſurface du ſecteur circulaire qui repréſente l'anomalie moyenne, dans le cercle (1235), comme $\frac{rrdu}{2}$ eſt celle du ſecteur elliptique ; ainſi l'on aura cette proportion, $\frac{rrdu}{2}:\frac{dz}{2}::\frac{p}{2}\sqrt{1-cc}:\frac{p}{2}$, donc dz

Élément de l'anomalie moyenne. $=\frac{rrdu}{\sqrt{1-cc}}$; c'eſt l'élément de l'anomalie moyenne, & l'intégrale donnera d'abord l'anomalie moyenne, par le moyen de l'anomalie vraie.

3335. Le rayon vecteur $r=\frac{1-cc}{1-c\,\text{coſ.}\,u}$ (3279), donc $rrdu=(1-cc)^2(1-c\,\text{coſ.}\,u)^{-2}du$, $dz=\frac{rrdu}{\sqrt{1-cc}}$ $=(1-cc)^{\frac{3}{2}}(1-c\,\text{coſ.}\,u)^{-2}du$. Ainſi pour avoir la

valeur de l'anomalie moyenne z il faut commencer par trouver celle de $(1 - c . \cos. u)^{-2}$ par la formule du binome (3287), & ce sera aussi la valeur de $\frac{rr}{(1-cc)^2}$; on aura donc $1 + 2c \cos. u + 3c^2 \cos. u^2 + 4c^3 \cos. u^3 + 5c^4 \cos. u^4$; nous négligerons les puissances supérieures à c^4. On substituera pour $\cos. u^2$ sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2u$ (3627), pour $\cos. u^3$ sa valeur (3631), & pour $\cos. u^4$ sa valeur (3632), l'on aura celle de $(1 - c \cos. u)^{-2}$ ou de $\frac{rr}{(1-cc)^2}$. Voici cette valeur multipliée par du, c'est-à-dire, $\frac{rr\,du}{(1-cc)^2} = (1 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{15}{8}c^4)\,du + (2c + 3c^3) \cos. u\,du + (\frac{3}{2}c^2 + \frac{5}{2}c^4) \cos. 2u\,du + c^3 \cos. 3u\,du + \frac{5}{8}c^4 \cos. 4u\,du$, dont l'intégrale (3309) sera la valeur de $\int \frac{rr\,du}{(1-cc)^2} = (1 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{15}{8}c^4)\,u + (2c + 3c^3) \sin. u + (\frac{3}{4}c^2 + \frac{5}{4}c^4) \sin. 2u + \frac{1}{3}c^3 \sin. 3u + \frac{5}{32}c^4 \sin. 4u$; mais ce n'est pas $\int \frac{rr\,du}{(1-cc)^2}$ qui est l'anomalie moyenne, c'est $\int \frac{rr\,du}{(1-cc)^{\frac{1}{2}}}$; ainsi pour avoir la valeur de l'anomalie moyenne, il faut multiplier $\int \frac{rr\,du}{(1-cc)^2}$ par $(1 - cc)^{\frac{3}{2}}$, ou diviser chacun des termes de sa valeur par $1 + \frac{3}{2}cc + \frac{15}{8}c^4$, &c. $= (1 - cc)^{-\frac{3}{2}}$ (3287); par ce moyen u se trouvera dégagée, & l'on aura $\int \frac{rr\,du}{(1-cc)^{\frac{1}{2}}} = z =$ Valeur de l'anomalie moyenne.
$u + 2c \sin. u + (\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4) \sin. 2u + \frac{1}{3}c^3 \sin. 3u + \frac{5}{32}c^4 \sin. 4u$, &c. En divisant chaque terme nous avons négligé les c^5, comme étant d'une extrême petitesse, même pour l'orbite de Mercure. C'est ainsi que nous avons l'expression de l'anomalie moyenne par le moyen de l'anomalie vraie; cette série donneroit la solution du problême, que nous avons déja résolu d'une autre manière (1240); mais nous avons cherché cette expression pour parvenir à celle de l'anomalie vraie, ou de la quantité u.

3336. CONNOISSANT *l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie par une expression analytique.* On a vu

ci-devant la valeur de z exprimée en u, si l'on en tire la valeur de u exprimée en z par le retour des suites, on aura l'anomalie vraie. Pour y parvenir par approximation, nous supposerons une valeur indéterminée de u en z, telle que $u = z - 2\,m\,c.$ sin. $z + n\,c^2$ sin. $2\,z + p\,c^3$ sin. $3\,z + q\,c^4$ sin. $4\,z$; nous en tirerons les valeurs de sin. u, sin. $2\,u$, &c. que nous substituerons dans la série $u + 2\,c$ sin. u, &c. & nous aurons une nouvelle série pour la valeur de z, dans laquelle on égalera à m tous les termes qui multiplieront $2\,c.$ sin. z; & ainsi des autres coëfficiens indéterminés, n, p, q (3342); cette méthode des indéterminées est d'un grand secours dans ces sortes d'approximations, & nous en avons déja fait usage (3291, 3292).

Valeur indéterminée de l'anom. u.

Méthode des indéterminées.

Pour comprendre l'esprit de cette méthode des indéterminées, il faut considérer que puisque $z = u + 2\,c.$ sin. u, on aura $u = z - 2\,c$ sin. u, mais si au lieu de sin. u on vouloit avoir sin. z dans le second terme, comme cela nous est nécessaire, il faudroit au lieu de $-2\,c$ avoir un autre coëfficient, c'est celui que j'appelle $-2\,c\,m$, en attendant qu'il soit connu. Pour connoître la valeur de cette indéterminée m, je prends $u = z - 2\,c\,m.$ sin. z, j'en déduis la valeur de sin. u que je substitue dans l'équation $u = z - 2\,c.$ sin. u, & il me vient une équation, dans laquelle au lieu de sin. u j'ai sin. z, avec un coëfficient qui tient la place de celui que j'avois appellé $2\,c\,m$, & qui lui est égal par la supposition; donc en les égalant je trouverai la valeur de m en c; il en est de même des autres coëfficiens indéterminés, comme on le verra par le calcul.

3337. La valeur de u étant composée de z, & de $2\,m\,c.$ sin. $z + n\,c^2.$ sin. $2\,z$, &c. on aura sin. $u =$ sin. $z.$ cos. $(2\,m\,c.$ sin. $z - n\,c^2$ sin. $2\,z$, &c.$)$ $-$ cos. z sin. $(2\,m\,c.$ sin. $z - n\,c^2.$ sin. $2\,z$, &c.$)$, car le sinus de la différence de deux arcs est égal au cosinus de l'un par le sinus de l'autre, moins le cosinus du second par le sinus du premier (3619). Il faut calculer séparément ces deux parties de sin. u.

Premiere partie de u.

Pour avoir la première partie, sin. $z.$ cos. $(2\,m\,c.$ sin. z

$-nc^2$ ſin. $2z$), on la réduit à celle-ci (3620), ſin. z [coſ. ($2mc$. ſin. z) coſ. (nc^2 ſin. $2z$) + ſin. ($2mc$. ſin. z) ſin. (nc^2 ſin. $2z$)]; mais dans ces ſortes d'approximations on ſuppoſe que le coſinus d'un petit arc, comme nc^2 ſin. $2z$, eſt égal au rayon, ou $=1$, & que le ſinus d'un petit arc, comme nc^2 ſin. $2z$ eſt égal à l'arc lui-même; ainſi l'expreſſion précédente deviendra ſin. z [coſ. ($2mc$. ſin. z) + $2mc$. ſin. z. nc^2 ſin. $2z$]. Mais coſ. ($2mc$. ſin. z) $= 1 - m^2c^2 + m^2c^2$ coſ. $2z$ (3318); c'eſt une des deux quantités qu'il faudra multiplier par ſin. z; l'autre quantité eſt $2mc$. ſin. z. nc^2 ſin. $2z =$ (3622), mnc^3 coſ. $z - mnc^3$ coſ. $3z$; donc ſin. z. coſ. ($2mc$. ſin. z, &c.) $= (1 - m^2c^2)$ ſin. $z + m^2c^2$ ſin. z. coſ. $2z$. $+ mnc^3$ ſin. z. coſ. $z - mnc^3$ ſin. z. coſ. $3z$; or, m^2c^2 ſin. z. coſ. $2z$ $= \frac{1}{2}m^2c^2$ ſin. $3z - \frac{1}{2}m^2c^2$ ſin. z (3621); de même mnc^3 ſin. z. coſ. $z = \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $2z$; & $-mnc^3$ ſin. z. coſ. $3z$ $= -\frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $4z + \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $2z$; donc la première partie de la valeur de ſin. u, ou ſin. z. [coſ. ($2mc$. ſin. z — &c.); ſera $(1 - m^2c^2)$ ſin. $z + \frac{1}{2}m^2c^2$ ſin. $3z$ — $\frac{1}{2}m^2c^2$ ſin. $z + \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $2z - \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $4z + \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $2z = (1 - \frac{3}{2}m^2c^2)$ ſin. $z + mnc^3$ ſin. $2z + \frac{1}{2}m^2c^2$ ſin. $3z - \frac{1}{2}mnc^3$ ſin. $4z$.

3338. Il faut trouver auſſi la ſeconde partie de ſinus u, c'eſt-à-dire, — coſ. z. ſin. ($2mc$ ſin. $z - nc^2$ ſin. $2z$ $- pc^3$ ſin. $3z$); conſidérons d'abord ſin. ($2mc$. ſin. z — nc^2 ſin. $2z - pc^3$ ſin. $3z$), en ſuppoſant que le coſinus des deux derniers termes ſoit égal à l'unité, & que le ſinus ſoit égal aux termes eux-mêmes, cette expreſſion (égale au ſinus de $2mc$. ſin. z par le coſinus des deux autres termes, moins le coſ. de $2mc$. ſin. z, par le ſinus des deux autres) ſera $=$ ſin. ($2mc$. ſin. z) $- nc^2$ ſin. $2z$ $- pc^3$ ſin. $3z$; c'eſt la quantité qu'il faudra multiplier par coſ. z, & retrancher enſuite de la première partie. Premiere partie de ſin. u.

Mais puiſqu'en général ſin. (a. ſin. A) $= (a - \frac{1}{8}a^3)$ ſin. $A + \frac{a^2}{24}$ ſin. $3A$ (3317), on aura pour la quantité précédente : ſin. ($2mc - m^3c^3$) ſin. $z + (\frac{1}{3}m^3c^3 - pc^3)$ ſin. $3z - nc^2$ ſin. $2z$. On multipliera par coſ. z, & l'on

aura la feconde partie de fin. $u = $ cof. $z\,(2\,m\,c - m^3\,c^3)$ fin. $z - n\,c^2$ fin. $2\,z$. cof. $z + (\frac{1}{3}\,m^3\,c^3 - p\,c^3)$ fin. $3\,z$. cof. z; ou développant ces produits de finus (3625, 3621), $-\frac{1}{2}\,n\,c^2$ fin. $z + (m\,c - \frac{1}{3}\,m^3\,c^3 - \frac{1}{2}\,p\,c^3)$ fin. $2\,z - \frac{1}{2}\,n\,c^2$ fin. $3\,z + (\frac{1}{6}\,m^3\,c^3 - \frac{1}{2}\,p\,c^3)$ fin. $4\,z$. En raffemblant ces deux parties de la valeur de fin. u, dont la feconde eft négative, l'on aura fin. $u = (1 - \frac{3}{2}\,m^2\,c^2 + \frac{1}{2}\,n\,c^2)$ fin. $z - (m\,c - \frac{1}{3}\,m^3\,c^3 - m\,n\,c^3 - \frac{1}{2}\,p\,c^3)$ fin. $2\,z + (\frac{1}{2}\,m^2\,c^2 + \frac{1}{2}\,n\,c^2)$ fin. $3z - (\frac{1}{2}\,m\,n\,c^3 + \frac{1}{6}\,m^3\,c^3 - \frac{1}{2}\,p\,c^3)$ fin. $4\,z$; cette quantité étant multipliée par $2\,c$, donnera le fecond terme $2\,c$. fin. u de la férie $z = u + 2\,c$. fin. u, &c. (3335), que nous avons à exprimer en z.

Seconde partie de fin. u.

3339. Paffons à fin. $2\,u$ qui donnera le fecond terme. Nous avons fuppofé $u = z - 2\,m\,c$. fin. z, &c. (3336); ainfi $2\,u = 2\,z - 4\,m\,c$. fin. $z + 2\,n\,c^2$ fin. $2\,z$, donc fin. $2\,u$ (3619) $=$ fin. $2\,z$. cof. ($4\,m\,c$. fin. z) $-$ cof. $2\,z$ ($4\,m\,c$. fin. $z - 2\,n\,c^2$. fin. $2\,z$), mais cof. ($4\,m\,c$. fin. z) (3318) $= 1 - 4\,m^2\,c^2 + 4\,m^2\,c^2$ cof. $2\,z$; donc fin. $2\,z$. cof.) $4\,m\,c$. fin. z) $= (1 - 4\,m^2\,c^2)$ fin. $2\,z + 2\,m^2\,c^2$ fin. $4\,z$, c'eft la première partie de fin. $2\,u$.

Valeur de fin. 2 u.

La feconde partie de la valeur de fin. $2\,u$ eft $=$ cof. $2\,z\,(4\,m\,c$. fin. $z - 2\,n\,c^2$ fin. $2\,z) = 4\,m\,c$. fin. z. cof. $2\,z$. $- 2\,n\,c^2$ fin. $2\,z$. cof. $2\,z = 2\,m\,c$. fin. $3\,z + 2\,m\,c$. fin. $z - n\,c^2$ fin. $4\,z$ (3624, 3625); raffemblant les deux parties de fin. $2\,u$, & changeant les fignes de la feconde, on a fin. $2\,u = + 2\,m\,c$. fin. $z + (1 - 4\,m^2\,c^2)$ fin. $2\,z - 2\,m\,c$. fin. $3\,z + (2\,m^2\,c^2 + n\,c^2)$ fin. $4\,z$. Cette quantité multipliée par $\frac{3}{4}\,c^2 + \frac{1}{8}\,c^4$, donnera le fecond terme de la férie (3335). Pour avoir le troifième terme de cette férie, c'eft-à-dire, $\frac{1}{3}\,c^3$ fin. $3\,u$, je confidère que par la valeur indéterminée de u l'on a $3\,u = 3\,z - 6\,m\,c$. fin. z; donc fin. $3\,u = $ fin. ($3\,z - 6\,m\,c$. fin. z.) $=$ fin. $3\,z - 6\,m\,c$. fin. z. cof. $3\,z$ (3619), en prenant $6\,m\,c$. fin. z pour fon finus, & fuppofant fon cofinus $= 1$; mais $6\,m\,c$. fin. z. cof. $3\,z = 3\,m\,c$. fin. $4\,z + 3\,m\,c$. fin. $2\,z$ (3624); donc fin. $3\,u = $ fin. $3\,z - 3\,m\,c$. fin. $4\,z + 3\,m\,c$. fin. $2\,z$. Il faut multiplier cette valeur par $\frac{1}{3}\,c^3$ pour avoir le troifième terme de la férie (3335).

3340. L'anomalie moyenne $z = u + 2c$ ſin. u, &c. (3335), donc $u = z - 2c.$ ſin. $u - (\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4)$ ſin. $2u$ $- \frac{1}{3}c^3$ ſin. $3u - \frac{5}{32}c^4$ ſin. $4u$; il faut ſubſtituer à la place de ſin. u, ſin. $2u$, &c. les valeurs que nous avons trouvées; mais ne prenons d'abord que les termes qui renferment ſin. z, nous aurons l'équation ſuivante, $u = z - 2c(1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2 + \frac{3}{4}c^2.2mc)$ ſin. z; la ſomme de tous ces coëfficiens doit être égale à $2mc$, puiſque $u = z - 2mc.$ ſin. z, &c. par la ſuppoſition. Egalant donc le coëfficient indéterminé $-2mc$, avec celui que nous avons trouvé, l'on aura $m = 1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2$; on pourra prendre l'unité à la place de m pour la ſubſtituer dans les termes où ſera c^2, parce que les termes ſuivans donneroient des c^4, que nous négligeons ici; nous verrons bientôt l'uſage de cette équation. Expreſſions des coefficiens indéterminés.

3341. Examinons actuellement les termes où eſt ſin. $2z$, pour avoir le 3e terme de la ſérie indéterminée qui eſt la valeur de u, ſavoir nc^2 ſin. $2z$; la première partie vient de ſin. u, & ce ſera $-(mc - \frac{1}{3}m^3c^3 - mnc^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ à multiplier par $2c$. La ſeconde partie vient de ſin. $2u$, & c'eſt $(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4)(1 - 4m^2c^2)$ (on néglige c^4). La troiſième partie vient de ſin. $3u$, dans lequel on trouve $3mc$ ſin. $2z$, qu'il faut multiplier par $\frac{1}{3}c^3$ (3339).

Ainſi en raſſemblant ces trois parties qui multiplient ſin. $2z$, on aura la quantité qui doit être égale au troiſième terme nc^2 ſin. $2z$ (3336), donc $n = 2m - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}m^3c^2 - 2mnc^2 - pc^2 - \frac{1}{8}c^2 + 3m^2c^2 - mc^2$, & faiſant $m = 1$ dans les termes où il y a c^2, on aura $n = 2m - \frac{3}{4} + (\frac{29}{24} - 2n - p)c^2$; nous en ferons uſage ci-après.

On raſſemblera de même dans les valeurs de ſin. u, ſin. $2u$; ſin. $3u$, tous les termes où il y a ſin. $3z$; ceux de ſin. u ſe multiplieront par $2c$, & ainſi des autres, la ſomme devant être égalée au quatrième terme pc^3 ſin. $3z$ de la valeur ſuppoſée de u, l'on aura $pc^3 = 2c(\frac{1}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2) - 2mc(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4) + \frac{1}{3}c^3$; d'où il ſuit que la valeur de p, en changeant les ſignes, parce que dans l'expreſſion de u tous les termes ſont négatifs (3340),

& négligeant $-\frac{1}{4} m c^2$, sera $p = -m^2 - n + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$, dont nous trouverons plus bas la valeur.

Les termes où il y a sin. $4 z$, pris dans les valeurs de sin. u, sin. $2 u$, sin. $3 u$, & multipliés chacun par leur coëfficient, doivent être égalés avec $q c^4$, ce qui donnera $+ q c^4 = + c^4 (-m n - \frac{1}{3} m^3 + p + \frac{3}{2} m^2 + \frac{3}{4} n - m)$; d'où il est aisé de tirer la valeur de q. C'est ici le dernier des quatre coëfficiens m, n, p, q, que nous avons à déterminer. Passons à la manière de trouver leurs valeurs par les quatre équations où ces coëfficiens sont mêlés.

Valeurs des coefficiens séparées.

3342. On a d'abord $m = 1 - \frac{3}{2} m^2 c^2 + \frac{1}{2} n c^2$ (3340); à la place de n on mettra $2 m - \frac{3}{4}$, en négligeant les termes ultérieurs, & 1 à la place de m, dans les termes où il y a c^2, ce qui donnera $m = 1 - \frac{1}{8} c^2$. On cherchera ensuite la valeur de $p = -m^2 - n + \frac{3}{2} m - \frac{1}{3}$, & faisant $m = 1$, $n = \frac{5}{4}$, on aura $p = -\frac{13}{12}$. De même $n = \frac{5}{4} + (\frac{29}{24} - 2 n - p) c^2 = \frac{5}{4} + (-\frac{37}{24} - p) c^2$ où l'on pourroit mettre pour p sa valeur $-\frac{13}{12}$.

Enfin l'on auroit la valeur de q, en substituant dans sa valeur tirée de l'équation ci-dessus, $m = 1$, $n = \frac{5}{4}$ & $p = \frac{13}{12}$; mais ne voulant pas pousser l'approximation plus loin que c^3, nous avons $u = z - (2 c - \frac{1}{4} c^3)$ sin. $z + (\frac{5}{4} c^2)$ sin. $2 z - \frac{13}{12} c^3$ sin. $3 z$.

3343. Telle est la formule que j'ai annoncée dans l'article 1247, & dont j'ai employé le premier terme (1291). M. Jeaurat a donné une semblable formule, (*Mém. prés.* T. IV. *pag.* 535) où il a employé même c^6 & sin. $6 z$; mais ayant voulu détailler ici le procédé du calcul, il eût été trop long d'y employer autant de termes; voici seulement l'expression entière d'après M. Jeaurat : $u = z + (-2 c + \frac{1}{4} c^3 - \frac{5}{96} c^5)$ sin. $z + (\frac{5}{4} c^2 - \frac{11}{24} c^4 + \frac{17}{192} c^6)$ sin. $2 z + (-\frac{13}{12} c^3 + \frac{43}{64} c^5)$ sin. $3 z + (\frac{103}{96} c^4 - \frac{451}{480} c^6)$ sin. $4 z - \frac{1097}{960} c^5$ sin. $5 z + \frac{1223}{960} c^6$ sin. $6 z$.

Expression de l'anomalie vraie.

Les calculs précédens que je n'ai fait qu'indiquer, pourront servir d'exemple, & exercer ceux qui auront envie de faire des progrès dans ce genre de calcul, qui

eſt d'un uſage continuel & indiſpenſable dans toutes les théories d'aſtronomie.

On voit par-là que le terme principal de l'équation eſt $2c$ ſin. z, c'eſt-à-dire, la double excentricité multipliée par le ſinus de l'anomalie moyenne. Si au lieu de $2c$ on mettoit la plus grande équation elle-même, en la nommant e, comme nous l'avons fait (1291); on auroit l'équation dans tout autre point, égale à e ſin. z, en négligeant les termes ſuivans, qui ſont ordinairement fort petits. En effet, pour calculer la valeur de $2c$ ſin. z, il faudroit réduire en ſecondes la double excentricité $2c$ (1242), & ce ſeroit à peu-près la plus grande équation.

3344. On trouveroit, par une méthode ſemblable, la valeur r du rayon vecteur; voici celle que M. Jeaurat a donnée dans le même livre (*pag.* 605); $r = 1 + \frac{1}{2}c^2 + (c - \frac{3}{8}c^3 + \frac{5}{192}c^5 - \frac{6}{9216}c^7)$ coſ. $z + (-\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}c^4 - \frac{1}{16}c^6 + \frac{1}{180}c^8)$ coſ. $2z + (\frac{3}{8}c^3 - \frac{45}{128}c^5 + \frac{567}{5120}c^7)$ coſ. $3z + (-\frac{1}{3}c^4 + \frac{2}{5}c^6 - \frac{8}{45}c^8)$ coſin. $4z + (\frac{125}{384}c^5 - \frac{4375}{9216}c^7)$ coſ. $5z + (-\frac{27}{80}c^6 + \frac{81}{140}c^8)$ coſ. $6z + \frac{16807}{46080}c^7$ coſ. $7z - \frac{128}{315}c^8$ coſ. $8z$. Ces formules peuvent ſervir à réſoudre le problême de Képler; je préfère ordinairement la méthode indirecte (1238), mais celle-ci a ſon avantage, quand il s'agit de conſtruire des tables. **Rayon vecteur.**

3345. M. l'Abbé Boſſut dans un mémoire ſur l'orbite des planètes imprimé en 1766, à la fin de ſes *Recherches ſur les altérations du mouvement moyen*, qui remportèrent le prix de l'académie en 1762, a donné une ſolution analytique, très-élégante & très-ſimple de ce problême de Képler.

Remarques pour les calculs de l'Attraction.

3346. Les élémens du calcul des perturbations céleſtes que je vais bientôt expliquer, ont été ſi peu connus de la plupart des auteurs élémentaires, & ſi négligés par ceux qui pouvoient les donner, que je me crois obligé d'être long dans mon Introduction; voici donc encore

plusieurs propositions élémentaires qu'il est nécessaire de bien entendre pour passer au livre suivant.

3347. Deux quantités finies qui ne diffèrent entre elles que d'un infiniment petit, sont égales, même dans le calcul différentiel, où il ne s'agit cependant que du calcul des quantités infiniment petites : en effet, le calcul différentiel ne consiste que dans les rapports qu'ont entre elles des quantités infiniment petites (3300) ; ainsi une quantité infiniment petite ne peut pas se négliger par rapport à une autre quantité de même espèce ; mais par rapport à une quantité finie elle est totalement nulle, elle n'y ajoute rien & n'en peut rien ôter. Soit un triangle
Fig. 292. rectiligne *BKL* rectangle en *B* (*fig.* 292), dont l'angle *B* & le côté *KL* sont infiniment petits, l'angle *L* ne diffère de l'angle droit que de la quantité de l'angle infiniment petit *B* ; dès-lors il peut être pris également pour un angle droit sans qu'il puisse en résulter de l'inexactitude dans le calcul des infiniment petits. Pour en sentir la vérité tirons *LD* parallèle à *BK* & *ED* parallèle & égale à *KL*, *ED* sera égale à *KL*, soit qu'on prenne l'angle *DLK* qui est évidemment un angle droit, soit qu'on prenne l'angle *FLK* qui en diffère d'un angle infiniment petit *FLD*, car la ligne *EF* ne diffère de *ED* que d'une quantité *FD* qui est un infiniment petit du second ordre (3349), & par conséquent absolument négligeable, même dans le calcul des infiniment petits.

3348. Il en est même dans les triangles sphériques ;
Planche XLI. l'arc *CBF* (*fig.* 327), étant infiniment voisin de l'arc *CEG*,
Fig. 327. si l'on tire *BE* perpendiculaire à *CB*, elle sera également perpendiculaire sur *CE*, parce que l'angle *E* ne diffèrera de l'angle *B* que d'un infiniment petit, & ce qui pourroit en résulter dans les rapports des quantités infiniment petites comme *ED*, *DB*, *BE*, ne seroit qu'un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire, infiniment plus petit que les infiniment petits ; comme je l'ai supposé (3746, *& suiv.*).

Fig. 292. 3349. Dans un triangle *BGH* (*fig.* 292), dont l'angle *B* est infiniment petit, & *B H* un côté infiniment petit, *GH* est toujours un infiniment petit du second ordre.

DÉMONSTRATION. Si l'on prenoit une quantité finie, comme *BL*, l'arc *KL* qui mesure l'angle *B* seroit de même ordre, c'est-à-dire, un infiniment petit du premier ordre; mais *BH* est infiniment plus petit que *BL*, donc *GH* est infiniment plus petit que *KL*, ou que l'angle *B* dont *KL* est la mesure; donc si l'angle *B* est infiniment petit, aussi bien que le côté *BH*, la ligne *GH* sera un infiniment petit du second ordre. *C. Q. F. D.*

3350. COROLLAIRE. Si à l'angle *B* qui est infiniment petit du premier ordre, on ajoutoit un infiniment petit du second ordre, il n'en résulteroit sur *GH* qu'un infiniment petit du troisième, car puisque *B* étant infiniment petit du premier, n'a produit pour *GH* qu'un infiniment petit du second; si vous l'augmentez d'un infiniment petit du second vous n'aurez fait sur *GH* qu'une augmentation infiniment plus petite, c'est-à-dire, du troisième ordre.

3351. Il faut aussi considérer que *BG* ne diffère de *BH* que d'une quantité infiniment plus petite que *GH*, car *BG* étant pris pour sinus total, *BH* sera le cosinus de l'angle *B*, mais le cosinus d'un arc infiniment petit diffère du rayon d'une quantité infiniment plus petite que l'arc (3316), ou qui est par rapport au rayon un infiniment petit du second ordre; donc en supposant *GH*, perpendiculaire sur *BH*, *BG* ne diffère de *BH* que d'un infiniment petit du troisième ordre, si *BG* est lui-même un infiniment petit, ainsi nous les prendrons l'un pour l'autre (3390, &c.).

3352. Delà il suit que si l'on tire une tangente *PA* (*fig.* 291) à un arc *PB* infiniment petit, le petit écart de la tangente, ou la quantité *AB* ne différera du sinus verse *PC* de l'arc *PEB*, que d'une quantité infiniment plus petite que *AB*. Soit tirée *BG* parallèle & égale à *CP*; l'angle $ABG = PSA$ est infiniment petit, donc les lignes *AB* & *BG* diffèrent d'une quantité infiniment plus petite que n'est *AG*, c'est-à-dire, infiniment petite du second ordre par rapport à *AB*, & infiniment petite du quatrième ordre, dans le cas où *AB* est elle-même un infiniment petit du second (3353). *Fig.* 291.

Valeur du ſinus verſe. *Fig.* 315.

3353. Le sinus verse AE (*fig.* 315), d'un arc infiniment petit AP eſt égal à $\frac{AP^2}{AD}$; car par la propriété connue du cercle, $EP^2 = AE.ED$, donc $AE = \frac{EP^2}{ED}$, mais ED ou $ED + EA$, c'eſt-à-dire, AD ſont abſolument la même choſe, puiſque AE eſt infiniment petite (3347), donc $AE = \frac{EP^2}{AD}$; à la place de EP nous pouvons mettre l'arc AP, qui n'en diffère que d'un infiniment petit du troiſième ordre (3315), donc nous aurons $AE = \frac{AP^2}{DA}$.

Ecart de la tangente.

Si dans la figure 291, on ſuppoſe l'arc PB infiniment petit, on aura $PC = \frac{PB^2}{2PS} = BG$; mais on a vu que BG ne diffère pas de BA (3352); donc l'écart de la tangente, ou la petite ligne $AB = \frac{PB^2}{2PS}$, qui eſt un infiniment petit du ſecond ordre. On verra dans le livre ſuivant que cette expreſſion eſt du plus grand uſage pour la théorie des forces centrales (3391, 3396, 3416).

Comment on choiſit les unités dans le calcul.

3354. Le choix des unités, ou l'uſage des équations qui n'expriment que des rapports, eſt une manière utile de ſimplifier les calculs; nous en avons fait un uſage fréquent dans ce livre; mais de crainte que cela ne paroiſſe embarraſſant, ou même ſuſpect à quelques lecteurs, je vais en expliquer le principe de la façon la plus élémentaire.

Fig. 291.

Toutes les fois qu'on a une proportion on peut la réduire à une équation; par exemple, ſi l'on a deux arcs très-petits PE & PB (*fig.* 291), l'on aura cette proportion $PD : PC :: PE^2 : PB^2$ (3353), d'où l'on tirera l'équation $PC = \frac{PD.PB^2}{PE^2}$. Suppoſons que l'abſciſſe PD ſoit d'une ligne & l'arc PE d'une ſeconde, & qu'on veuille exprimer toutes les abſciſſes comme PC en lignes, & tous les arcs PB en ſecondes, on a $PD = 1$ & $PE = 1$, donc l'équation précédente $PC = \frac{PD.PB^2}{PE^2}$ ſe réduit à celle-ci, $PC = PB^2$, qui m'apprend que quand PB ſera de deux

ſecondes ou égale à 2, l'abſciſſe PC ſera $= PE^2$ ou égale à 4, c'eſt-à-dire, de 4 lignes, & ainſi de toutes les autres valeurs de PC. Donc au moyen de ce qu'on a pris PD pour unité des abſciſſes, & PE pour unité des arcs, on aura $PC = PB^2$, quoique la ligne PC ſoit hétérogène à l'arc PB, ou d'une eſpèce toute différente.

3355. Lorſqu'on a des temps t & T, des eſpaces e & E, des vîteſſes u & V à comparer enſemble, on ſait par la nature du mouvement que l'eſpace e eſt à l'eſpace E en raiſon compoſée de la vîteſſe u à la vîteſſe V, & du temps t au temps T; car les corps parcourent d'autant plus d'eſpace que leur vîteſſe eſt plus grande & dure plus long-temps; on aura donc $e : E :: tu : TV$, mais ſi l'on prend le temps t d'une ſeconde pour unité, l'eſpace e d'un pied pour unité des eſpaces, & la vîteſſe u d'un pied par ſeconde pour unité des vîteſſes, l'on aura ſimplement $E = T.V$, qui nous apprend que quand la vîteſſe V ſera de deux pieds par ſeconde, le temps T de deux ſecondes, on aura l'eſpace E de 4 pieds; cette équation $E = TV$ exprime ainſi le rapport qu'il y a de E à e par le moyen de celui de tu à TV, car elle revient au même que s'il y avoit $\frac{E}{e} = \frac{TV}{tu}$, équation qui marque l'égalité entre le rapport des eſpaces E, e, & celui des produits TV, tu, de la vîteſſe & du temps; ainſi l'équation $E = TV$ eſt auſſi exacte que l'autre, dès qu'on ſuppoſe que chacune des lettres E, T, V exprime une fraction d'une certaine unité, d'eſpace, de temps, & de vîteſſe. Il en eſt de même de l'expreſſion des forces attractives (3386).

3356. La même fraction peut appartenir à différentes unités, en changeant le nombre des parties : deux lignes ſont $\frac{1}{6}$ de pouce, ſi l'on veut qu'elles ſoient une fraction de pied, ou de 12 pouces, il faut les multiplier par 12, l'on aura 24 lignes ou deux pouces qui ſont également $\frac{1}{6}$, mais $\frac{1}{6}$ de pied, & la fraction n'a point changé. En général lorſqu'une quantité donnée α eſt une fraction d'une autre quantité A, ſi on veut qu'elle ſoit

une fraction de $m A$, il n'y a qu'à multiplier α par m; & $m \alpha$ sera exprimée en parties de $m A$, sans que la fraction change; car $\alpha : A :: m \alpha : m A$; nous ferons usage de cette remarque à l'occasion de la précession (3359).

Un petit arc est égal à l'angle multiplié par le rayon.

3357. Par une suite de ces principes (3354) nous disons souvent qu'un arc infiniment petit est égal au rayon de l'arc, multiplié par le petit angle dont il est la mesure (2202, 3448, 3520, 3588, &c.). Il est évident que plus on augmentera le rayon BK (*fig.* 292), d'un petit arc KL, & plus on augmentera l'angle KBL, plus aussi le petit arc KL augmentera; ainsi les petits arcs comme KL, GH sont en raison composée de leurs rayons, & des angles dont ils sont la mesure. Appellons r le rayon, du le petit angle KBL, & dx le petit arc KL; supposons que pour un rayon d'une perche, on ait un arc d'une ligne & un angle d'une minute, si tous les rayons sont exprimés en perches, les arcs en lignes, & les angles en minutes, on aura toujours $r\,du = dx$, par exemple, lorsque $r = 2$ perches & $du = 2'$ on aura $dx = 4$ lignes.

Fig. 292.

3358. On peut concevoir encore autrement la vérité de cette équation $r\,du = dx$: supposons que l'arc dx soit exprimé en parties du rayon r, ensorte que $\frac{dx}{r}$ soit le sinus du petit angle du (3613); c'est-à-dire, une fraction du rayon (3609); nous aurons précisément la même fraction si nous comparons le petit angle du avec l'angle de 57° qui est égal au rayon, car le sinus d'un arc infiniment petit est de même longueur que l'arc; ainsi le petit sinus comparé au rayon, ou le petit arc comparé avec l'arc égal au rayon, donneront exactement le même rapport ou la même fraction; donc si nous convenons d'exprimer tous les angles ou arcs en parties de l'arc de 57° comme cela se fait souvent, nous aurons véritablement $du = \frac{dx}{r}$ ou l'arc égal au sinus, c'est-à-dire, $r\,du = dx$, parce que du & $\frac{dx}{r}$ sont alors des fractions égales.

Lorsque

Lorſque dans ces cas-là, on eſt obligé de faire *du* égal à la circonférence entière du cercle pour avoir une intégrale (3567, 3585), on met le double du nombre 3, 14 pour la circonférence (3322), c'eſt-à-dire, 6, 28 qui ſuppoſe auſſi que l'arc de 57° où le rayon du cercle eſt l'unité.

3359. Les petits arcs dont on fait un uſage ſi fréquent dans les calculs peuvent s'exprimer en ſecondes, ou en décimales du rayon; quand je dis qu'un arc eſt d'une ſeconde, cela veut dire qu'il eſt $\frac{1}{1296000}$ de la circonférence entière, puiſque l'on diviſe le cercle en 360° ou 1296000″; mais il eſt ſouvent plus commode pour le calcul de dire que cet arc eſt $\frac{1}{206265}$ du rayon, & l'on y eſt obligé pour avoir une meſure commune entre les lignes droites & les petits arcs; cela revient au même, puiſque la longueur du rayon équivaut à 206265″, comme il eſt aiſé de le trouver, en diſant : La circonférence (3322) eſt à un demi, comme 1296000″ eſt à un quatrième terme, qui ſera 206264″, 80624.

Les arcs exprimés en décimales du rayon.

Nous avons déja vu pluſieurs occaſions où les arcs étoient exprimés en parties du rayon (art. 1242, 1291, 1631 & 2567), au lieu d'être en ſec.; nous en verrons encore davantage dans le livre ſuivant, car dans tous les calculs de l'attraction l'on prend pour unité la diſtance moyenne de la planète qui eſt attirée, toutes les autres quantités qu'on trouve ſont des parties ou des fractions de celle-ci. Quand on veut à la fin du calcul les avoir en ſecondes, on les multiplie par 206265″ (3466, 3471, 3494); j'en ai fait ſentir la raiſon (1242), & j'aurai ſoin de faire voir dans la ſuite que toutes les quantités trouvées par le calcul de l'attraction ſont des fractions du rayon de l'orbite de la planète (3466); or il eſt évident (puiſque la deux cent millième partie du rayon vaut une ſeconde), que j'aurai autant de ſecondes qu'il y aura de deux cent millièmes du rayon dans une fraction donnée; donc pour avoir le nombre de ſecondes il faudra diviſer la fraction donnée par la deux cent millième partie du rayon; cela nous apprendra combien cette deux

cent millième partie du rayon, c'eſt-à-dire, une ſeconde, eſt compriſe de fois dans la fraction donnée; ainſi en diviſant une fraction du rayon par $\frac{1}{206265}$, ou ce qui revient au même, en la multipliant par 206265, nous aurons la quantité de ſecondes qu'elle contient: il eſt aiſé de ſentir que puiſque le rayon eſt 200 mille fois plus petit que les ſecondes, les parties de ſecondes ſeront 200 mille fois plus grandes que les parties du rayon.

Les détails contenus dans ce XXI[e] livre étoient abſolument néceſſaires pour ſervir d'introduction au livre ſuivant, & j'aurai ſoin de citer les articles précédens toutes les fois que j'en ſuppoſerai l'uſage; j'y ai renfermé une eſpèce d'introduction à la géométrie nouvelle & à l'analyſe des Infinis: mais comme le plus bel uſage qu'on puiſſe faire de la géométrie tranſcendante, eſt la recherche des mouvemens planétaires, j'ai borné mon introduction aux articles qui peuvent ſervir dans ce genre de théorie. Je paſſe donc à l'explication de cette importante loi de l'attraction; je tâcherai de faire voir d'abord par quels degrés on eſt parvenu à une auſſi belle découverte; & comme elle a été conteſtée aſſez long-temps, je la démontrerai d'une manière à lever tous les doutes, même pour ceux qui ne veulent point d'algèbre; enfin, j'y appliquerai le calcul, pour faire voir d'une manière convaincante l'accord du principe de l'attraction avec les principaux phénomènes de l'univers. Ce petit Traité fut expliqué au collège Royal en 1761, & j'eus pour lors occaſion de le rendre auſſi élémentaire & auſſi clair qu'on avoit paru le deſirer.



LIVRE VINGT-DEUXIEME.

DE LA PESANTEUR,
OU DE L'ATTRACTION DES PLANETES.

LA PESANTEUR eſt cette force que nous éprouvons à chaque inſtant, par laquelle tous les corps tiennent au globe de la terre, & y retombent d'eux-mêmes auſſi-tôt qu'on les en éloigne & qu'ils ſont libres.

3360. Cette peſanteur eſt l'effet d'une force univerſelle répandue dans toute la Nature, & qui réſide dans tous les corps auſſi bien que dans le globe de la terre, comme nous le démontrerons bientôt (3374); mais il faut commencer par examiner ſes effets ſur la terre, avant de la conſidérer dans le reſte de l'univers.

3361. Le premier phénomène qu'on obſerve dans la peſanteur des corps terreſtres, c'eſt la vîteſſe avec laquelle ils tombent vers la terre : tous les corps, grands ou petits, quels que ſoient leur étendue, leur volume, leur denſité & leur maſſe, commencent à tomber avec une vîteſſe de 15 pieds par ſeconde (ou plus exactement, 15,0515 ſous l'équateur); mais après avoir parcouru 15 pieds dans la première ſeconde de temps, ils en parcourent trois fois autant dans la ſuivante, cinq fois autant dans la troiſième; les eſpaces parcourus ſont comme les nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9, &c. Galilée reconnut le premier cette loi, confirmée enſuite par toutes les expériences.

Accélération des graves.

3362. Delà il réſulte évidemment que les eſpaces parcourus ſont comme les carrés des temps; car le corps qui n'avoit parcouru qu'une perche à la fin de la première ſeconde, ſe trouve en avoir parcouru quatre au bout de deux ſecondes, neuf après trois ſecondes, ſeize, &c. donc les eſpaces parcourus dans la chûte des corps ſont comme les carrés 1, 4, 9, 16 des temps 1, 2, 3, 4, que la chûte a duré.

Les eſpaces ſont comme les carrés des temps.

3363. Ce fait qui eſt prouvé par expérience eſt indiqué par la nature même de la choſe ; la gravité étant une force continue, agit ſans interruption ſur le corps qui y eſt ſoumis, pendant la durée de ſa chûte ; dès-lors les eſpaces qu'elle lui fait parcourir doivent être comme les carrés des temps. En effet, exprimons les inſtans que dure la chûte par les portions d'une ligne *BK* (*fig.* 292), croiſſante également, & diviſée en parties égales *BG*, *GM* ; les vîteſſes du corps qui tombe croiſſent dans la même proportion, puiſque à chaque inſtant il ſurvient un nouveau degré de vîteſſe égal au précédent, qui ne le détruit point, mais qui ſe joint avec lui ; ces vîteſſes peuvent donc s'exprimer légitimement par les ordonnées *GH*, *KL* du triangle, puiſque ces ordonnées croiſſent uniformément, ou comme les temps *BG*, *BK*. Les eſpaces parcourus à chaque inſtant doivent être d'autant plus grands que l'inſtant eſt plus long & la vîteſſe plus grande ; mais puiſque les inſtans ſont exprimés par *BG* ou *BK*, & les vîteſſes par *GH* ou par *KL*, la valeur abſolue des eſpaces parcourus pourra être exprimée par le produit des lignes *BG* & *GH*, ou par celui des lignes *BK* & *KL*, c'eſt-à-dire, dans chaque cas par la ſurface du triangle ; mais la ſurface du petit triangle eſt à celle du grand, comme le carré de *BG* eſt à celui de *BK* ; donc les eſpaces parcourus ſont comme les carrés des temps.

Fig. 292.

3364. Les eſpaces étant comme les carrés des temps, & les vîteſſes comme les temps pendant leſquels elles ont été acquiſes, les eſpaces ſont comme les carrés des vîteſſes ; donc les vîteſſes ſont comme les racines des eſpaces parcourus, c'eſt-à-dire, des hauteurs d'où les graves doivent tomber pour acquérir ces vîteſſes. On peut dire également que les vîteſſes ſont comme les racines des hauteurs doubles, c'eſt-à-dire, des eſpaces qui ſeroient parcourus uniformément avec les mêmes vîteſſes acquiſes.

Cela eſt commun à toutes les forces.

3365. On doit étendre cette propoſition à toute force attractive conſtante, c'eſt-à-dire, à toute force qui agit uniformément, conſtamment, & ſans interruption ; les eſpaces parcourus ſont néceſſairement alors comme

les carrés des temps ; nous ferons ſouvent uſage de cette remarque, nous ſuppoſerons toujours que ſi f eſt la force, dt le petit intervalle de temps, & de le petit eſpace, on doit avoir $fdt^2 = de$; ainſi pour comparer la force d'une planète quelconque avec la force que la terre exerce ſur les corps graves, f étant ſuppoſée la force accélératrice d'une autre planète, comme la lune, enſorte que f ſoit $\frac{1}{70}$ de la force de la terre, à pareille diſtance, & dt un nombre de ſecondes comme 4″, on aura l'eſpace que cette force f feroit parcourir en 4″ égal à $fdt^2 = \frac{1}{70} . 16$, ou $\frac{16}{70}$ des 15 pieds que la terre fait parcourir aux corps terreſtres (3361). Si la force n'eſt pas conſtante & uniforme, l'augmentation de la vîteſſe eſt à chaque moment en raiſon compoſée de la force, & du temps pendant lequel cette force s'exerce, comme nous l'avons ſuppoſé (2198).

3366. De ce que toutes les forces accélératrices conſtantes font parcourir des eſpaces qui ſont comme les carrés des temps, j'ai auſſi conclu que les équations ſéculaires doivent être comme les carrés des temps (1166), & cela ſuit des mêmes raiſonnemens ; car ſi la cauſe agit toujours également, & que ſon effet ne ſoit jamais détruit, cet effet croîtra comme les carrés des temps.

3367. La même loi s'obſerve dans les mouvemens céleſtes ; une planète ne ſe meut dans une orbite, que parce qu'elle eſt ſans ceſſe retenue par une force centrale, (1231 & ſuiv.) ; auſſi l'écart de la tangente, ou la petite ligne AB (*fig.* 291) qui marque l'effet de la force centrale, & la quantité dont cette force retire la planète du mouvement rectiligne, eſt comme le carré des temps qui ſont exprimés par les petits arcs décrits (3353). *Fig.* 291.

3368. La force accélératrice qui agit continuellement ſur les graves, & qui fait parcourir à chaque inſtant un petit eſpace de, eſt proportionnelle à cet eſpace ; ſi cet eſpace de parcouru à chaque inſtant étoit double, nous dirions que la force eſt double ; car nous n'avons pas d'autre manière d'exprimer une force que par l'eſpace qu'elle fait décrire en un temps donné ; ainſi nous

Meſure de la force accélératrice.

ſuppoſerons toujours que la force accelératrice eſt proportionnelle à l'eſpace qu'elle fait parcourir, dans un petit eſpace de temps.

3369. Quand un corps au lieu de deſcendre verticalement deſcend le long d'un plan incliné, ſa vîteſſe eſt moindre le long du plan, parce qu'il n'y a qu'une partie

Pl. XLII. Fig. 331. de la gravité naturelle qui ſoit employée à agir le long du plan. Soit le plan *NA* (*fig.* 331); ſuppoſons la gravité naturelle exprimée par la ligne verticale *BA*, elle ſe décompoſe en deux forces *BN* & *NA* (1232), & il n'y a que la force *NA* qui ſoit employée à faire deſcendre le corps *N* le long du plan *NA*; ſi donc *NA* n'eſt que la moitié de *BA*, la force accélératrice du corps *N* ſera diminuée de moitié; & le corps emploîra le même temps à parcourir le plan incliné *NA*, ou la ligne verticale *BA*; ainſi dans un cercle *BNMA*, toutes les cordes telles que *MA*, *NA*, *BA*, ſont parcourues exactement dans le même eſpace de temps.

3370. Si deux corps deſcendent l'un dans une courbe

Fig. 332. *KI* (*fig.* 332), & l'autre dans une ligne droite verticale *CDEF*, qu'ils ſoient à mêmes hauteurs par rapport aux points d'où ils ſont partis, & ſur une même ligne horizontale *EI*, ces corps ont la même vîteſſe ou la même quantité d'accélération. En effet, que $DE = IN$ exprime la force centripete, qui eſt la même pour tous les deux; la force *NI* ſe decompoſe, ſuivant *NT* & *TI*, & la force *TI* eſt la ſeule qui concoure à augmenter le mouvement; donc les accélérations des deux corps ſont comme les forces accélératrices *DE* & *TI*, & comme les temps pendant leſquels elles durent (3368); ces temps ſont :: DE : KI (3369), donc les accélérations ſont comme DE^2 : $TI.KI$; mais ces deux quantités ſont égales, parce que les triangles ſemblables *KNI*, *TNI* donnent cette proportion $KI : NI$ ou $DE :: NI : TI$; donc les accélérations des deux corps ſont égales.

Mouvement d'oſcillation. Delà il ſuit que lorſqu'un pendule *CF* oſcille dans un arc de cercle *KF* en partant du point *G*, ſa vîteſſe accélératrice en *K* eſt égale à celle du corps libre qui ſeroit tombé de

C en D; c'est-à-dire, qu'elle est comme la racine de la hauteur CD (3364).

3371. TROUVER *la durée de l'oscillation du pendule* CN (*fig.* 331), *dans un arc* AN *supposé infiniment petit*. Considérons le corps qui décrit l'arc NMA, lorsqu'il est au point M de sa chûte; tirons les cordes AM, AN; ces cordes étant infiniment proches l'une de l'autre, leur différence pourra être prise pour l'arc NM, il n'en différeroit que d'un infiniment petit du troisième ordre (3315). Soit $AC=a$, $AQ=b$, $AP=x$, & ayant décrit sur AQ un demi-cercle ARQ, soit l'arc $AR=z$. A cause des triangles semblables ANB, ANQ, l'on a $AB:AN::AN:AQ$, ou $AN=\sqrt{2ab}$; de même à cause des triangles AMB, AMP, l'on aura $AB:AM::AM:AP$, ou $AM=\sqrt{2ax}$, donc la différence de ces deux lignes ou l'arc $NM=\sqrt{2ab}-\sqrt{2ax}$; prenons la différentielle Mm de cet arc MN, afin d'avoir un mouvement uniforme pendant le temps que le corps parcourra Mm; cette différentielle (3298) est $\frac{-2adx}{2\sqrt{2ax}}$ ou $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$; c'est le petit espace parcouru, c'est-à-dire, Mm. La vîtesse acquise par le corps depuis N jusqu'en M est comme la racine de la hauteur, ou $\sqrt{2(b-x)}$ (3364), donc le temps dt employé à parcourir Mm, ou l'espace divisé par la vîtesse, sera $=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2(b-x)}\sqrt{2x}}=\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{bx-xx}}$. Dans un arc AM dont le rayon est $\frac{1}{2}b$, & l'abscisse $b-x$ la différentielle de l'arc est à celle du cosinus, où à celle de AP, comme le rayon est au sinus qui est $\sqrt{bx-xx}$, donc $dz=\frac{-bdx}{2\sqrt{bx-xx}}$, $\frac{2dz}{b}=\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$; donc dt, ou $\frac{dx}{\sqrt{bx-xx}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{2dz}{b}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{dz\sqrt{a}}{b}$, dont l'intégrale $t=z\frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{\text{arc } AR}{AQ}\cdot\sqrt{AC}$. Si l'on fait $AR=180°$, & c égal à la circonférence pour le diamètre 1, l'on aura $\frac{c}{2}=\frac{\text{arc } R}{AQ}$, & $t=\frac{c}{2}\sqrt{AC}$. Le temps par $AB=2a$ est $=$ Fig. 331.

Fig. 331. $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$, & le temps de l'oscillation entière $c\sqrt{AC} = c\sqrt{a}$, donc le temps par *BA* est à celui de l'oscillation entière : : $2\sqrt{a} : c\sqrt{a} :: 2 : c :: 1 : \frac{c}{2}$. Les espaces parcourus étant comme les carrés des temps, un espace quatre fois moindre se parcourt dans la moitié du temps; donc les oscillations entières sont au temps par la moitié du pendule *CA*, ou le quart du diamètre *BA* comme la circonférence est au diamètre. C'est le théorême de M. Huygens, (*Horol. oscill.*), dont nous ferons usage pour déterminer la distance de la lune à la terre (3421).

Delà il suit 1°, que la durée de chaque oscillation augmente comme la racine de la longueur du pendule, ou que la longueur du pendule est en raison inverse du carré du nombre d'oscillations, 2°, que si la pesanteur varie en différens points de la terre, la longueur du pendule à secondes est comme le carré du nombre des oscillations (2699).

Il ne sera pas inutile de résoudre une difficulté qui peut se présenter naturellement sur la durée de cette oscillation le long de l'arc *NMA*; on suppose l'arc égal à la corde, cependant la corde seroit parcourue dans un temps égal à celui de la chûte *BA*, qui est de 38''', & l'arc *NMA* est parcouru dans l'espace de 30''', quantité qui est sensiblement différente de la première; cela vient de ce que la distribution de la vîtesse accélérée du corps qui tombe le long de l'arc ou le long de la corde est fort différente; le point *M* de l'arc & le point *D* de la corde, situés sur la ligne horizontale *MDP* sont ceux où la vîtesse acquise est la même, or *NM* & *ND* différent entre elles d'une quantité qui leur est comparable, & qui ne peut point se négliger, parce que l'angle *D* est un infiniment petit du second ordre, étant opposé au sinus verse *PA* qui est du même ordre (3353), lorsqu'on suppose *AM* un infiniment petit du premier. (*Mém. acad.* 1744, *pag.* 386.).

Espace parcouru en une seconde.

3372. L'espace que les corps graves parcourent en une seconde par l'effet de la pesanteur se trouve avec beaucoup

beaucoup de précision, & à un quart de ligne près, par le moyen du pendule à secondes; si l'on appelle p la longueur du pendule à secondes (2699), & c la circonférence (c'est à peu-près le nombre 3), on aura pour l'espace parcouru en 1″, $\frac{pc^2}{2}$. En effet la circonférence est au diamètre, comme le temps d'une petite oscillation ou d'une seconde est au temps qui répondroit à la descente perpendiculaire sur la moitié du pendule à secondes ou d'environ 18 pouces, ensorte que ce temps est de 19‴, car 355 : 113 :: 60‴ : 19‴; mais les espaces parcourus sont comme les carrés des temps, donc $(19''')^2 : (60''')^2 ::$ 18 pou. : 15 pieds, $:: (113)^2 : (355)^2$ ou $1 : c^2 :: \frac{p}{2} : \frac{pc^2}{2}$; cette quantité est de 15 pieds, 0515 sous l'équateur où le pendule est de 36 pou. 7 lig. 21. Il suffit d'ajouter le log. constant 8,5349074 avec celui du pendule en un lieu quelconque, réduit à la température dans le vide, & a des arcs très-petits, exprimé en lignes pour avoir l'espace parcouru en une seconde, exprimé en pieds. Sous l'équateur.

3373. Ainsi la longueur du pendule, observée sous l'équateur & sous le cercle polaire (2699), nous ayant fait connoître que l'espace parcouru en une seconde est 15,0515 sous l'équateur au niveau de la mer, & 15, 117 dans le nord, ces espaces étant entre eux comme 230 est à 231, on en conclut que la pesanteur est plus grande sous le cercle polaire de $\frac{1}{230}$ que sous l'équateur.

3374. Après avoir vu l'effet de la pesanteur sur la terre, examinons si cette force a lieu dans les autres corps célestes. Leur figure ronde suffit d'abord pour démontrer qu'il y a dans chaque planète une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur notre globe. La terre s'est arrondie dès l'instant de sa formation, & la mer qui l'environne s'arrondit également, parce que toutes les parties tendent vers un centre commun, autour duquel elles se disposent & s'arrangent pour trouver l'équilibre : nous faisons abstraction de la petite différence produite par la force centrifuge (3582). Cet équilibre ne pourroit avoir lieu si une partie La pesanteur est universelle.

de l'océan étoit plus éloignée du centre que l'autre (2660); voilà pourquoi la pesanteur mutuelle des parties d'un corps, doit nécessairement y produire la rondeur.

3375. Il y a donc dans toutes les planètes une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur la terre ; ainsi la matière de la terre n'est pas la seule qui soit douée de cette faculté de retenir & d'attirer les corps environnans ; de là il étoit naturel de conclure qu'il y avoit dans la matière en général une force attractive, & que par-tout où il y avoit de la matière, il y avoit une attraction. Suivons donc le progrès de nos connoissances, & voyons comment a du se découvrir cette fameuse loi de l'attraction universelle, source de tant d'autres découvertes, & d'où l'on tire encore chaque jour les conséquences les plus singulières & en même temps les plus conformes à l'observation.

Les anciens l'avoient comprise.

3376. Anaxagore, Démocrite, Epicure admettoient déja cette tendance générale de la matière vers les centres communs, soit sur la terre, soit ailleurs ; Plutarque en parle d'une manière bien claire, dans l'ouvrage sur la cessation des oracles (*pag*. 471. édition de Francfort, 1600); où il explique comment chaque monde a son centre particulier, ses terres, ses mers, & la force nécessaire pour les assembler & les retenir autour du centre.

Elle est admise par Copernic, Tycho & Képler.

Copernic avoit la même idée de l'attraction générale, car il attribuoit la rondeur des corps célestes à la tendance qu'ont leurs différentes parties à se réunir (*de Revolut. c.* 9), d'où il suivoit que cette tendance avoit lieu dans chaque planète, aussi bien que sur la terre. Tycho lui-même admettoit une force centrale dans le soleil (1097), pour retenir les planètes dans leurs orbites autour de lui, quoique cette attraction fut difficile à concilier avec son systême. Képler, génie plus vaste & plus hardi que tous ceux qui l'avoient précédé, porta ses idées plus loin, il sentit que l'attraction étoit générale & réciproque, & que l'attraction du soleil devoit s'étendre jusqu'à la terre (*De Stella Martis*, 1609. *Epist. astron. Cop.* 1618, *pag*. 555. *Hist. des Math.* par M. Montucla, 1758, Tom. II, *pag*. 213, 527,

538) ; dans la préface de ce livre fameux, où il démontra le premier que les orbites des planètes n'étoient point circulaires (1206) ; il dit précisément que si la lune & la terre n'étoient pas en mouvement, elles s'approcheroient l'une de l'autre, & se réuniroient à leur centre de gravité commun. Il dit ailleurs que l'action du soleil produit les inégalités de la lune ; que l'action de la lune produit le flux & le reflux de la mer ; que le soleil attire les planètes, & en est attiré.

Et comment ne pas tirer cette conséquence des phénomènes que l'on observoit ; la pesanteur des corps terrestres s'étend sur le sommet des montagnes, elle s'étend jusqu'au plus haut des airs, d'où la grêle tombe avec violence aussi-tôt que le froid l'a formée; il étoit donc évident que cette pesanteur devoit s'étendre plus loin que la terre, & au-delà des nuages qui l'environnent ; la lune n'est pas fort éloignée de la terre, dut dire Képler, elle tourne autour de la terre, elle y présente toujours le même côté, n'y auroit-il point vers la lune un reste de cette pesanteur qui ramène tout à la terre ? Les corps qui tournent en rond s'échappent bientôt par la tangente, s'ils ne sont retenus (1231) ; la lune devroit s'échapper de son cercle, (comme une goutte d'eau s'échappe de dessus une meule), si la terre n'avoit assez de force pour l'en empêcher. Ce même raisonnement fit trouver ensuite à Newton quelle étoit la loi de cette pesanteur (3381).

3377. Képler ayant une fois conçu que la lune étoit attirée par la terre, & considérant que chaque planète a sa pesanteur (3374), devoit en conclure que la lune attiroit aussi la terre ; mais en considérant les eaux de la mer qui se soulèvent tous les jours quand la lune passe au méridien, il ne douta plus que ce ne fût-là un effet de l'attraction lunaire.

C'est sur-tout dans sa nouvelle physique céleste (1206), que Képler s'exprime sur la gravité, d'une façon bien remarquable pour ce temps-là. Il voyoit d'une manière frappante & lumineuse pour lui, toutes les planètes assujetties au soleil, & la lune à la terre, comme les corps

terreſtres que nous avons continuellement ſous les yeux ; il ſentoit que l'attraction étoit générale entre tous les corps de l'univers ; que deux pierres ſe réuniroient par leur attraction mutuelle ſi elles étoient hors de la ſphère d'activité de la terre ; que les eaux de la mer s'éléveroient vers la lune ſi la terre ne les attiroit, & que la lune retomberoit vers la terre ſans la force avec laquelle elle décrit ſon orbite. J'abrège ma traduction pour faire place à ce texte ſingulier, qui eſt à la cinquième page de ſon introduction.

Paſſage de Képler ſur l'attraction.

Vera igitur doctrina de Gravitate his innititur axiomatibus... Si duo lapides in aliquo loco mundi collocarentur propinqui invicem, extra orbem virtutis tertii cognati corporis ; illi lapides, ad ſimilitudinem duorum magneticorum corporum, coirent loco intermedio, quilibet accedens ad alterum tanto intervallo quanta eſt alterius moles in comparatione. Si luna & terra non retinerentur vi animali, aut aliâ aliquâ æquipollenti, quælibet in ſuo circuitu, terra aſcenderet ad lunam quinquageſimâ quartâ parte intervalli ; luna deſcenderet ad terram quinquaginta tribus partibus intervalli, ibique jungerentur : poſito tamen quòd ſubſtantia utriuſque ſit unius & ejuſdem denſitatis. Si terra ceſſaret attrahere ad ſe aquas ſuas, aquæ marinæ omnes elevarentur & in corpus lunæ influerent. (Introd. *pag.* 5). Il explique enſuite très-bien les marées par l'attraction de la lune ſur l'océan (3590).

La comparaiſon entre les attractions céleſtes & celle de l'aimant paroiſſoit d'autant plus naturelle à Képler, qu'un Phyſicien Anglois venoit de faire voir que le globe de la terre étoit comme une eſpèce de grand aimant. *Perbellum equidem attigi exemplum magnetis, & omnino rei conveniens, ac parum abeſt quin res ipſa dici poſſit. Nam quid ego de magnete tanquam de exemplo? Cùm ipſa tellus, Gulielmo Gilberto, Anglo, demonſtrante, magnus quidam ſit magnes;* (*cap.* 34, *pag.* 176) [a].

(a) Les découvertes de Képler avoient été préparées & annoncées par les écrits de trois hommes celèbres, Copernic, Tycho & Gilbert, il leur rend lui-même ce temoignage: *Veritatis in me ſit amor, an gloriæ, lo-*

3378. La lecture des ouvrages de Képler suffisoit pour persuader aux savans, que cette attraction de la matière étoit universelle; aussi voyons-nous qu'en Angleterre & en France, même avant Newton, plusieurs auteurs en parlèrent disertement.

On trouve dans Fermat le passage suivant; (*Var. op. Math. pag.* 24). « La commune opinion est que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui » tombe; d'autres sont d'avis que la descente des corps » procède de l'attraction d'un autre corps qui attire celui » qui descend, comme la terre. Il y a une troisième » opinion *qui n'est pas hors de vraisemblance*, que c'est » une attraction mutuelle entre les corps, causée par un » desir naturel que les corps ont de s'unir ensemble, » comme il est évident au fer & à l'aimant; lesquels sont » tels que si l'aimant est arrêté, le fer ne l'étant pas l'ira » trouver, & si le fer est arrêté, l'aimant ira vers lui; & si » tous deux sont libres ils s'approcheront réciproquement » l'un de l'autre, ensorte toute fois que le plus fort des » deux fera le moins de chemin». Passage de Fermat sur l'attraction.

3379. BACON, dans ce livre fameux qui a pour titre *Instauratio magna* ou *Novum organum* (*Liv. II. art.* 36, 45 & 48), parle souvent de l'attraction magnétique de la terre sur les corps graves, de la lune sur les eaux de la mer, du soleil sur Mercure & Vénus; il propose des expériences propres à vérifier ces attractions; & quoiqu'il m'ait paru à la lecture de cet ouvrage que l'auteur n'étoit point au fait de l'astronomie, on voit cependant que ce qu'il dit des attractions célestes étoit propre à fournir des idées très-lumineuses & très-physiques sur la gravité universelle. Elle est adoptée par Bacon.

Galilée reconnoissoit aussi cette sympathie de la lune Par Galilée & Hévélius.

quantur dogmata mea, quæ pleraque aliis accepta fero: Totam astronomiam Copernici hypothesibus de mundo, Tychonis vero Brahei observationibus, denique Guilielmi Gilberti Angli magneticæ philosophiæ inædifico. Epit. Astr. Cop. *pag.* 429. L'ouvrage dont parle ici Képler a pour titre: *Gulielmi Gilberti Colcestr. medici Londinensis tractatus de magnete, & de magno magnete Tellure,* Lond. 1600 Sedini, 1633, *in*-4°.

avec la terre (3176) : Hévélius attribuoit au ſoleil une force ſemblable (3017).

Par Roberval.

L'attraction générale étoit ſur-tout le principe fondamental du livre que Roberval publia en 1644, intitulé *Ariſtarchi Samii de mundi ſyſtemate liber;* il attribue à toutes les parties de matière dont l'univers eſt compoſé, la propriété de tendre les unes vers les autres ; c'eſt pour cela, dit-il, qu'elles ſe diſpoſent ſphériquement, non par la vertu d'un centre, mais par leur attraction mutuelle, & pour ſe mettre en équilibre les unes avec les autres.

Paſſage de Hook.

3380. On voit encore l'attraction mutuelle de tous les corps céleſtes indiquée d'une manière poſitive dans un livre du Docteur Hook, (548) que j'ai cité (2773). « J'expliquerai, dit-il, (*pag.* 27), un ſyſtême du monde » qui diffère à pluſieurs égards, de tous les autres, mais » qui s'accorde parfaitement avec les règles ordinaires de » la mécanique ; il eſt fondé ſur ces trois ſuppoſitions ; 1°. » Que tous les corps céleſtes, ſans en excepter aucun, » ont une attraction ou gravitation vers leur propre cen- » tre, par laquelle, non-ſeulement ils attirent leurs propres » parties & les empêchent de s'écarter, comme nous le » voyons ſur la terre ; mais attirent encore les autres corps » céleſtes qui ſont dans la ſphère de leur activité...... » 2°. Que tous les corps qui ont reçu un mouvement ſim- » ple & direct, continuent à ſe mouvoir en ligne droite » juſqu'à ce que par quelqu'autre force effective ils en » ſoient détournés & forcés à décrire un cercle, une » ellipſe ou quelqu'autre courbe compoſée ; 3°. Que les » forces attractives ſont d'autant plus puiſſantes dans leurs » opérations, que le corps ſur lequel elles agiſſent eſt plus » près de leur centre. Pour ce qui eſt de la *proportion*, » ſuivant laquelle ces forces diminuent à meſure que la » diſtance augmente, j'avoue que je ne l'ai pas encore » vérifiée...... Je donne cette ouverture à ceux qui ont » aſſez de loiſir & de connoiſſances pour cette recherche ».

Il propoſe de chercher la loi de l'attraction.

Cette loi qu'il propoſoit de trouver, fut préciſément celle que chercha Newton ; auſſi voyons-nous qu'il cite

le Docteur Hook, au commencement de ſon livre *de Mundi Syſtemate*, (*Newtoni*, *Opuſcula*, 1744. II, *6*). Voyez la traduction de Newton par Madame du Châtelet, & l'*Hiſtoire des Math.* de M. Montucla, 1758, tom. II, *pag.* 527.

3381. Il ne manquoit donc plus à l'attraction qu'un Géomètre qui découvrît la loi ſuivant laquelle elle décroît, Pythagore l'avoit donnée (ſuivant M. *Dutems*); mais elle étoit oubliée; elle n'étoit point démontrée, il falloit la découvrir de nouveau, & Newton étoit plus que perſonne en état de le faire; s'il n'eût pas trouvé cette loi, je crois qu'avant la fin du dernier ſiècle d'autres Géomètres l'auroient apperçue; les choſes étoient trop avancées pour qu'on pût l'ignorer plus long-temps; mais Newton en eut la gloire. Je vais tracer l'hiſtoire de cette découverte, en traduiſant un paſſage d'Henri Pemberton, contemporain & ami de Newton.

Hiſtoire de la découverte de Newton.

« Les premieres idées qui donnèrent naiſſance au livre » des principes de Newton, lui vinrent en *1666*, lorſqu'il » eut quitté Cambridge à l'occaſion de la peſte. Il ſe pro» menoit ſeul dans un jardin, méditant ſur la peſanteur, » & ſur ſes propriétés : cette force ne diminue pas ſenſi» blement quoiqu'on s'élève au ſommet des plus hautes » montagnes; il étoit donc naturel d'en conclure que cette » puiſſance devoit s'étendre beaucoup plus loin. Pourquoi, » diſoit-il, ne s'étendroit-elle pas juſqu'à la lune? Mais » ſi cela eſt, il faut que cette peſanteur influe ſur le mou» vement de la lune; peut-être ſert-elle à retenir la lune » dans ſon orbite? Et quoique la force de la gravité ne » ſoit pas ſenſiblement affoiblie par un petit changement » de diſtance, tel que nous pouvons l'éprouver ici-bas, » il eſt très-poſſible que dans l'éloignement où ſe trouve » la lune, cette force ſoit fort diminuée. Pour parvenir à » eſtimer quelle pouvoit être la quantité de cette dimi» nution, Newton ſongea que ſi la lune étoit retenue dans » ſon orbite par la force de la gravité, il n'y avoit pas » de doute que les planètes principales ne tournaſſent au» tour du ſoleil en vertu de la même puiſſance. En com-

» parant les périodes des différentes planètes avec leurs » diſtances au ſoleil, il trouva que ſi une puiſſance ſem- » blable à la gravité les retenoit dans leurs orbites, ſa » force devoit diminuer en raiſon inverſe du carré de la » diſtance (3396). Il ſuppoſa donc que le pouvoir de la » gravité s'étendoit juſqu'à la lune & diminuoit dans le » même rapport, & il calcula ſi cette force ſeroit ſuffiſante » pour retenir la lune dans ſon orbite. Il faiſoit ces calculs » dans un temps où il n'avoit point ſous ſa main les livres » qui lui auroient été néceſſaires ; & il ſuppoſoit, ſuivant » l'eſtime commune employée par les Géographes & par » nos Marins, avant la meſure de la terre faite par « Norwood (2632), que 60 milles d'Angleterre (2639) » faiſoient un degré de latitude ſur la terre ; mais comme » cette ſuppoſition étoit très-défectueuſe, (puiſque cha- » que degré doit contenir 69 ½ milles), le calcul ne ré- » pondit point à ſon attente ; il crut alors qu'il y avoit au » moins quelqu'autre cauſe jointe à la peſanteur qui agit » ſur la lune, & il abandonna ſes recherches ſur cette ma- » tière. Quelques années après, une lettre du Docteur » Hook lui fit rechercher quelle eſt la vraie courbe dé- » crite par un corps grave qui tombe, & qui eſt entraîné » par le mouvement de la terre ſur ſon axe. Ce fut une » occaſion pour Newton de reprendre ſes premières idées » ſur la peſanteur de la lune. Picard venoit de meſurer en » France le degré de la terre (2633), & en ſe ſervant de » ſes meſures, il vit que la lune étoit retenue dans ſon » orbite par le ſeul pouvoir de la gravité (3398), d'où il » ſuivoit que cette gravité diminuoit en s'éloignant du » centre de la terre, de la même manière que notre au- » teur l'avoit autrefois conjecturé. D'après ce principe, » Newton trouva que la ligne décrite par la chûte d'un » corps étoit une ellipſe dont le centre de la terre occu- » poit un foyer ; or les planètes principales décrivent auſſi » des ellipſes autour du ſoleil (1220) ; il eut donc la ſatis- » faction de voir que cette ſolution, qu'il avoit entrepriſe » par pure curioſité, pourroit s'appliquer aux plus gran- » des recherches. En conſéquence, il compoſa une dou-

» zaine de propositions relatives au mouvement des pla-
» nètes principales autour du soleil. Plusieurs années après,
» le Docteur Halley étant allé voir Newton à Cambridge,
» l'engagea dans la conversation à reprendre ses médita-
» tions à ce sujet, & fut l'occasion du grand Ouvrage des
» *Principes* qui parut en 1687, (*a View of Sir Isaac New-*
» *ton's Philosophy*, , London 1728 *in*-4°. *Préface*) ».

3382. J'ajouterai que Newton avoit dès-lors sous les yeux plusieurs indications de cette attraction ; la diminution du pendule observée à Cayenne (2657) ; l'aplatissement de Jupiter observé par M. Cassini ; la libration de l'apogée de la lune observée par Horoccius, &c.

Depuis ce temps-là les effets de l'attraction se sont tellement multipliés, cette attraction universelle des planètes, la tendance réciproque de l'une à l'autre a été prouvée par les faits de tant de façons différentes, elle se retrouve dans des circonstances si éloignées ; enfin toutes les conséquences qu'on en tire sont si bien d'accord avec les phénomènes, qu'il n'est plus possible de la révoquer en doute.

Quinze effets de l'attraction.

3383. Voici une énumération succincte des phénomènes observés, qui chacun séparément suffiroit pour prouver l'attraction, quand on ignoreroit tous les autres, & qui fournissent au moins quinze espèces de preuves différentes de cette attraction universelle. I. Le flux & le reflux de la mer, qui fournit deux fois le jour la preuve la plus palpable, & la plus frappante, pour tous les yeux, de l'attraction lunaire, & dont tous les phénomènes s'accordent réellement avec le calcul des attractions du soleil & de la lune, comme nous l'expliquerons bientôt (3590). II. Les inégalités de la lune qui dépendent visiblement du soleil (1433). III. Le mouvement des planètes autour du soleil (1231) avec cette loi que les cubes des distances sont comme les carrés des temps (3396). IV. La figure elliptique des orbites de la lune autour de la terre, & de toutes les planètes, & même des comètes autour du soleil (3425). V. La précession des équinoxes (3561). VI. La nutation de l'axe de la terre, produite par l'ac-

tion de lune (3569). VII. Les inégalités que Jupiter, Saturne & toutes les planètes éprouvent dans leurs différentes positions (3430). VIII. Les inégalités prodigieuses de la comète de 1759, dont la dernière révolution s'est trouvée de 585 jours plus longue que la précédente, suivant le calcul des attractions de Jupiter & de Saturne (3115). IX. L'aplatissement de Jupiter & de la terre (3589). X. L'attraction des montagnes sur le pendule (2695). XI. Le changement de latitude & de longitude des étoiles fixes (2742). XII. La diminution de l'obliquité de l'écliptique (2715). XIII. Les mouvemens des apsides des planètes (1312 & suiv. 3509), sur-tout de l'apogée de la lune (1432), qui s'observe incontestablement dans le ciel. XIV. Le mouvement des nœuds de toutes les planètes (1337), sur-tout des nœuds de la lune, qui est si considérable & si sensible que dans neuf ans l'orbite de la lune se renverse, & qu'elle passe à 10° des étoiles qu'elle couvroit auparavant (1487). XV. Les inégalités des satellites de Jupiter (2969).

Réfutation des tourbillons.

De ces quinze espèces de phénomènes, la plupart sont inexplicables dans le systême des tourbillons & du plein, & c'est avoir démontré d'une manière complète l'impossibilité du systême des Cartésiens, que d'avoir prouvé l'existence de ces phénomènes & la manière dont ils résultent de l'attraction. Il ne peut y avoir actuellement un géomètre ou un seul astronome passablement instruit des phénomènes & des nouvelles théories, qui croie encore aux systêmes des tourbillons & du plein, ou qui rejette l'attraction Newtonienne.

3384. Plusieurs Physiciens célèbres se sont efforcés d'expliquer la loi universelle de l'attraction, par une cause impulsive, par un fluide, par le mouvement des atômes, &c. [a]. Mais en seroit-on plus avancé? il resteroit à expliquer la cause de ce mouvement primitif; or les causes premières sont au-dessus de notre entendement.

(a) Voyez sur-tout l'*Essai de Chymie Mécanique*, par M. le Sage, Citoyen de Genève, qui a remporté le prix de l'académie de Rouen, & la lettre du même auteur, dans le Mercure de Mai 1756.

Pour moi je pense avec M. de Maupertuis & la plupart des Métaphysiciens Anglois, que l'attraction dépend d'une propriété intrinsèque de la matière. Si cette propriété étoit métaphysiquement impossible, dit M. de Maupertuis (a), » les phénomènes les plus pressans de la nature ne pour» roient pas la faire recevoir; mais si elle ne renferme ni » impossibilité, ni contradiction, on peut librement exa» miner si les phénomènes la prouvent ou non; car dès lors » l'attraction n'est plus qu'une question de fait, & c'est » dans le systême de l'univers qu'il faut aller chercher si elle » est un principe qui ait effectivement lieu dans la nature. » Or certainement il n'y a point d'impossibilité métaphysi» que ni de contradiction dans la loi de l'attraction; c'est-à» dire, que rien ne démontre la proposition contradictoire: » *Les corps célestes ne s'attirent point.* Je me flatte qu'on ne » m'objectera pas que cette propriété dans les corps, de » peser les uns vers les autres, est moins concevable que » celles que tout le monde y reconnoît. La manière dont » les propriétés résident dans un sujet est toujours incon» cevable pour nous; on ne s'étonne point de voir un » corps en mouvement communiquer ce mouvement à » d'autres corps, l'habitude qu'on a de voir ce phéno» mène empêche qu'on n'en voie le merveilleux; mais » au fond la force impulsive est aussi peu concevable que » l'attractive. Qu'est-ce que cette force impulsive? com» ment réside-t-elle dans les corps? Qui eut pu deviner » qu'elle y réside, avant que d'avoir vu les corps se cho» quer?

L'attraction paroît une propriété de la matière.

» L'existence des autres propriétés dans les corps n'est » pas plus aisée à concevoir, & nous sommes par-tout » obligés de supposer des loix primitives, dont nous ne con» noissons ni la cause, ni l'origine; leur existence est la » seule chose qui soit du ressort de l'esprit humain, mais » sur-tout de la géométrie ».

3385. Supposons donc l'existence de l'attraction universelle, & cherchons les effets qui doivent en résulter;

(a) Discours sur les différentes figures des Astres, par M. *de Maupertuis*, 1732. *in*-8°.

leur accord avec les phénomènes observés & connus nous fera voir par-tout la certitude & l'évidence de cette loi.

L'attraction est proportionnelle à la masse.

Nous supposerons, comme on a coutume de le faire, que l'attraction est proportionnelle à la masse ou à la quantité de matière qui attire ; on ne peut pas le démontrer par les faits, car nous ne pouvons juger de la quantité de matière que par le poids ou l'attraction ; mais à moins qu'on ne pût démontrer le contraire, il est très-naturel de supposer que chaque particule de matière est douée de la même propriété ; c'est-à-dire, que l'attraction de deux particules sera double de l'effet d'une seule, & qu'en général l'attraction est proportionnelle à la matière qui attire.

La force avec laquelle une planète est attirée ne dépend point de la masse de cette planète attirée ; car si une seule particule de matière est attirée avec une force f, toutes les particules que vous placerez près d'elle seront attirées chacune avec la même force f ; il n'y a aucune raison pour que la seconde soit attirée moins que la première ; & la présence de la seconde ne change rien à la force qui agissoit sur la première ; donc la force attractive ne dépend que de la masse qui attire, & non pas de celle qui est attirée.

Expression des forces.

3386. Il y a dans la géométrie nouvelle des expressions abrégées, qu'un usage fréquent dispense les géométres d'expliquer, mais qui embarrassent néanmoins ceux qui entrent dans la carrière ; telle est l'expression qu'on emploie, en disant que $\frac{S}{r^2}$ est la force que le soleil, dont la masse est supposée S, exerce à la distance r sur une planète quelconque ; il s'agit d'une force attractive, & on la suppose égale à une masse S divisée par le carré d'une distance : or les forces, les masses & les distances sont des choses fort hétérogènes & de natures fort différentes ; on ne voit pas d'abord comment il peut y avoir égalité entre des choses si disparates.

Pour le concevoir, il faut se rappeller ce que avons dit

ſur le choix des unités (3354), on verra que cette expreſſion de forces eſt une proportion réduite en équation. On ne calcule l'effet d'une force qu'en la comparant avec une autre force; ainſi en prenant la terre pour terme de comparaiſon, la maſſe S du ſoleil étant ſuppoſée 307800 fois plus conſidérable que celle de la terre, & ſon rayon r 107 fois plus grand que le rayon de la terre, $\frac{S}{r^2}$ ſera $\left(\frac{307800}{(107)^2}\right) = 27$; cela veut dire que l'attraction du ſoleil ſur les corps ſolaires placés à ſa ſurface eſt 27 fois plus grande que celle de la terre ſur les corps terreſtres, & qu'au lieu de parcourir 15 pieds en une ſeconde, ils en parcourent 408; car la maſſe ſeule à diſtance égale feroit parcourir 4648000 pieds, mais à une diſtance 107 fois plus grande l'attraction agit 11400 fois moins (3396), donc le ſoleil fera parcourir vers ſa ſurface 408 pieds par ſeconde, au lieu de 15, & la force $\frac{S}{r^2}$ vaut 27 en ſuppoſant que celle de la terre eſt l'unité (3411).

Si l'on cherche les dérangemens que la force du ſoleil cauſe à la lune, c'eſt en examinant le rapport qu'il y a entre la force du ſoleil pour tirer la lune de ſon orbite, & la force de la terre pour l'y retenir, ou la quantité dont la force du ſoleil peut balancer ou contrarier celle-ci. En faiſant cette comparaiſon des forces, on prend pour unité la maſſe d'une planète & l'on exprime les autres maſſes en parties de cette unité; on prend auſſi une diſtance pour unité & l'on exprime toutes les autres diſtances en unités ou en fractions de cette première diſtance, c'eſt-à-dire, qu'on compare une fraction avec une autre (3354). Par exemple, on peut faire cette proportion, la force du ſoleil ſur la lune, que nous appellerons S, eſt à la force de la terre ſur la lune dans ſa moyenne diſtanée, en raiſon compoſée de la maſſe du ſoleil à la maſſe de la terre, & du carré de la diſtance moyenne de la lune à la terre, au carré de la diſtance moyenne du ſoleil à la lune, c'eſt-à-dire, comme la maſſe du ſoleil diviſée par le carré de ſa diſtance à la lune, ou par r^2, eſt à la maſſe de

Exemple pour la lune.

la terre divisée par le carré de sa distance moyenne à la lune. Prenons pour l'unité des masses, la masse de la terre; pour unité des distances, celle de la lune à la terre, & pour unité des forces celle que la terre exerce sur la lune dans ses moyennes distances. Alors la proportion précédente donnera pour la force du soleil sur la lune l'expression $\frac{S}{r^2}$.

3387. Lorsqu'il s'agit des troubles qu'une planète éprouve par l'attraction d'une autre, on emploie les mêmes expressions; par exemple, la masse du soleil qui est 1, retient la terre dans son orbite à une distance qui est 1. Jupiter trouble cette action avec une masse environ 1000 fois plus petite que celle du soleil (3405); ainsi sa masse ou sa force peut s'appeller $\frac{1}{1000}$; & comme il agit encore à une distance environ 5 fois plus grande que le soleil (1222), son action est 25 fois plus petite que celle du soleil, ainsi il faut encore rendre 25 fois plus petite la force $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire, qu'il faut écrire $F = \frac{1}{25000}$, pour avoir la force de Jupiter sur la terre; cette force n'est autre chose qu'une vingt-cinq millième partie de la force du soleil sur la terre; c'est la force dont nous chercherons l'effet dans la suite (3485 & suiv.), c'est-à-dire, que nous chercherons combien le mouvement de la terre doit être altéré par une force qui est $\frac{1}{25000}$ de celle qui retient la terre dans son orbite.

Autre exemple.

3388. On a vu ci-devant que dans toute force accélératrice les espaces parcourus sont comme les carrés des temps (3365); si la force est $\frac{S}{r^2}$, on aura $\frac{S\,dt^2}{r^2} = de$, c'est l'espace que cette force feroit parcourir dans un espace de temps infiniment petit dt; & il feroit aisé de comparer cet espace à celui de 15 pieds que la gravité naturelle fait parcourir à tous les corps terrestres.

DE LA FORCE CENTRALE DANS LES ORBITES CIRCULAIRES.

3389. Les orbites des planètes ſont des ellipſes (1220), mais les loix de l'attraction auroient lieu de la même manière dans des mouvemens circulaires, car les cercles ſont auſſi des ellipſes dont l'excentricité eſt infiniment petite ; & comme la conſidération des orbites circulaires eſt beaucoup plus facile, je commencerai par celles-là. Si une planète *P* (*fig.* 291), décrit autour du ſoleil *S* l'orbite circulaire *PEB*, ce n'eſt qu'à raiſon de la force ou de l'attraction du ſoleil qui l'oblige à ſe courber en *B*, au lieu de ſuivre la ligne droite *PA* (1231). C'eſt un principe reconnu même autrefois par Anaxagore (comme l'obſerve M. Du Tems) qu'un corps en mouvement continue de ſe mouvoir ſur une même ligne droite, s'il ne rencontre aucun obſtacle, & qu'un corps mû circulairement s'échappe par la tangente auſſi-tôt qu'il ceſſe d'être contraint & aſſujetti à tourner dans le cercle (1231) ; ainſi la planète décriroit *PA* ſi elle n'étoit forcée par l'attraction du centre *S* à deſcendre de *A* en *B* ; donc *AB* eſt l'effet ou la meſure de la force centripete, pendant le temps que meſure l'arc *PEB* ; cela eſt également vrai quelle que ſoit la nature de cet arc *PB*, circulaire, parabolique, &c. puiſque c'eſt la quantité dont la planète eſt detournée de la ligne droite, ou approchée du centre, & qu'elle ſeroit également rapprochée ſi la planète deſtituée de toute force de projection eût deſcendu directement vers le ſoleil : la force de projection perpendiculaire au rayon ſolaire ne peut empêcher que l'attraction du ſoleil n'ait tout ſon effet, ne lui étant pas oppoſée.

Fig. 291.

Effet de la force centrale.

3390. En effet, ſi la planète *P* n'avoit reçu aucun mouvement de projection de *P* en *A*, ou que ce mouvement qui tend à lui faire parcourir *PA* vînt à être détruit, la planète *P* livrée à la ſeule force centrale qui agit de *P* en *S* deſcendroit avec la même vîteſſe *PC* ; égale à *BG* ou à *BA* (3351) : car ſi l'on conçoit le côté *PB* de la

Fig. 291. courbe comme infiniment petit, il ſera la diagonale du parallélogramme *CA*; *BA* eſt l'eſpace que feroit décrire la force centrale ſi elle agiſſoit ſeule, donc le ſinus verſe *PC* de l'arc *PEB* décrit en une ſeconde de temps exprime la force centrale, dont il eſt l'effet. Le ſinus verſe eſt comme le carré de l'arc *PB* (3353); donc la force centrale eſt comme le carré de la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que pour retenir une planète dans la même orbite, ſi la vîteſſe doubloit il faudroit une force quadruple.

Effet de la force centrifuge.

3391. La quantité *BA* eſt auſſi l'effet de la force centrifuge, c'eſt-à-dire, la force par laquelle les corps qui tournent autour d'un centre tendent à s'en écarter (1231); puiſque c'eſt l'eſpace que le corps parcourroit en s'éloignant du centre *S* s'il étoit libre : or $BA = PC, = \frac{CB^2}{2CS} = \frac{BP^2}{2PS}$ (3353), donc le mouvement circulaire produit une force centrifuge qui eſt égale au carré de la vîteſſe, diviſé par le diamètre du cercle, la force de projection étant priſe pour unité; ainſi la force centrifuge, auſſi bien que la force centripete, eſt comme le carré de la vîteſſe.

Attention qu'on doit avoir.

3392. Dans le calcul différentiel on regarde les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés, & l'on trouve la quantité *BA* double de ce que nous venons de trouver en conſidérant le cercle comme une courbe rigoureuſe; car alors la force centrifuge eſt $\frac{PB^2}{PS}$ (3451); quoique cette expreſſion ſoit double de la précédente, elle donnera le même réſultat, ſi l'on a ſoin de ſuivre la même règle dans les expreſſions de toutes les forces que l'on comparera l'une à l'autre; mais il faut prendre garde à ne pas ſuppoſer tantôt une courbe rigoureuſe & tantôt un polygone, comme l'obſerve M. d'Alembert (*Traité de Dynamique* 1743, *pag*. 21); Newton s'y trompa dans la première édition de ſes principes (*Œuvres de* J. Bernoulli, tom. 1, *pag*. 505. Hiſt. de l'acad. 1722), & j'ai vu d'autres géomètres s'y tromper également.

Force des corps terreſtres.

3393. On emploie pour exprimer la vîteſſe d'une planète un arc infiniment petit, parce que c'eſt le ſeul qui ſoit

foit parcouru uniformément, & que l'uniformité eft nécef- *Fig.* 291.
faire pour la mefure du mouvement. Or un arc infiniment petit ne fe courbe que d'un infin. petit du fecond ordre *AB* ou *BG*, ainfi la force centrale ne peut être exprimée que par un infin. petit du fecond ordre, ce qui prouve la néceffité des fecondes différences (3294).

Force des corps terreftres.

3394. Si l'on examine les forces centrifuges des différentes parties d'une fphère qui tourne fur fon axe, on verra qu'elles font proportionnelles aux rayons de chaque parallèle ; car la vîteffe de chaque partie eft alors comme le rayon du cercle qu'elle décrit, c'eft-à-dire, que *PB* eft proportionnel à *PS*; donc la force centrifuge eft proportionnelle à $\frac{PS^2}{2PS}$, c'eft-à-dire, à *PS*, qui devient l'ordonnée parallèle au grand axe de l'ellipfe du méridien, quand on fuppofe la terre aplatie.

Force centrifuge fous l'équateur.

3395. La force centrifuge fous l'équateur de la terre eft $\frac{1}{287}$ de la pefanteur qu'on y éprouve ; car cette pefanteur fait parcourir en une feconde de temps moyen 15,051 pieds (3372) ; la force centrifuge eft mefurée par le petit écart de la tangente qui pour un arc de 15″, eft fuivant les tables (3904) = 0,0000000026442 49 ; mais qu'il faut augmenter dans le rapport du carré des heures folaires moyennes & des heures du premier mobile, & multiplier par le rayon de la terre (2690) réduit en lignes ; on aura 7 lignes 5581 qui font contenus 286,77 fois dans les 15 pieds, & environ 288 fois dans l'efpace total que les corps graves décriroient fous l'équateur, fans la force centrifuge. Newton trouvoit la force centrifuge fous l'équateur, 289 fois plus petite que la gravité totale fous la latitude de Paris (III. 79). Pour faire ce calcul on ajoute (3372) le log. de la longueur du pendule en lignes, avec le double de celui de la circonférence ou de 0,49715 ; on ajoute le logarithme du finus verfe d'un arc de 15″ qui eft 1,42230 avec le double de la différence des logarithmes de 24^h & de $23^h\ 56'\ 4''\ 1$, & celui du rayon de la terre en lignes 9,45373 ; on retranche la dernière fomme de la première, & l'on a enfin le logarithme de 286,77.

Ainſi un corps qui ſe trouveroit dégagé de la force de peſanteur, s'échapperoit à l'inſtant par la tangente, & s'éloigneroit de 7 lignes de la ſurface de la terre dans la première ſeconde; & cette tendance à s'échapper, qui vient de la rotation de la terre diminue de $\frac{1}{288}$ la peſanteur qui auroit lieu ſous l'équateur. De là il ſuit que ſi les corps graves parcourent en une ſeconde 15,0515 pieds par ſeconde, ils en parcourroient ſans le mouvement de rotation 15, 104.

Quand on parvient à d'autres latitudes, cette force centrifuge diminue dans le même rapport que la grandeur des parallèles diminue, c'eſt-à-dire, comme le coſinus de la latitude, quand on la conſidère dans le plan de chaque parallèle (3394); mais elle diminue comme le carré du coſinus de la latitude, quand on la conſidère dans la direction du centre de la terre; ſoit *TM* (*fig.* 320) l'axe de la terre, *BG* l'effet de la force centrifuge ſous le parallèle *BC*; cette force ſuivant *BG* décompoſée dans la direction *BT* devient plus petite encore dans le rapport du ſinus de *BN* au ſinus total, ou de *BC* à *BT*, donc elle eſt à la force qui a lieu ſous l'équateur, comme BC^2 eſt à BT^2.

Fig. 320.

Correction du pendule à ſecondes.

Cette force centrifuge diminue celle de la peſanteur, & par conſéquent rend la longueur du pendule à ſecondes plus petite qu'elle ne ſeroit ſi la terre étoit immobile; par exemple, il faut ajouter une ligne $\frac{53}{100}$ à la longueur du pendule à ſecondes, obſervée ſous l'équateur, pour avoir celle qui s'obſerveroit ſi la terre étoit immobile. Sous une latitude de 60° où le parallèle n'eſt que la moitié de l'équateur, la quantité qu'il faut ajouter au pendule obſervé n'eſt que le quart de $1^{lig.}$ 53 ou 0^{lig}, 38, & ſi l'on multiplie $1^{lig.}$ 53 par le carré du coſinus de la latitude, on aura la correction pour toute autre latitude. (M. Bouguer, *pag.* 346 : *Expoſ. du Calcul aſtron. pag.* 203).

Loi de l'Attraction.

3396. *La force centrale qui retient les planètes dans leurs orbites eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance.*

Démonstration. La première démonſtration que Newton apperçut de cette fameuſe loi (3381), eſt celle qui

se tire de la loi de Képler (1224) ; le Docteur Hook avoit compris que la pesanteur devoit diminuer à mesure qu'on s'éloignoit du centre des graves ; il avoit proposé aux Géomètres de trouver suivant quelle proportion cette force devoit diminuer (3380). Newton avoit eu la même idée, au rapport de Pemberton. Voici la manière dont je crois qu'il dut s'y prendre pour chercher cette proportion, par le moyen de la loi de Képler, & reconnoître, par exemple, que la force du soleil pour retenir Saturne dans son orbite est cent fois plus petite que la force avec laquelle le soleil retient la terre dans la sienne, la distance de Saturne étant dix fois plus grande que la distance de la terre. J'ai fait voir dans un assez grand détail comment Képler découvrit cette loi dont nous allons partir (1224) ; ainsi je crois qu'il ne manquera rien à l'Histoire de cette grande & importante découverte de l'attraction.

Soient deux orbites circulaires & concentriques *PB*, *TV*, (*fig.* 291), dans lesquelles tournent deux planètes, *Fig.* 291. dont les temps périodiques sont t & 1, par exemple, Saturne & la terre ; supposons les arcs *PB* & *TV* infiniment petits & semblables, c'est-à-dire, compris entre les rayons *STP*, *SVB* ; ces arcs *PB* & *TV* seroient parcourus en temps égaux, si les révolutions des deux planètes étoient égales ; mais la planète supérieure *P* ayant une révolution plus lente que la terre *T*, ne décrira qu'un arc *PE*, tandis que la terre décrira l'arc *TV* ; alors *PD* sera l'effet de la force centrale que le soleil exerce sur cette planète, tandis que *TR* est l'effet de la force centrale qu'il exerce sur la terre *T* (3390) ; & nous n'avons à chercher que le rapport de *PD* à *TR*. Suivant la proposition démontrée (3353), $PD : PC :: PE^2 : PB^2$; mais la planète supérieure auroit parcouru *PB*, si la durée de sa révolution que j'appelle t, étoit égale à la durée 1 de la révolution de la terre ; donc $PE : PB :: 1 : t$: ainsi $PD : PC :: 1 : t^2$; donc $PD = \frac{PC}{t^2}$. Or $PC : TR :: PS : TS :: r : 1$, puisque les arcs *PB* & *TV* sont semblables, donc $PC = r.\,TR$, & puisque $PD = \frac{PC}{t^2}$,

Fig. 251. il eſt auſſi $= \frac{rTR}{t^2}$, donc $\frac{PD}{TR} = \frac{r}{t^2}$. Mais ſuivant la loi deKépler (1224) $t^2 : 1 :: r^3 : 1$; ou $r^3 = t^2$, donc $\frac{PD}{TR} \left(= \frac{r}{t^2}\right)$ ſera égal à $\frac{r}{r^3}$ ou $\frac{1}{r^2}$. Donc $PD : TR :: 1 : r^2$; c'eſt-à-dire, que l'effet de la force centrale eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance.

La Lune eſt retenue par la même gravité.

3397. Il étoit donc facile à Newton de reconnoître cette loi dans l'attraction, par le moyen de la loi de Képler; quand il eut trouvé ce rapport dans l'attraction du ſoleil ſur les planètes, il le vérifia bientôt ſur la lune (3381), & il reconnut que la force centrale néceſſaire pour retenir la lune dans ſon orbite, n'eſt autre choſe que la gravité naturelle des corps terreſtres, diminuée en raiſon inverſe du carré de la diſtance de la lune à la terre. En effet, les corps graves parcourent 15 pieds en une ſeconde de temps (3372), la lune décrit un arc de ſon orbite qui eſt de 0″5490163, ou environ 33‴, & dont le ſinus verſe eſt à peu-près $\frac{1}{240}$ de pied (3316); donc la lune eſt retenue vers la terre, ou rapprochée de la terre 36 0 fois moins que les corps terreſtres; or elle eſt environ 60 fois plus loin, donc la force qui agit ſur la lune diminue comme le carré de la diſtance.

3398. On s'eſt enſuite ſervi de ce principe reconnu vrai d'ailleurs pour trouver la diſtance de la lune, & ſa parallaxe, avant qu'elle eût été obſervée avec exactitude. Soit e le demi-diamètre de l'équateur terreſtre réduit en pieds, x le rapport entre ce rayon & la diſtance moyenne de la lune, égal environ à 60, enſorte que la diſtance de la lune ſoit e ; f la force de la terre, exprimée par les 15 pieds qu'elle fait parcourir en une ſeconde, à ſa ſurface ; u le ſinus verſe de l'arc décrit par la ☾ en une ſeconde de temps où la quantité dont la lune deſcend & ſe rapproche de nous en une ſeconde; cet eſpace eſt exprimé en pieds par uex. A cauſe du principe des forces centrales, le même eſpace eſt auſſi égal à $\frac{f}{x^2}$ (3397), donc égalant ces deux quantités on a $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{ue}{f}}$, c'eſt

le ſinus de la parallaxe horizontale de la lune ſous l'équateur. Pour le réduire en nombres, je prens le logar. du ſinus verſe de l'arc décrit par la lune en une ſeconde de temps (3316), j'y ajoute celui du rayon de l'équateur (2690) réduit en pieds, & j'ai le log. de *eu* = 5,8434490; j'en ôte celui de 15 p. 0515 qui eſt 1,1775796; le tiers du reſte eſt 8,2219565, ſinus de 57′ 18″ 3; c'eſt la parallaxe ſous l'équateur, qui ne ſurpaſſe que de 6 ou 7″; celle qui réſulte des meilleures obſervations (1714), & qui prouve par-là même, la loi de l'attraction. On néglige ici l'effet de l'attraction de la lune ſur la terre; mais en l'y faiſant entrer M. Murdoch trouvoit 56′ 44″. (*Philoſ. tranſ.* 1764, *pag.* 30). Nous donnerons bientôt une méthode plus rigoureuſe pour parvenir à ces réſultats (3483).

3399. Ainſi la loi de l'attraction, ou ſes changemens en raiſon inverſe du carré de la diſtance furent prouvés de deux manières très-différentes & très-bien d'accord entr'elles. Elle ſe vérifioit également dans les ſatellites de Jupiter (2900); ceux de Saturne vinrent enſuite à l'appui de cette loi (2997). Un autre conſidération différente dut encore apprendre à Newton qu'il falloit que l'attraction fût en raiſon inverſe du carré de la diſtance: toutes les qualités ſenſibles, comme les émanations, la lumière, diminuent de denſité & de force en raiſon inverſe du carré de la diſtance. Enfin la ſuite de ſes calculs lui en donna de nouvelles preuves.

3400. Si l'attraction étoit en raiſon inverſe du cube de la diſtance, au lieu d'être en raiſon inverſe du carré, les planètes ne pourroient pas décrire des ellipſes, car auſſi-tôt qu'elles auroient commencé à s'approcher du centre des forces, elles s'en approcheroient toujours, ſans pouvoir jamais s'en éloigner (Voy. Mac-laurin, *Expoſ. des découvertes de* Newton, *pag.* 332. *Traité des fluxions I. pag.* 308, *II. pag.* 276). Si l'attraction étoit en raiſon inverſe de la diſtance, les planètes au lieu d'arriver de l'apſide ſupérieure à l'apſide inférieure dans l'eſpace d'une demi-révolution, ou après avoir décrit 180°, y arrive-

Autres hypothèſes d'attraction.

roient après avoir décrit $\frac{180}{\sqrt{2}}$, ou un peu plus de 127°, comme Newton l'a démontré (*Princ. math. L. 1. Propr.* 45). Dans ce cas, on n'auroit jamais retrouvé l'aphélie de Mars au même point du ciel, mais à des points différens de plus de 50° chaque année, ce qui prouvoit clairement à Newton que l'attraction planétaire étoit en raison inverse du carré de la distance, & non point dans aucune autre loi.

Attraction des corps terrestres.

3401. Il est vrai qu'on a soupçonné dans les corps terrestres une attraction en raison inverse du cube des distances, mais cela n'est point de mon sujet; on peut voir ce qu'ont dit là-dessus M. de Maupertuis (*Mém. ac.* 1732, *pag.* 362). M. Keill dans un petit traité composé de 30 propositions, qui se trouve à la fin de ses ouvrages ; M. d'Alembert dans l'Encyclopédie au mot attraction, *tom.* 1, *pag.* 850. Le P. Boscovich dans l'ouvrage qui a pour titre, *Philosophiæ naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium. Viennæ*, 1758 *in*-4°. & *Venetiæ*, 1764. Ce dernier ouvrage contient des idées très-ingénieuses & très-singulières; l'attraction, la répulsion, la cohésion, l'élasticité y sont déduites d'une seule loi; je voudrois qu'il me fût permis de m'étendre sur ce sujet; mais il faut consulter l'ouvrage même de cet illustre Auteur.

Attraction des cubes capillaires.

3402. L'élévation des fluides dans les tubes capillaires est encore une suite nécessaire de l'attraction des corps terrestres; dans un mémoire sur les tubes capillaires inséré dans le Journal des Savans, du mois d'Octobre 1768, & imprimé séparément (chez Desaint, 1770); j'ai fait voir que l'attraction du tube capillaire qui a plus de densité que l'eau, en souleve les parties placées au dessous du tube, & celles qui sont à l'entrée du tube, que la colonne d'eau renfermée dans le tube considérée au niveau de l'eau du vase est attirée encore de bas en haut par la partie extérieure du tube, parce que sa partie inférieure occupe la place d'une certaine quantité d'eau qui attiroit déja cette colonne de haut en bas, & qu'elle

ne détruit pas l'attraction de la partie supérieure, ensorte qu'il y a trois causes évidentes de l'ascension des fluides dans les tubes capillaires.; ainsi quoi qu'en dise le P. Gerdil, (*Dissertation sur l'incompatibilité de l'attraction*, à Paris, 1754, chez Desaint) ce phénomène est une preuve de l'attraction universelle. V. Mussenbroëk, cours de physique, tom. II. *pag.* I. édition de 1769. Le Dictionnaire de Chymie de M. Macquer, au mot pesanteur & l'essai de M. le Sage, (3384).

3403. La masse des planètes, c'est-à-dire, leur quantité de matière, ou leur force attractive, se déduit du principe de l'attraction, & l'on en conclud aisément leur densité intérieure, ou leur pesanteur spécifique. Cette découverte qui paroît d'abord bien singulière, est cependant une suite naturelle de la loi d'attraction, puisque la force attractive est un indice certain de la quantité de matière. Prenons pour terme de comparaison la masse ou la force attractive de la terre dont les effets nous sont connus & familiers, & cherchons quelle est la masse de Jupiter par rapport à celle de la terre. Le premier satellite de Jupiter fait sa révolution à une distance de Jupiter qui est la même que celle de la lune à la terre (du moins elle n'est que d'un douzième plus petite). Si ce satellite tournoit aussi autour de Jupiter dans le même espace de temps que la lune tourne autour de la terre, il s'ensuivroit évidemment que la force de Jupiter pour retenir ce satellite dans son orbite, seroit égale à celle de la terre pour retenir la lune, & que la quantité de matière dans Jupiter, ou sa masse, seroit la même que celle de la terre; dans ce cas-là il faudroit que la densité de la terre fut 1246 fois plus grande que celle de Jupiter, car la grosseur (ou le volume) de Jupiter contient 1246 fois la grosseur de la terre (1398); or si le poids est le même, la densité est d'autant plus grande que le volume est plus petit. Mais si le satellite tourne 16 fois plus vîte que la lune, il faut pour le retenir 256 fois plus de force (16 fois 16 = 256), car la force centrale est comme le carré de la vîtesse (3390), une vîtesse double exige & suppose une

Méthode pour trouver les densités.

force centrale quadruple à diſtances égales ; & la vîteſſe du ſatellite 16 fois plus grande que celle de la lune, quoique dans une orbite égale, ſuppoſe dans Jupiter une énergie ou une maſſe 256 fois plus grande que celle de la terre; dans ce cas l'on trouve un volume 1200 fois plus grand & une peſanteur ſeulement 256 fois plus grande que celle de la terre, donc le volume de Jupiter conſidèré par rapport à celui de la terre eſt quatre fois plus grand que la quantité de matière réelle & effective, par rapport à celle de la terre; donc la denſité de la terre eſt quatre fois plus grande que celle de Jupiter.

3404. Tel eſt l'eſprit de la méthode par laquelle Newton a calculé les maſſes & les denſités des planètes (1398) : plus un ſatellite eſt éloigné de ſa planète, & plus il tourne rapidement, plus auſſi il indique de force & de matière dans la planète principale qui le retient; je vais y appliquer le calcul rigoureux, & je prendrai le ſoleil pour terme de comparaiſon, parce que nous en aurons beſoin pour le calcul des attractions céleſtes.

Soit la diſtance de Jupiter au ſoleil, priſe pour unité, $=1$.
La durée de la révolution de Jupiter, $=1$.
La force du ſoleil ſur Jupiter, $=1$.
La diſtance d'un de ſes ſatellites, $=r$.
La durée de la révolution du même ſatellite, $=t$.

La force actuelle de Jupiter ſur ſon ſatellite ſera $\frac{r}{t^2}$, comparée à celle du ſoleil ſur Jupiter (3396). Si ce ſatellite étoit auſſi éloigné de Jupiter que Jupiter l'eſt du Soleil, il faudroit que la force dans ce cas-là fût à la force actuelle qui eſt $=\frac{r}{t^2}$, comme $r^2 : 1$, c'eſt-à-dire, en raiſon inverſe du carré de la diſtance ; donc alors à pareille diſtance, la force feroit $\frac{r^3}{t^2}$; telle eſt donc en effet la force abſolue de Jupiter (par rapport à celle du ſoleil, conſidérée à pareille diſtance), c'eſt-à-dire, ſa maſſe totale ou la quantité de matière qu'il contient; donc en général pour connoître la maſſe d'une planète, en prenant celle du ſoleil pour unité, il ſuffit de diviſer le cube de la diſtance d'un

Règle pour trouver la maſſe.

d'un ſatellite de cette planète par le carré du temps qu'il emploie à tourner, pourvû que l'on ait pris l'unité des diſtances & des temps, dans l'une des planètes qui tournent autour du ſoleil.

3405. EXEMPLE. La révolution de Vénus autour du ſoleil, qui eſt de 5393^h, eſt 13 fois plus longue que celle du 4[e] ſatellite de Jupiter qui eſt $400^h \frac{1}{2}$ (2972), donc $t = 0,0742716$; la diſtance du 4[e] ſatellite à Jupiter vue du ſoleil, eſt de 8′ 16″, d'où il eſt aiſé de conclure la diſtance du ſatellite à Jupiter, celle de Vénus au Soleil étant priſe pour unité, ou la valeur de $r = 0,017290$ (art. 2885). Si l'on prend le cube de r & le carré de Maſſe de Jupiter.
t, qu'on diviſe r^3 par t^2, on trouve 0,0009370, ou $\frac{1}{1067}$, qui eſt la maſſe de Jupiter, celle du ſoleil étant = 1.

Si l'on vouloit trouver de même le rapport des maſſes du ſoleil & de la terre, on auroit $r = \frac{9''}{57'\ 3''}$; c'eſt le rapport des parallaxes, ou celui des diſtances, $t = \frac{27j}{365} = \frac{129597736''}{1732559381''}$, c'eſt le rapport des révolutions; donc $\frac{r^3}{t^2} = \frac{1}{307831}$; c'eſt la maſſe de la terre, celle du ſoleil étant priſe pour unité; comme je l'ai rapportée dans la table de l'article 1398; elle diffère de celle de Newton, qui eſt $\frac{1}{169282}$; mais les élémens que je viens d'employer ſont plus exacts que les ſiens.

3406. La maſſe de Saturne diffère encore ſenſiblement; car Newton la ſuppoſe $= \frac{1}{3021}$ de celle du ſoleil, & je trouve environ $\frac{1}{3927}$ en y faiſant entrer les cinq ſatellites de Saturne, qui donnent des réſultats aſſez différens entre eux, à cauſe du peu de préciſion qu'il y a dans les obſervations des ſatellites de Saturne.

3407. Il ſuit des calculs précédens que la maſſe du ſoleil diviſée par le cube de ſa diſtance à la terre, dont nous ferons uſage pour les inégalités de la lune (3471, 3525), eſt égale à t^2, car la maſſe du ſoleil (en prenant pour unité celle de la terre) eſt $\frac{t^2}{r^3}$; mais ſi la diſtance de la lune eſt priſe pour unité, celle du ſoleil eſt

$\frac{1}{r}$, dont le cube eſt $\frac{1}{r^3}$, & diviſant la maſſe $\frac{t^2}{r^3}$ par le cube de cette quantité, l'on a t^2, comme je l'ai ſuppoſé.

3408. Cette force ou cette maſſe d'une planète étant diviſée par le volume, exprimé de même en prenant pour unité le volume du ſoleil, donne la denſité de la planète cherchée par rapport à la denſité du ſoleil; c'eſt ainſi que Newton trouva que la terre étoit environ quatre fois plus denſe que le ſoleil, quatre fois & un quart plus denſe que Jupiter, & ſix fois plus denſe que Saturne. (Newton, *L. III. prop.* 8. ou Mac-laurin, *Expoſ. des déc.* de Newton, *pag.* 309). Ces denſités ſont calculées plus exactement dans la table de l'article 1398. Nous pouvons comparer ces denſités avec des objets familiers : on ſait que l'antimoine eſt quatre fois plus denſe que l'eau, & ſix fois plus denſe que le bois de prunier; ainſi en ſuppoſant que les ſubſtances du ſoleil & de Jupiter aient la denſité de l'eau, la terre aura celle de l'antimoine, & Saturne aura la légéreté du bois; il me paroît même que ces ſubſtances répondent aſſez bien à ce que j'ai voulu exprimer par leur moyen. On trouveroit à peu-près le même rapport entre l'acier, l'ivoire & le bois le plus peſant, comme l'ébène; il ſuffira de conſulter la table des peſanteurs ſpécifiques, donnée par M. l'Abbé Nollet dans ſes Leçons de Phyſique, ou celle de Muſſenbroëk.

Denſités de trois planètes.

3409. Képler avoit préſumé que les denſités des planètes les plus voiſines du ſoleil devoient être les plus conſidérables; mais il ſe trompoit ſur celle du ſoleil : *Conſentaneum eſt ut quodque corpus ut ſoli vicinius, ita & denſius eſſe : nam & ſol ipſe eſt omnium corporum totius mundi denſiſſimum; cujus rei teſtimonium perhibet immenſa multiplex vis quæ non poteſt eſſe ſine ſubjecto proportionato; & loca ipſa centro vicina ideam quandam anguſtiæ gerunt, qualis eſt in condenſatione materiæ multæ in locum anguſtum.* (Képler, *Epitome*, *pag.* 487).

Denſités de Vénus, de Mars & de Mercure.

3410. Les denſités de Vénus, de Mercure & de Mars ne peuvent ſe trouver par la méthode précédente, puiſque ces planètes n'ont point de ſatellites, qui puiſſent nous

indiquer l'intenſité de leur attraction ; mais voyant dans les trois planètes dont les denſités ſont connues, une augmentation de denſité quand on approche du ſoleil, il eſt très probable que cet accroiſſement a lieu également pour les trois autres planètes : en eſſayant de reconnoître une loi dans ces augmentations, on voit que les denſités ſont preſque proportionnelles aux racines des moyens mouvemens ; par exemple, le mouvement de la terre eſt environ 11, 86, celui de Jupiter étant 1, la racine eſt $3\frac{1}{2}$, & la denſité de la terre eſt en effet 3 fois $\frac{1}{2}$ celle de Jupiter, ou environ, (1398). On peut donc ſuppoſer la même proportion dans les autres planètes ; c'eſt ainſi que j'ai calculé les denſités rapportées dans la table de l'art. 1398, où l'on voit que celle de Vénus eſt un peu plus grande que celle de la terre, ainſi que je l'ai ſuppoſé en parlant de la maſſe de Vénus (2158).

3411. Connoiſſant la maſſe & le diamètre d'une planète, il aiſé de trouver l'effet de la peſanteur à ſa ſurface, c'eſt-à-dire, la force accélératrice des graves dans la planète, car cette force eſt en raiſon de la maſſe & en raiſon inverſe du carré du rayon. C'eſt ainſi que j'ai calculé la table (1398, *T. II. pag.* 158), qui contient la vîteſſe des graves dans chaque planète en pieds & centièmes de pieds ; ce n'eſt autre choſe que la vîteſſe des corps terreſtres ſous l'équateur 15 pieds, 104 (3395) multipliée par la maſſe de chaque planète, & diviſée par le carré du rayon, en prenant pour unités la maſſe & le rayon de la terre. Par exemple, la maſſe de Jupiter eſt 288 fois plus conſidérable que celle de la terre (1398), ainſi les corps graves y ſeroient attirés 288 fois plus qu'ils ne ſont ſur la terre, & décriroient 288 fois 15 pieds, ſi le rayon de Jupiter n'étoit environ 11 fois plus grand que celui de la terre, & le carré de la diſtance du centre à la ſurface 116 fois plus grand, ce qui rend la peſanſanteur 116 fois moindre ; or 288 diminué 116 fois, ou diviſé par 116, donne un peu moins de $2\frac{1}{2}$, ainſi la peſanteur des corps ſitués à ſa ſurface eſt preſque deux fois & demi celle des nôtres : au lieu de décrire 15 pieds par

ſeconde, ils en décrivent 37. Suivant Newton la peſanteur n'étoit guères que double dans Jupiter, mais cela vient de ce qu'il faiſoit la parallaxe du ſoleil trop grande, il rendoit le diamètre de Jupiter ſeulement ſeptuple de celci de la terre, tandis que ſuivant mes calculs il faut $10\frac{3}{4}$ diamètres terreſtres pour faire le diamètre de Jupiter. Je fais abſtraction de la force centrifuge (3395) produite par la rotation de Jupiter & des autres planètes.

3412. La maſſe de la lune, & par conſéquent ſa denſité ſont difficiles à déterminer exactement, parce qu'elles ſe manifeſtent par des phénomènes que nous ne pouvons meſurer avec aſſez d exactitude; les hauteurs des marées, & la quantité de la nutation de l'axe de la terre. Si les hauteurs des marées dans les ſyzygies s'étant trouvées de 7 pieds, ne ſont que de 3 pieds dans les quadratures, en ſuppoſant des circonſtances pareilles (3595), c'eſt-à-dire, ſi les grandes marées ſont aux petites comme $3\frac{1}{2}$ eſt à $1\frac{1}{2}$, la ſomme des forces de la lune & du ſoleil doit être à leur différence, comme $3\frac{1}{2}$ eſt à $1\frac{1}{2}$; ces forces feront donc entre elles comme 5 eſt à 2 (car la ſomme de 5 & de 2 eſt à la différence, comme $3\frac{1}{2}$ eſt à $1\frac{1}{2}$); c'eſt le rapport auquel s'en tient M. Bernoulli (3595).

3413. Suppoſons donc la force du ſoleil 1, celle de la lune $2\frac{1}{2}$; pour avoir la maſſe de la lune il ſuffit de ſavoir quelle eſt ſa force, en la ſuppoſant à la diſtance du ſoleil. La force diminue en raiſon inverſe du cube de la diſtance, quand on la décompoſe ſur une direction différente de ſa direction primitive (3444, 3468); il faut donc multiplier la force actuelle de la lune par le cube de $\frac{9''}{57'\ 3''}$, & l'on aura la maſſe de la lune, celle du ſoleil étant priſe pour unité; mais la maſſe de la terre eſt ſeulement $\frac{1}{3\ 7831}$ de celle du ſoleil (3405); il faut donc encore diviſer la maſſe trouvée par cette fraction, & l'on
Maſſe de la lune. aura $\frac{1}{71}$ qui eſt la maſſe de la lune, celle de la terre étant priſe pour unité, à peu-près comme je l'ai ſuppoſée (1717). On verra ci-après que la nutation même paroît donner à peu-près le même réſultat (3576).

3414. La masse de la terre (3405) est $\left(\frac{9''}{57'}\right)^3 \cdot \left(\frac{365}{27}\right)^2$, celle du soleil étant l'unité ; la masse de la lune est $\left(\frac{9''}{57'}\right)^3 \cdot 2\frac{1}{2}$, elles sont donc comme $\frac{2}{5}\left(\frac{365}{27}\right)^2 : 1$; donc le carré de la durée de l'année 365j, divisé par celui de la durée du mois 27j, & multiplié par $\frac{2}{5}$ qui est la force de la lune, donnera le nombre 71,49 qui exprime combien de fois la terre contient la lune ; ainsi la masse de la lune sera 0,013991.

La masse de la lune $\frac{1}{71}$, ou 0,013991, étant divisée par son volume qui est $\frac{1}{49}$, ou 0,0644 (1717), donne sa densité 0,68706 ; c'est-à-dire, que la densité de la lune est seulement $\frac{7}{10}$ de celle de la terre, comme je l'ai mis dans la table des densités (1398). M. Simpson dit que la densité de la lune est à celle du soleil, comme $2\frac{1}{2}$ est à 1, mais c'est en supposant que leurs diamètres apparens sont égaux, ce qui n'est pas exact. Densité de la lune.

3415. M. d'Alembert se sert du phénomène de la nutation (2860, 3575), pour déterminer la masse de la lune, (*Précession des Equinoxes, pag.* 62), & supposant la nutation de 9″ exactement, il trouve la force de la lune $\frac{7}{3}$ au lieu de $\frac{5}{2}$, ce qui rendroit la masse de la lune seulement $\frac{1}{80}$ de celle de la terre ; mais M. d'Alembert observe avec raison, qu'une seule seconde d'erreur dans la nutation donneroit pour la masse de la lune un résultat très-différent, & nous verrons ci-après qu'on peut supposer la nutation de $9''\frac{1}{2}$, & la force de la lune $= 2\frac{1}{2}$, sans faire violence aux observations (3575).

3416. La masse du soleil, ou la force attractive qu'il exerce sur la terre, peut se comparer avec une autre force qui a lieu dans les corps terrestres, je veux dire la force centrifuge d'un corps placé sous l'équateur à la surface de la terre, & qui tourne avec la terre en 24 heures (3395). Cette force par laquelle un corps tend à s'éloigner de la terre, & celle qu'a le soleil pour retenir la terre dans son orbite, ou du moins les effets de ces forces, sont les petits écarts des tangentes de la circonférence de la terre

& de l'orbite terrestre, qui correspondent à un même intervalle de temps (3389, 3391). Soit TV (Fig. 291), la circonférence de l'équateur terrestre, PEB un cercle égal à l'orbite de la terre, l'arc PE étant supposé décrit dans le même temps que l'arc TV; soit $T = a$, $SP = r$, t la durée de la rotation qui est de 24 heures, T la durée de la révolution qui est de 365 jours, l'on aura (3396) $TR : PD : \frac{a}{t^2} : \frac{r}{T^2}$, donc $PD = TR . \frac{rt^2}{aT^2}$; c'est la force centrale que la terre éprouve par l'action du soleil; mais si l'orbite PB de la terre devenoit aussi petite que le cercle TV, la force du soleil deviendroit plus grande en raison inverse du carré de la distance, donc elle seroit alors $= TR . \frac{r^3 t^2}{a^3 T^2}$, c'est cette force qu'il faut comparer avec la force centrifuge, pour avoir le rapport de la masse du soleil avec la force centrifuge; car il faut supposer que l'une & l'autre agissent à pareilles distances, ou sur des cercles égaux, pour comparer les espaces qu'elles font parcourir, toutes choses égales; c'est-à-dire, pour comparer leur énergie; ainsi l'on trouve la masse du soleil en multipliant TR, qui est l'effet de la force centrifuge sur la terre, par $\frac{r^3 t^2}{a^3 T^2}$; & si l'on appelle $\mathfrak{C}$ cette force centrifuge, on pourra appeller la masse du soleil $\frac{\mathfrak{C} r^3 tt}{a^3 T^2}$. Nous en ferons usage pour la précession des équinoxes (3531).

Autre expression de la masse du soleil.

3417. La masse du soleil entre aussi dans l'expression du temps qu'une planète emploie à décrire un arc quelconque de son orbite. Supposons cet arc z exprimé en parties de la circonférence, le carré du temps qui répond à cet arc, est d'autant plus grand que le cube de la distance est plus grand, & que la masse attractive est plus petite; car si la masse attractive doubloit, son effet PC doubleroit, & le carré de la vîtesse PB augmenteroit en même proportion (3391); ainsi la masse $S = \frac{1}{t^2}$ ou $t = \frac{1}{\sqrt{S}}$; mais puisque les carrés des temps sont comme les cubes des distances $t^2 = r^3$ ou $t = r^{\frac{3}{2}}$, donc $t = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S}}$; de plus

Elle entre dans l'expression du temps.

le temps eſt proportionnel à l'eſpace z, toutes choſes égales; donc enfin le temps qui répond à un arc z eſt $\frac{r^{\frac{3}{2}}z}{\sqrt{S}}$; S doit être plus exactement la ſomme des maſſes du ſoleil & de la planète attirée (3435). M. Clairaut a fait uſage de cette expreſſion, dans la *Théorie de la Lune*. *Fig.* 291.

3418. *LA VITESSE de projection, telle que* PA, *néceſſaire pour décrire un cercle* PB, *eſt en raiſon inverſe de la racine du rayon* SP. De la vîteſſe des planètes à différentes diſtances.

DÉMONSTRATION. Suppoſons que deux planètes P & T décrivent autour du ſoleil S les cercles PB, TV, & que SP ſoit quadruple de ST, je dis que la vîteſſe PE ſera la moitié de la vîteſſe TV. En effet PC ſera quadruple de TR, parce que les figures PBC, TVR ſont comme les rayons; mais la gravité en P étant 16 fois moindre qu'en T, il faut prendre PD 16 fois moindre que TR, ou 64 fois moindre que PC, pour avoir l'eſpace PE que la planète P pourra décrire, étant retenue par la force centrale du ſoleil; alors PE ſera un huitième de PB, puiſque les ſinus verſes ſont comme les carrés des arcs (3353); donc PE ſera la moitié de TV, dans un même eſpace de temps; c'eſt-à-dire, que la vîteſſe d'une planète doit être en raiſon inverſe de la racine de ſa diſtance, pour que la force centrale, qui eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance, puiſſe la retenir. Voilà pourquoi Jupiter qui a une orbite cinq fois plus grande que celle de la terre, emploie 12 fois plus de temps à la parcourir, ſa vîteſſe abſolue n'étant pas la moitié de celle de la terre. Les planètes les plus éloignées ont moins de vîteſſe.

3419. Si la vîteſſe de projection qu'une planète a reçue primitivement en partant de ſon aphélie, s'eſt trouvée plus petite que celle qui étoit néceſſaire pour décrire un cercle PB, la force centrale étant trop grande, a dû prendre le deſſus, & la planète ſe rapprocher du ſoleil: voilà pourquoi les planètes en partant de leur aphélie ſe rapprochent du ſoleil; mais nous démontrerons bientôt qu'après avoir parcouru 180°, la même planète doit s'éloigner du ſoleil autant qu'elle s'en étoit rapprochée, parce que la force centrifuge devient plus grande que la

Fig. 191. force centripete, à mesure que la planète se rapproche du soleil. On a vu que la vîtesse périhélie est à la vîtesse aphélie en raison inverse des distances (1227); il s'ensuit que la force centrifuge augmente plus que la force centripete; c'est ce que je vais démontrer.

Force centrifuge des planètes.

3420. *La force centrifuge augmente en raison inverse du cube de la distance, lorsque la vîtesse est en raison inverse des distances.*

Démonstration. Supposons que SP soit double de ST; l'arc PB sera double de l'arc TV, la ligne PC double de TR, & la force centrifuge en P double de la force centrifuge en T [a]; mais si la vîtesse en P, au lieu d'être double de la vîtesse en T, n'en est que la moitié, c'est-à-dire, si PE est 4 fois moindre que PB, le sinus verse PD sera 16 fois moindre que PC, puisqu'il est comme le carré de l'arc (3353); donc PD sera 8 fois moindre que TR, c'est-à-dire, que la force centrifuge est en raison inverse des cubes des distances SP & ST, que nous avons supposées être comme 1 à 2.

En général, on voit que $PB : TV :: SP : ST$, à cause des arcs semblables; donc si $TV : PE :: SP : ST$ (1227), l'on aura en multipliant terme à terme, $PB : PE :: SP^2 : ST^2$; or $PC : PD :: PB^2 : PE^2$; donc $PC : PD :: SP^4 : ST^4$; mais $PC : TR :: SP : ST$; donc divisant terme à terme, $TR : PD :: SP^3 : ST^3$; ce qui fait voir en général que l'effet de la force centrifuge est en raison inverse du cube de la distance, quand la vîtesse est en raison inverse des distances. C'est le cas d'une planète, quand on la considère dans son aphélie & dans son périhélie; & cette proportion nous servira bientôt (3427) à faire voir pourquoi les planètes s'éloignent du soleil après s'en être approchées quoiqu'elles soient toujours attirées vers le soleil.

3421. Le nombre de secondes qu'un corps emploîroit à tourner dans une orbite d'un rayon r égal à celui de la terre, avec une force centripète égale à celle

(a) C'est le premier des Théorèmes de la force centrifuge, que M. Huygens donna en 1673, dans son Livre *de Horolog. oscillatorio.*

que

que la terre exerce ſur les corps graves placés à ſa ſurface, eſt égal à $2\sqrt{\frac{r}{p}}$, en ſuppoſant p égal à la longueur du pendule à ſecondes (2699).

Démonstration. Soit ST le rayon de la terre; TR l'effet de la force centrale dans une ſeconde, ou la quantité dont un corps tournant dans le cercle TV feroit rapproché du centre en une ſeconde par l'attraction qui le retient dans ſon orbite; TR eſt auſſi égal à l'eſpace que les corps parcourent en une ſeconde par la gravité naturelle $= \frac{pc^2}{2}$ (3372); mais RV^2 égal au produit des deux ſegmens du diamètre, $= 2r . \frac{pc^2}{2}$; donc RV ou TV, qui lui eſt égal (car il n'en diffère que d'un infiniment petit du ſecond ordre) ſera $c\sqrt{rp}$; c'eſt la valeur de l'arc parcouru en une ſeconde. Pour trouver le temps qui répond à la circonférence entière $2rc$, on fera cette proportion, TV ou $c\sqrt{rp}$ eſt à 1″, comme la circonférence entière $2rc$ eſt à un nombre de ſecondes, qui ſera $\frac{2r}{\sqrt{rp}}$ ou $2''\sqrt{\frac{r}{p}}$ qui eſt la durée de la révolution. Nous en ferons uſage (3483).

3422. Si la force de projection qui anime les planètes & leur fait décrire des orbites, étoit détruite lorſqu'elles ſont dans leurs moyennes diſtances au ſoleil, la force centrale les précipiteroit vers le ſoleil; Mercure y arriveroit en 15 jours & 13 heures; Vénus en 39 jours 17^h; la terre en 64^j 10^h; Mars en 121 jours; Jupiter en 290^j; Saturne en 767^j. La comète la plus éloignée que nous connoiſſions en 66 mille jours; la lune tomberoit ſur la terre en 4^j 20^h; les ſatellites de Jupiter tomberoient ſur leur planète en 7^h, 15^h, 30^h & 71^h; & ceux de Saturne en 8^h, 12^h, 19^h, 68^h, 336^h, reſpectivement; une pierre tomberoit au centre de la terre, ſi le paſſage étoit libre, en 21′ 9″. (Whiſton, *Aſtronomical principles of religion*, *p.* 66). La règle qui ſert à faire ces calculs, conſiſte à dire, 2828 eſt à 1000, c'eſt-à-dire, la racine carrée du cube de 2 eſt à 1, comme la demi-durée de la révo-

Durée de la chûte des planètes.

lution d'une planète, eſt au temps de ſa chûte juſqu'au centre de l'attraction (*Friſi de gravitate*, *pag.* 100).

Du Mouvement elliptique des Planètes.

3423. LA FORCE CENTRALE en raiſon inverſe du carré de la diſtance, ne peut avoir lieu dans des orbites planétaires, à moins qu'elles ne ſoient des ſections coniques. Newton, dans le premier livre de ſes principes, prop. 11, 12 & 13, démontra que ſi les planètes décrivoient des ſections coniques, la force centrale dont elles étoient animées, devoit être en raiſon inverſe du carré de la diſtance; mais M. J. Bernoulli démontra le premier que la propoſition inverſe eſt également vraie, & que la force centrale étant ſuppoſée en raiſon inverſe du carré de la diſtance, l'orbite eſt néceſſairement une ſection conique (*Mém. acad.* 1710 & 1711. *Œuvres de* J. Bernoulli, *tom.* 1. *pag.* 469). Ces deux ſortes de démonſtration pour les forces centrales dans les ſections coniques en général, n'étant pas néceſſaires pour le calcul des perturbations céleſtes, je les ſupprime, & je renvoie aux auteurs où l'on trouve l'une ou l'autre, tels que Newton, *L. I. propoſ.* 11. Herman, Cotes, Euler, Moivre (*Miſcel. analyt.*). Le P. Friſi, *de Gravitate univ. corporum*, 1768, *pag.* 104. Le P. Boſcovich, *de inæqu. Jovis & Satur.* prop. I. François Zanotti, *de Viribus centralibus*. Gregori, *Aſtronomiæ elementa tom.* 1. *pag.* 66. M. de la Caille, *Leçons d'aſtr. pag.* 104. Je me contenterai d'en donner la démonſtration pour la parabole & pour l'ellipſe.

Les orbites ſont des ſections coniques.

3424. La force centrale dans une parabole eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance au foyer. Soit *OD* (*fig.* 262) un arc de parabole infiniment petit (3393), décrit par une comète (3025), *DG* une portion du diamètre qui paſſe par le point *D*, & qui eſt parallèle à l'axe *PR*, *OG* l'ordonnée, & *DG* l'abſciſſe pour l'arc *OD*, *OH* parallèle à *SD* exprime la quantité dont la comète s'écarte de la tangente *DX* en décrivant l'arc

Fig. 262.

DO; ainſi la ligne OH eſt un infiniment petit du ſecond ordre (3393), de même que DN qui lui eſt égale & parallèle, & DG qui lui eſt auſſi égale, puiſque GD & DS font avec la tangente DT des angles égaux, par la propriété la plus connue de la parabole (3252). Le paramètre du diamètre DG eſt quadruple de SD, ainſi l'on a OG^2 ou ON^2 (qui n'en diffère que d'un infiniment petit d'un ordre inférieur) égal à $4SD.DG = 4SD.OH$. Ayant tiré les perpendiculaires OE & SX, les triangles ONE, SDX ſont ſemblables; d'ailleurs la perpendiculaire SX eſt moyenne proportionnelle entre SP & SD, donc $ON : OE :: SD : SX :: SX : SP$, ainſi $ON^2 : OE^2 :: SD : SP :: 4SD : 4SP$; mais $ON^2 = 4SD.OH$, donc $OE^2 = 4SP.OH$. Ainſi $OH = \frac{OE^2}{4SP}$ ou $\frac{OE^2}{4SP} \cdot \frac{SD^2}{SD^2}$; mais en ſuppoſant que le temps ſoit le même, ou que l'aire ſoit conſtante, on aura $OE^2 . SD^2$ conſtant, donc OH ſera proportionnel à $\frac{1}{SD^2}$; c'eſt-à-dire, que l'effet de la force centrale eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance. *Fig. 262.* Force centrale dans la parabole.

3425. La force centrale dans l'ellipſe eſt auſſi en raiſon inverſe du carré de la diſtance. Soit VL (*fig.* 285) un arc d'ellipſe infiniment petit, VN la tangente, CI & Fh parallèles à VN, LQ perpendiculaire à VS; la portion VX du rayon vecteur VS égal à l'écart LN de la tangente, eſt l'effet de la force centrale. A cauſe des triangles ſemblables VEX, VqC, l'on a $VE : VX :: Vq : VC$; mais $Vq = AC$ (3272), donc l'abſciſſe VX du diamètre VCn, qui répond à l'ordonnée LEX, eſt $\frac{VC.LN}{AC}$. Par la propriété des diamètres de l'ellipſe (3257) $VX.Xn : XL^2 :: VC^2 : CI^2$ ou $VX.2VC : LE^2 :: VC^2 : CI^2$, donc $LE^2 = \frac{2VC.VX.CI^2}{VC^2}$, & mettant pour VX ſa valeur $\frac{VC.LN}{AC}$, $LE^2 = \frac{2LN.CI^2}{AC}$. Les triangles ſemblables LEQ, VYq donnent cette proportion $LE^2 : LQ^2 :: Vq^2 : VY^2 :: AC^2 : VY^2$, (3272); mais $AC.CG = CI.VY$ (3262) ou $AC^2 : VY^2 :: CI^2 : CG^2$, donc $LE^2 : LQ^2 ::$ Force centrale dans l'ellipſe. *Fig.* 285.

$CI^2 : CG^2$ ou $AC . \frac{p}{2}$; $LQ^2 = \frac{LE^2 . AC . p}{2 CI^2}$; ſubſtituant pour LE^2 ſa valeur $\frac{2 LN . CI^2}{AC}$, $LQ^2 = p . LN$; mais l'effet de la force centrale eſt exprimé par LN, il eſt donc proportionnel à $\frac{LQ^2}{p}$. L'effet d'une force centrale f eſt auſſi en général $f d t^2$ (3365); donc $LN = f d t^2$ ou $f = \frac{LN}{dt^2} = \frac{LN}{SV^2 . LQ^2}$, & mettant pour LQ^2 ſa valeur $p . LN$, $f = \frac{1}{p . SV^2}$; c'eſt-à-dire, que la force centrale eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance SV au foyer de l'ellipſe.

3426. Expliquons actuellement d'une manière plus palpable la cauſe de ce mouvement alternatif, qu'on a ſouvent peine à bien concevoir. Il ſemble, dit-on, qu'une planète ſans ceſſe attirée vers le ſoleil, & qui s'en eſt approchée à un certain point, devroit s'en approcher ſans ceſſe, puiſque le ſoleil ne ceſſe point de l'attirer; cependant les planètes deſcendues à leur périhélie, s'éloignent du ſoleil & retournent à leur aphélie : voici donc la cauſe de ce mouvement alternatif. Une planète qui a été projettée de ſon aphélie, avec une vîteſſe trop petite pour décrire un cercle à une ſi grande diſtance (3419), ou avec une force de projection trop petite par rapport à la force centrale, ſe rapproche du ſoleil; mais en ſe rapprochant elle augmente en vîteſſe, ſans quoi les aires ne ſeroient plus proportionnelles au temps; ſuppoſons qu'elle eſt arrivée à 180° du point de départ, c'eſt-à-dire, à ſon périhélie, & que ſa diſtance au ſoleil eſt le quart de la diſtance aphélie; ſa vîteſſe eſt quadruple de la vîteſſe aphélie, car la vîteſſe augmente en raiſon inverſe des diſtances (1227); mais la vîteſſe qui ſeroit néceſſaire dans le périhélie pour décrire un cercle, eſt ſeulement deux fois plus grande que la vîteſſe qui étoit néceſſaire pour décrire un cercle dans l'aphélie, parce qu'elle augmente ſeulement en raiſon inverſe de la racine de la diſtance (3418), donc la planète a acquis, en deſcendant de A en P (*fig.* 296), une vîteſſe double de celle qui lui ſeroit néceſſaire pour décrire un cercle du rayon SP; elle

Difficulté ſur le mouv. elliptique.

Fig. 296.

ſortira donc de ce cercle pour s'écarter du ſoleil, & remonter vers l'aphélie : cette première raiſon fait voir qu'il eſt néceſſaire que la planète, après s'être approchée du ſoleil, s'en éloigne enſuite : voci une ſeconde manière de démontrer la même choſe.

3427. Suppoſons toujours une planète projettée en *A* avec une vîteſſe trop petite pour décrire un cercle du rayon *SA*, enſorte qu'elle ſoit obligée, dès le premier moment, de deſcendre dans une orbite plus courbée, en ſe rapprochant du ſoleil. Lorſqu'elle ſera arrivée en un point *P*, à une diſtance quatre fois moindre, la force centrale ou l'attraction du ſoleil ſera ſeize fois plus grande (*3396*), parce qu'elle eſt en raiſon inverſe du carré de la diſtance; mais la force centrifuge ſera ſoixante-quatre fois plus grande (3420), parce qu'elle augmente, ſoit par le carré de la vîteſſe, ſoit par la diminution de la diſtance; donc la force centrifuge eſt alors beaucoup plus grande que la force centrale; il n'eſt donc pas étonnant que la planète commence à s'écarter du ſoleil.

Pourquoi les planètes s'éloignent du ſoleil.

3428. On croira peut-être que la planète devroit ceſſer de s'approcher du ſoleil auſſi-tôt que la force centrifuge ſe trouve égale à la force centripete; mais il faut conſidérer que dans cet inſtant, qui arrive lorſque la planète eſt vers ſa moyenne diſtance au ſoleil, la direction *MN* de ſon mouvement eſt trop oblique au rayon vecteur *MS*, & fait un angle *NMS*, trop petit pour que cet angle puiſſe devenir tout de ſuite un angle droit; il faut que la planète deſcende de plus en plus, & que la courbure de ſa route ſe ſoit arrondie aſſez pour que le rayon vecteur *SP* ſoit perpendiculaire au mouvement de la planète; c'eſt alors que l'excès de la force centrifuge, ſur la force centrale, ſera employé tout entier à écarter la planète du ſoleil, & cela n'arrive que dans le point *P* qui eſt diamétralement oppoſé au point *A*. En partant du point *P* la planète emploîra, pour perdre ſon excès de force centrifuge, autant de temps qu'il lui en a fallu pour l'acquérir; voilà pourquoi la ſeconde partie *POA* de

l'ellipse sera égale à la partie descendante *AMNP*, & décrite dans le même intervalle de temps.

3429. La théorie de l'attraction seroit facile à employer dans l'astronomie, si chaque planète, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre attraction que celle de la force centrale; mais les autres attractions qui s'y joignent rendent les effets très-multipliés; il est temps de nous livrer à ces recherches, les plus importantes & les plus difficiles de toute l'astronomie théorique.

Des Inégalités produites par les Attractions mutuelles des Corps célestes.

3430. Si chaque planète, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre force que celle qui la porte vers ce centre, elle décriroit un cercle ou une ellipse dont les aires seroient proportionnelles aux temps (1233); mais chaque planète étant attirée par toutes les autres, dans des directions différentes & avec des forces qui varient sans cesse, il en résulte des inégalités & des perturbations continuelles. C'est le calcul de ces perturbations qui occupe actuellement les géomètres & les astronomes; Newton commença par celles de la lune (1456); plusieurs autres géomètres ont perfectionné cette théorie (1477). M. Euler a calculé les inégalités de Saturne dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1748; M. Clairaut & M. d'Alembert ont donné des recherches sur les inégalités de la terre; j'ai examiné moi-même celles de Mars & de Vénus (*Mém. acad.* 1758, 1760 & 1761), qui se sont trouvées assez considérables pour mériter d'être employées dans les calculs astronomiques. Les inégalités de Jupiter ont été calculées par M. Euler dans la pièce qui a remporté le prix en 1752: (*Recueil des pièces qui ont remporté les prix*, *T. VII.*), & ensuite par M. Mayer; M. Wargentin en a fait usage dans les tables de Jupiter, qui par-là se sont trouvées beaucoup plus exactes, de même que celles des satellites (2912).

Perturbations des planètes.

Cette théorie des perturbations céleftes, qui fait aujourd'hui une partie effentielle de l'aftronomie, n'a été donnée jufqu'ici dans aucun livre élémentaire, je vais effayer d'en déveloper les principes d'une manière intelligible, & qui puiffe fervir d'introduction à tous les ouvrages qu'on a écrits là-deffus; j'aurai foin de ne rien fuppofer que je n'aye démontré.

3431. Si deux planètes, dont l'une tourne autour de l'autre, étoient attirées également, & fuivant des directions parallèlles, par une troifième, cette nouvelle attraction ne changeroit rien à leur fyftème, à leur mouvement, à leur fituation relative; ce feroit la même chofe que fi l'efpace même, ou le plan dans lequel fe fait le mouvement avoit changé de pofition; mais ce qui avoit lieu dans l'efpace ou dans le plan que l'on tranfporte, continue d'avoir lieu comme auparavant, & la planète vue du centre de fon mouv. paroît toujours décrire une ellipfe.

3432. Ainfi deux attractions égales & parallèles ne changent jamais rien dans un fyftême de corps; ce n'eft que la différence des attractions qui produit une inégalité ou une différence de mouvement; la lune n'eft troublée dans fon mouvement autour de la terre, que parce qu'elle eft attirée par le foleil, un peu plus ou un peu moins que la terre; la mer n'eft agitée deux fois le jour par la lune, que parce que la lune attire les eaux plus qu'elle n'attire la terre, quand elle domine fur les eaux, & qu'enfuite elle attire ces mêmes eaux moins que la terre, 12^h après.

On ne doit confidérer que la différence des attractions.

3433. Quand on veut calculer les troubles qu'une attraction étrangère apporte au mouvement d'une planète, dans fon orbite autour du foleil, il faut favoir combien elle agit fur le foleil & fur la planète; c'eft la différence des deux actions qui eft la force perturbatrice; c'eft cette différence dont on calcule les effets; car fi le foleil, & la planète qui tourne autour de lui, étoient attirés également, & fuivant des directions parallèles, la planète ne cefferoit pas de décrire autour du foleil la même ellipfe qu'auparavant; fes longitudes héliocentriques & fes rayons vecteurs feroient les mêmes, & dans l'ufage de l'aftronomie nous n'aurions

à tenir compte d'aucune différence, l'obſervation ne nous indiqueroit aucun dérangement.

Objection qu'on a faite à l'attraction.

3434. Cette conſidération étant bien méditée, fera ſentir pourquoi la peſanteur de la lune ſur la terre, c'eſt-à-dire, la force centrale qui retient la lune dans ſon orbite eſt diminuée dans les deux ſyzygies, ſoit quand la lune eſt en conjonction, ſoit quand elle eſt en oppoſition; c'eſt une choſe que les adverſaires de l'attraction n'ont jamais compriſe, & qui cependant influe beaucoup dans l'explication des phénomènes; il en eſt de la lune comme des eaux de la mer, qui s'élèvent deux fois le jour vers notre zénit, une fois quand la lune domine ſur les eaux, ou qu'elle eſt au zénit, & une fois quand elle eſt au nadir; les obſervations prouvent que la lune tend à s'éloigner de la terre également (ou à très-peu près) dans les deux ſyzygies, & à s'en rapprocher dans les deux quadratures; nous le démontrerons par le calcul (3478); mais on le démontre auſſi par le raiſonnement qui ſuit. Quand la lune eſt en conjonction, elle eſt plus près du ſoleil que n'eſt la terre, de $\frac{1}{380}$; elle eſt donc plus attirée que la terre de $\frac{1}{190}$ de la force du ſoleil ſur la terre, (car la différence des carrés eſt double de celle des racines); ſa peſanteur vers la terre eſt donc affoiblie de $\frac{1}{190}$. Quand la lune eſt pleine, ou en oppoſition, elle eſt attirée, il eſt vrai, du même côté, ſoit par le ſoleil, ſoit par la terre; mais il ne s'enſuit pas que ſa peſanteur ſoit augmentée; en effet, ſi dans ce cas la lune & la terre étoient attirées par le ſoleil, préciſément avec la même force, il n'en réſulteroit aucun changement dans la peſanteur de la lune vers la terre, ni dans ſon mouvement autour de la terre, quoique la lune fût toujours attirée du même côté par cette ſomme de deux forces; mais la terre eſt plus attirée que la lune de $\frac{1}{190}$, donc la terre tend à fuir la lune, autant que la lune tendoit à s'éloigner de la terre quand elle étoit nouvelle; leur liaiſon, leur union mutuelle, leur tendance réciproque, leur ſympathie, leur attraction, ſont autant diminuées quand le ſoleil éloigne la terre de la lune, que quand il éloigne la lune de la terre; donc en conjonction,

tion, comme en opposition, la pesanteur est diminuée, & la lune tend à s'éloigner de la terre; c'est par la même raison que nous voyons les eaux de la mer tendre vers le zénit, quoique la lune soit au nadir (3590).

3435. La force du soleil sur une planète qui tourne autour de lui, que nous appellons $\frac{S}{r^2}$ (3386), n'est pas la seule qu'il faille considérer lorsqu'on veut avoir le mouvement d'une planète autour du soleil, ou le mouvement tel qu'il seroit vu par un Observateur situé au centre du soleil. La planète *T*, (*fig.* 290), attire aussi le soleil en sens contraire, avec une force $\frac{T}{r^2}$, & si l'on veut supposer le soleil fixe, il faut attribuer à la planète un nouveau mouvement vers le soleil, égal à celui que le soleil a vers la planète, ou, ce qui revient au même, il faut supposer que le soleil attire la planète avec une force $\frac{S+T}{r^2}$, c'est-à-dire, avec la somme des deux masses du soleil & de la planète. Somme des 2 attractions. *Fig.* 290.

3436. L'effet de cette attraction de la planète *T* sur le soleil *S*, est de faire décrire au soleil une petite ellipse autour du centre de gravité commun du soleil & de la planète, (Newton, *L.* I. *propr.* 67, *L.* III. *propr.* 13); du moins en supposant que le soleil ait reçu lui-même une impulsion autour du même centre (*Frisi*, *pag.* 113). Cette attraction produit une partie des petites inégalités du mouvement apparent du soleil, qui se calculent en prenant la différence des attractions que chaque planète exerce sur le soleil & sur la terre. Suivant Newton le soleil doit être déplacé d'une petite quantité par les attractions planétaires; mais la forme de calcul usitée dans l'astronomie fait qu'on suppose toujours le soleil fixe, & qu'on transporte à chaque planète le mouvement qu'elle produit sur le soleil, de sorte que la situation respective de la planète au soleil soit toujours la même. Déplacement du soleil.

3437. L'expression $\frac{S}{r^2}$ de la force attractive, est celle qui a lieu quand l'action se fait directement & toujours dans le sens du rayon vecteur; mais les planètes sont atti- Nécessité de décomposer les forces.

rées les unes par les autres obliquement & en tout ſens, ſelon des directions qui changent perpétuellement, tandis qu'elles ſont toujours attirées directement vers le centre autour duquel elles tournent ; ainſi, pour connoître l'effet des perturbations & des attractions céleſtes, il faut décompoſer leur force abſolue, (qui eſt la maſſe diviſée par le carré de la diſtance), pour trouver ſon effet ſur la direction même de la force centrale. J'ai dit, par exemple, que l'action de Jupiter ſur la terre étoit $\frac{1}{25000}$ de celle du ſoleil ſur la terre, par une attraction directe (3387); mais ces deux forces qui agiſſent ſur la terre ſe contrarient, & ont ſouvent des directions différentes; la force de Jupiter, qui dans l'attraction directe eſt $\frac{1}{25000}$ de celle du ſoleil, fera beaucoup moins d'effet quand elle agira de côté ; par exemple, elle ſera deux fois moindre quand elle agira ſous un angle de 60°.

Principe de mécanique. *Fig.* 295.

3438. Un corps ſollicité ſuivant des directions *AB*, *AC* (*fig.* 295), qui font entr'elles un angle *BAC*, par deux puiſſances qui ſoient entr'elles comme les lignes *AB*, *AC*, décrira la diagonale *AD* du parallélogramme *BACD*, dans le même temps qu'il auroit employé à parcourir *AB* ou *AC*, étant mû ſéparément par une des deux puiſſances (1232). Ainſi la force exprimée par la direction & par la longueur de la diagonale *AD*, équivaut à deux forces *AB*, *AC* qui auroient agi à la fois ; & lors même qu'elle eſt unique dans le principe, elle peut du moins être priſe pour la réunion des deux autres, auxquelles elle eſt tout-à-fait équivalente ; c'eſt-à-dire, que la force *AD* peut ſe décompoſer ſuivant *AC* & *AB*.

La même ligne *AD* eſt auſſi la diagonale du parallélogramme *AbDc*, & la force *AD* réſulteroit également de l'aſſemblage de deux forces *Ab*, *Ac* ; donc ſur une ligne donnée *AD*, l'on peut faire des triangles quelconques *ABD*, *AbD*, de grandeur ou de forme arbitraire, & il ſera toujours permis de ſubſtituer à la force *AD* deux forces qui ayent pour expreſſions les côtés d'un de ces triangles quelconques.

Ainſi la force *AD*, que nous nommerons *F*, décompo-

ſée ſuivant AB & AC, donnera deux forces proportionnelles à ces deux lignes, & parce que AC eſt égale à BD, ces deux forces ſeront, l'une égale à $F\frac{AB}{AD}$, qui agira ſuivant AB, l'autre ſera $F\frac{BD}{AD}$, & agira ſuivant AC, ou parallélement à BD. Je dis que la force ſuivant AB ſera $F\frac{AB}{AD}$, car, puiſque les lignes AB, AC, AD, ſont proportionnelles aux forces qu'elles expriment, la force ſuivant AB eſt à la force ſuivant AD, qui eſt F, comme la ligne AB eſt à la ligne AD; donc la force ſuivant $AB = F. \frac{AB}{AD}$. *Fig. 295.*

3439. Si le parallélogramme donné eſt rectangle en B (*fig.* 294), BD eſt le ſinus de l'angle BAD, en prenant AD pour rayon, ou pour unité; AB en eſt le coſinus; ainſi dans ce cas la force ſuivant $AB = F. \text{coſ.}\, BAD$, & la force ſuivant AC ou $BD = F. \text{ſin.}\, BAD$; ces deux forces AC, AB, ſont équivalentes à la force donnée AD, qu'il s'agiſſoit de décompoſer; nous ferons bientôt uſage de cette dernière décompoſition. Lorſque le parallélogr. eſt rectangle. *Fig. 294.*

Par le moyen de cette décompoſition des forces attractives, on peut trouver les forces perturbatrices qui agiſſent ſur une planète, rapportées à la direction même de ſon mouvement. Je prendrai pour exemple la terre qui eſt attirée par l'action de Jupiter, & je chercherai quelle eſt l'inégalité qui en réſulte dans le mouvement de la terre.

3440. Soit AT (*fig.* 290) l'orbite de la terre, qui eſt la planète troublée, BR celle de Jupiter ou de la planète troublante, & ſuppoſons-les dans un même plan pour ſimplifier nos calculs. Soit M la maſſe de la planète troublante, t l'angle RST ou l'angle de commutation (1142); Jupiter ſitué en R attire la terre T avec une force $\frac{M}{RT^2}$ (3386); nous ne mettons point ici la ſomme des maſſes de Jupiter & de la terre, parce que nous négligerons totalement les troubles de Jupiter. *Fig. 290.* Première décompoſition.

La force $\frac{M}{RT^2}$ doit ſe décompoſer en deux autres, dont l'une agiſſe de T en G, ou de S en R; afin qu'on puiſſe

Fig. 290. en retrancher la force de Jupiter ſur le ſoleil (3434), & l'autre de T en S; la première eſt $M\frac{RS}{RT^3}$, elle tend à éloigner la planète du ſoleil dans la direction de TG ou de SR qui lui eſt parallèle; & pour cela nous lui donnons le ſigne négatif; la 2ᵉ force eſt $\frac{M.TS}{RT^3}$ (3438); elle tend à rapprocher la terre du ſoleil, & nous la mettrons pour cette raiſon en +. De ces deux nouvelles forces la ſeconde eſt dans la direction du rayon vecteur TS, auquel nous avons intention de rapporter le mouvement de la terre, ainſi elle n'a beſoin d'aucune décompoſition nouvelle.

Seconde décompoſition.

3441. La force $\frac{M.RS}{RT^3}$ ou $\frac{M.TG}{RT^3}$ n'étant point dans la direction du rayon vecteur, ni dans la direction du mouvement de la terre, il faut la rapporter à cette direction; mais il faut auparavant en ſouſtraire la force du ſoleil; parce que la force TG n'agit, pour troubler le mouvement de la terre, qu'à raiſon de ce qu'elle eſt plus ou moins grande que celle qui agit en même-temps ſur le ſoleil de S en R; mais cette force ſur le ſoleil eſt $\frac{M}{SR^2}$ (3435), il faut donc la retrancher de la force TG, qui eſt $\frac{M.SR}{RT^3}$, & nous aurons $\frac{M.SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}$ pour la force perturbatrice, ſuivant SR ou TG; il faut la décompoſer ſuivant TE & TB, en la multipliant par le coſinus & par le ſinus de l'angle GTE ou RST (3439), c'eſt-à-dire, de l'angle t. La force ſuivant TE agira dans la direction STE du rayon vecteur de la terre, mais en ſens contraire de la force centrale du ſoleil; c'eſt pourquoi elle ſera négative; la force centrale du ſoleil étant ſuppoſée poſitive, parce qu'elle eſt toujours la plus grande; l'autre force agira de T en B, & tendra à diminuer la vîteſſe de la terre, qui eſt ſuppoſée aller de A en T, c'eſt pourquoi elle ſera auſſi négative. La première eſt donc $-\left(\frac{M.SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}\right)$ coſ. t (3439), force dirigée vers

le soleil, & l'autre $-\left(\frac{M.SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}\right)$ sin. t; celle-ci est la force qui agit perpendiculairement au rayon vecteur, & que j'appellerai Π avec M. Clairaut. Le signe $-$ deviendroit $+$, si l'on cherchoit les inégalités de la planète R, parce que le point R est moins avancé suivant l'ordre des signes que le point T, les planètes les plus éloignées étant toujours les plus lentes. *Fig. 290.* Force Π.

3442. Quant à la force dirigée vers le soleil, il faut se rappeller que nous en avons trouvé une partie $+\frac{M.TS}{RT^3}$ (3440), à laquelle il faut ajouter celle qu'on vient de trouver, puisqu'elle est dans la même direction, & l'on aura enfin la force perturbatrice dirigée vers le centre du soleil, que M. Clairaut appelle $\Phi=+\frac{M.TS}{RT^3}-\left(\frac{M.SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}\right)$ cos. t. Pour faire usage des forces Φ & Π, il faut connoître la valeur de M, c'est-à-dire, la masse de Jupiter comparée à celle du soleil; on a vu ci-devant sa valeur $=\frac{1}{1067}$, (3405). Force Φ.

3443. Ces forces Φ & Π sont exprimées en parties de la force centrale du soleil S sur la terre T; car quand on dit que la force de Jupiter est $\frac{M}{RT^2}$, on suppose que l'on a exprimé la masse M en parties de la masse du soleil (3404), & la distance RT en parties de la distance moyenne ST du soleil à la terre, ensorte qu'on appelle 1, la force que le soleil exerce sur la terre, en l'attirant, lorsqu'elle est dans sa distance moyenne; supposons que $M=\frac{1}{1000}$, & $RT=5$, on aura $\frac{M}{RT^2}=\frac{1}{25000}$ (3387); cela veut dire que la force de Jupiter sur la terre est $\frac{1}{25000}$ de la force centrale que le soleil exerce sur la terre. Par le moyen du rapport qu'il y a entre ces deux forces de Jupiter & du soleil, on trouvera le rapport des espaces qu'elles font parcourir, & conséquemment la quantité dont le mouvement de la terre dans son orbite est dérangé.

3444. La valeur $\frac{M.TS}{RT^3}$ nous fait voir que la force Force en raison inverse du cube de la distance.

perturbatrice qui agit dans la direction *TS* du rayon vecteur, & qui modifie la force centrale de la planète, diminue en raison inverse du cube des distances, comme je l'ai supposé (3413). On verra même bientôt que le second terme de la force Φ combiné avec le premier, donne une force totale suivant *ST* qui est aussi en raison inverse du cube des distances (3468); voilà pourquoi nous avons supposé que la force de la lune pour élever les eaux de la mer, seroit plus petite si elle étoit à la distance du soleil, & cela autant que le cube de la distance du soleil est plus grand que le cube de la distance de la lune, parce que la force qui soulève les eaux de la mer est une force décomposée dans la direction *TS'* du rayon de la terre.

Difficulté du calcul des attractions.

3445. La force d'une planète sur une autre étant ainsi décomposée & exprimée d'une manière générale, nous allons chercher quel effet il en résultera sur le mouvement de la planète troublée; c'est peu de savoir pour un certain moment que la force de Jupiter pour déranger le mouvement de la terre est $\frac{1}{25000}$ de celle du soleil qui retient la terre dans son orbite; il faut savoir combien cette force après avoir agi pendant une infinité de momens, c'est-à-dire, après un temps fini, aura produit d'effet sur le mouvement de la terre; de combien elle aura augmenté ou diminué la vîtesse de la terre dans son orbite, de combien elle aura changé le plan de cette orbite, tout cela exprimé en minutes & en secondes, suivant la forme de nos tables astronomiques; c'est en quoi consiste la difficulté du problême des trois corps; on connoît aisément la force perturbatrice à chaque instant, mais il faut chercher 1°. son effet au même instant pour altérer l'orbite, 2°. la somme de ces effets répétés une multitude de fois; c'est ce qui rend ici le calcul intégral absolument néceſsaire; on connoît l'effet d'un moment & il s'agit de connoître l'effet de trois mois, d'un an, d'une révolution entière, ou d'un espace quelconque de temps, pendant lequel cet effet n'est point uniforme ni proportionnel au temps.

Néceſsité du calcul intégral.

3446. Nous commencerons par réduire en équations le problême des trois corps, à la manière de M. Clairaut.

Soit P une planète (*fig.* 297) qui tourne autour du ſoleil S; PA le petit arc de ſon orbite qu'elle a décrit en un inſtant infiniment petit, & qui eſt ſuppoſé une ligne droite infiniment petite; AB une ligne droite égale à AP, que la planète parcourroit dans l'inſtant ſuivant, ſi elle étoit abandonnée à elle-même (1231); il faut trouver quel ſeroit le rayon SB & l'angle ASB dans ce cas-là; comparant alors l'angle ASB avec celui que la planète parcourt effectivement, on aura l'effet des forces qui agiſſent ſur elle pour augmenter ou diminuer l'angle de ſon mouvement. De même en comparant la diſtance SB qui auroit lieu dans le cas du mouvement libre & uniforme, avec celle qui convient au mouvement actuel de la planète, on aura l'effet des forces qui agiſſent pour augmenter ou diminuer la diſtance ou le rayon vecteur. Soit $SP = r$, l'angle $PSA = du$; ayant tiré PE perpendiculaire ſur SA, AE ſera la difference entre SP & (a) SA; ainſi $AE = dr$, $SA = r + dr$, on aura auſſi l'arc $PE = r\,du$ (3357), c'eſt une fraction de la diſtance r, l'angle du étant toujours ſuppoſé une fraction des 57° qui font la valeur de l'arc égal au rayon; on tirera BH parallèle à AS, AH perpendiculaire à BH, & l'on aura $AH = PE$ & $AE = BH$, puiſque les triangles ABH & PAE ſont parfaitement égaux; il faut chercher la valeur de GH, la retrancher de AH pour avoir AG, d'où l'on tirera l'angle ASG ou ASB que l'on cherche. Fig. 297.

Il faut d'abord faire voir que l'angle ASB ne diffère de l'angle ASP que d'un infiniment petit du ſecond ordre; ayant prolongé SP en M, j'abaiſſe la perpendiculaire BM ſur PM, & la perpendiculaire AO ſur MB; dans les triangles ſemblables BAO, BPM, $BA = AP$, donc $BO = OM$; mais la ligne SAD fait avec la vraie perpendiculaire AO un angle $OAD = PSA$, infiniment petit du premier ordre, donc OD eſt un infiniment petit du 2e ordre (3349), donc BD ne diffère de DM que d'un infiniment

(a) Je ſuppoſe ici que l'arc PE décrit du centre S ſoit confondu avec la perpendiculaire ſur SA, dont il ne diffère que d'un infiniment petit du 4e ordre (3317).

petit du ſecond ordre, il faut dire la même choſe des angles *PSA*, *ASB* dont les arcs *BD* & *MD* ſont la meſure.

Les triangles *EPS*, *BGH* ſont ſemblables, car ils ſont tous deux rectangles, & l'angle $GBH = ASB$ ne diffère de l'angle *ASP* que d'un infiniment petit du ſecond ordre qui n'introduiroit dans la valeur de *GH* qu'une erreur du 3[e] (3349); on aura donc cette proportion $SP : PE :: BH$ ou $AE : GH$, c'eſt-à-dire, $r : rdu :: dr : GH$; donc $GH = dr\,du$, ce qui eſt encore une partie ou une fraction du rayon r; donc $AG = AH - GH = rdu - dr\,du$; l'angle *ASB* ou *ASG* eſt égal à l'arc *AG* diviſé par le rayon *AS* (3357) $= \frac{AG}{AS} = \frac{rdu - dr\,du}{r + dr}$; on fera la diviſion actuelle en procédant comme dans la diviſion ordinaire, & négligeant les quantités du 3[e] ordre; on trouvera pour le quotient ou pour la valeur de l'angle *ASB*, $du - \frac{2\,dr\,du}{r}$; c'eſt l'angle que la planète *P* auroit parcouru, en ſuivant librement la ligne droite *PAB*.

Angle parcouru librement.

3447. Pour parvenir à trouver auſſi le rayon vecteur *SB*, nous chercherons de même la valeur de *FG*, en diſant $SP : PE :: AF$ ou PE: (a) FG, c'eſt-à-dire, $r : rdu :: rdu : FG$; donc $FG = rdu^2$; ainſi la diſtance $SB = SP + EA + FG + GB$ ou ſon égal BH(b), $= r + dr + rdu^2 + dr = r + 2dr + rdu^2$. Telle eſt donc la valeur de la diſtance *SB* de la planète au ſoleil, qui auroit lieu, ſi elle avoit parcouru $AB = PA$, librement & dans le même eſpace de temps qu'elle avoit parcouru *PA*; l'on auroit $SB = r + 2dr + rdu^2$ & l'angle $ASB = du - \frac{2\,dr\,du}{r}$. Voyons combien ces quantités deviendront différentes par l'effet des forces qu'il faut conſidérer.

Rayon vecteur de la planète libre.

3448. Le mouvement d'une planète étant inégal en lui-même, & troublé de plus par les attractions étrangères, cette planète au lieu d'arriver en *B*, ſe trouvera en

(a) Je ſuppoſe $AF = PE$, ils diffèrent d'un infiniment petit du ſecond ordre, comme l'angle *PSA* diffère de l'angle *ASB*; mais il n'en réſulteroit qu'un infiniment petit du troiſième ſur la valeur de *FG* que nous cherchons.

(b) Je ſuppoſe $BG = BH$ ou *AE*, puiſqu'ils ne diffèrent que d'un infiniment petit du 3[e] ordre.

un point K, l'expreſſion de l'angle ASK qu'elle parcourra réellement eſt en général $du + ddu$, car nous n'avons, quant-à-préſent, aucune manière d'exprimer l'inégalité d'un angle variable du, ou ſon accroiſſement, c'eſt-à-dire, la différentielle de du, qu'en l'appellant ddu (3294) ; ſi de la valeur de l'angle $ASK = du + ddu$ on ôte l'angle $ASB = du - \frac{2drdu}{r}$, on aura pour la valeur de l'angle BSK, $ddu + \frac{2drdu}{r}$; mais l'arc LK eſt égal à l'angle multiplié par le rayon (3357), c'eſt-à-dire, par $SL = r$; donc $LK = rddu + 2drdu$, c'eſt l'eſpace parcouru perpendiculairement au rayon vecteur, en vertu de la force perturbatrice Π qui agit ſur la planète (3441). Cet eſpace eſt une fraction du rayon r, puiſque c'eſt r multipliée par une petite fraction de r, & par d'autres petites fractions du ou ddu, qui dans la multiplication ne produiſent que des fractions du rayon. Effet de la force Π.

3449. De même la vraie diſtance SK de la planète au ſoleil, doit être exprimée en général par $r + 2dr + ddr$, (car l'augmentation du rayon PS en devenant SA étoit dr, & en devenant SK, ce ſera encore $dr + ddr$) ; l'on ôtera ce vrai rayon vecteur SK ou SL, du rayon SB qui auroit lieu ſi la planète eût avancé uniformément ſur PAB ; & l'on aura $BL = rdu^2 - ddr$ qui eſt encore une petite fraction de r ; c'eſt l'effet de la force perturbatrice Φ qui agit de B en S, jointe à la force centrale du ſoleil, égale à $\frac{S}{r^2}$, (appellant S la maſſe du ſoleil) ; car c'eſt le total de la force dirigée vers S, qui produit la quantité BL dont la planète eſt rapprochée du centre (1231). S doit être pour plus d'exactitude la ſomme des maſſes du ſoleil & de la terre. Effet de la force centrale.

3450. Toutes les fois qu'une force attractive agit ſans interruption pendant un inſtant dt, les eſpaces qu'elle fait parcourir ſont toujours comme les carrés des temps (3367) ; ainſi la force Π multipliée par le carré du temps dt pendant lequel elle agit, eſt égale à l'eſpace LK qu'elle fait parcourir perpendiculairement au rayon vecteur ; donc Première équation.

$\Pi\, dt^2 = r\, ddu + 2\, dr\, du$; c'est la première équation du problême des trois corps.

Seconde équation.

Il en est de même de la force dirigée au centre S & qui fait parcourir BL dans le même temps dt, l'on aura $\left(\frac{S}{r^2} + \Phi\right) dt^2 = r\, du^2 - ddr$; c'est la seconde équation différentio-différentielle du problême des trois corps. Par le moyen de ces deux équations générales, il s'agit de trouver le rayon vecteur de l'orbite troublée, & l'angle u de l'anomalie vraie, pour un temps quelconque; je vais expliquer la méthode par laquelle M. Clairaut résout ces deux équations (*Mém. acad.* 1748, & *Théorie de la lune*, 1765). Au lieu de dt^2 il emploie le mouvement moyen dx qui est proportionnel au temps, ce qui revient au même; car dt est une fraction du temps de la révolution (3355) & dx est une fraction pareille des 360° qui forment une révolution.

3451. On peut tirer de la seconde équation une expression de la force centrifuge, qui a lieu dans un cercle décrit uniformément; car si r est constant, le terme ddr disparoîtra totalement, & mettant F au lieu de $\frac{M}{r^2} + \Phi$, on aura $F\, dt^2 = r\, du^2$, donc $F = \frac{r\, du^2}{dt^2}$, ou $\frac{rr\, du^2}{r\, dt^2}$, mais $\frac{rr\, du^2}{dt^2}$ est le carré de $\frac{r\, du}{dt}$, ou du petit arc divisé par le temps; c'est donc le carré de la vîtesse de la planète qui

Fig. 291.

est représentée par l'arc PB, (*fig.* 291); donc $F = \frac{PB^2}{r}$; c'est l'expression de la force centrale, ou de la force centrifuge, car elles sont égales dans le mouvement circulaire. Cette expression est double de celle que donne la propriété du cercle (3391), parce que dans le calcul différentiel nous venons de supposer que PA est une ligne droite, au lieu que dans la méthode sinthétique nous l'avions supposée circulaire, ce qui rendoit l'écart de la tangente moitié moindre; cette différence a été la source de quelques méprises dont j'ai parlé (3392).

3452. Je passe à la résolution des deux équations; la première est $\Pi\, dx^2 = r\, ddu + 2\, dr\, du$ (3450); l'on en tire

$\frac{rrddu + 2rdrdu}{dx} = \Pi r dx$, & prenant l'intégrale (3294) $\frac{rrdu}{dx} = f + \int \Pi r dx$, où dx est supposé constant, & f une constante ajoutée pour l'intégration (3304); multipliant par $\Pi r dx$, on a $\Pi r^3 du = f \Pi r dx + \Pi r dx \int \Pi r dx$, & prenant l'intégrale $\int \Pi r^3 du = f \int \Pi r dx + \frac{1}{2} (\int \Pi r dx)^2$ (3303); on résoudra cette équation du second degré, en ajoutant de chaque côté f^2, & tirant la racine des deux membres, il viendra $f + \int \Pi r dx = \sqrt{f^2 + 2\int \Pi r^3 du}$; faisant $\frac{\int \Pi r^3 du}{f^2} = \rho$, ou $\int \Pi r^3 du = f^2 \rho$, & prenant la différentielle (3297), on a $\Pi r dx = \frac{2 \Pi r^3 du}{2\sqrt{f^2 + 2\int \Pi r^3 du}}$, $dx = \frac{rrdu}{f\sqrt{1 + 2\rho}}$; c'est l'élément du temps, ou de la longitude moyenne, qui sera développé (3464), après qu'on aura trouvé le rapport des deux autres inconnues r & u.

Expression du temps.

3453. Passons à la seconde équation (3450) $rdu^2 - ddr = \left(\frac{S}{rr} + \Phi\right) dx^2$ ou $\frac{rdu^2}{dx^2} - \frac{ddr}{dx^2} = \frac{S}{rr} + \Phi$, qu'il faut intégrer pour avoir la valeur de r. On considérera d'abord que dans cette équation il n'y a que le second terme $\frac{ddr}{dx^2}$ qui contienne une différentielle du second ordre, & ce terme est la même chose que $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$, divisé par dx, en supposant dx constant; mais pour rendre l'équation plus générale, & pour avoir la liberté de supposer constante une des autres inconnues, comme du, ce qui sera plus commode dans la suite du calcul, il faut exprimer cette équation d'une manière qui ne suppose point que dx soit constant, & pour cela il suffit d'écrire $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ (3313); on aura donc pour la seconde équation $\frac{rdu^2}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx} = \frac{S}{rr} + \Phi$, dans laquelle il faut substituer la valeur de $\frac{rdu^2}{dx^2}$; on prendra celle de $dx = \frac{r^2 du}{f\sqrt{1+2\rho}}$

(3452), $\frac{du}{dx} = \frac{f\sqrt{1+2\rho}}{rr}$; $\frac{du^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^4}(1+2\rho)$; $\frac{r\,du^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho)$; c'eſt la valeur du premier terme que nous emploîrons bientôt.

Il faut auſſi chercher celle du ſecond terme $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$; au moyen de la valeur de $\frac{du}{dx}$ nous aurons celle de $\frac{dr}{dx}$, en multipliant $\frac{f\sqrt{1+2\rho}}{rr}$ par $\frac{dr}{du}$, c'eſt-à-dire, que $\frac{dr}{dx} = \frac{f\,dr}{rr\,du}\sqrt{1+2\rho}$. C'eſt ſa différentielle $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$, qu'il faudra diviſer par dx; or la différentielle de $\frac{f\,dr}{rr\,du}\sqrt{1+2\rho}$ (3302) eſt $\frac{f\,ddr}{rr\,du}\sqrt{1+2\rho} + \frac{f\,dr\,d\rho}{rr\,du\sqrt{1+2\rho}} - \frac{2f\,r\,dr^2}{r^4\,du}\sqrt{1+2\rho}$; en ſuppoſant du conſtant; car en différentiant une différentielle première, on peut toujours pour faciliter le calcul ſuppoſer une des inconnues conſtante; diviſant par la valeur de dx, ou $\frac{r^2\,du}{f\sqrt{1+2\rho}}$, on aura les cinq termes ſuivans $\frac{f^2\,ddr}{r^4\,du^2}(1+2\rho) + \frac{f^2\,dr\,d\rho}{r^4\,du^2} - \frac{2f^2\,dr^2}{r^5\,du^2}(1+2\rho)$ pour la valeur entière de $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$.

Si l'on ôte cette valeur de celle de $\frac{r\,du^2}{dx^2}$, c'eſt-à-dire, de $\frac{f^2}{r^3}(1+2\rho)$, on aura la valeur de $\frac{S}{rr}+\Phi$ égale à $\frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2\,ddr}{r^4\,du^2}(1+2\rho) - \frac{f^2\,dr\,d\rho}{r^4\,du^2} + \frac{2f^2\,dr^2}{r^5\,du^2}(1+2\rho)$; c'eſt la ſeconde équation du problême, miſe ſous une nouvelle forme; mais $f^2\,d\rho = \Pi\,r^3\,du$, d'où il ſuit que $-\frac{f^2\,dr\,d\rho}{r^4\,du^2} = -\frac{\Pi\,r^3\,du\,dr}{r^4\,du^2} = -\frac{\Pi\,dr}{r\,du}$; donc $\frac{S}{rr}+\Phi+\frac{\Pi\,dr}{r\,du} = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2\,ddr}{r^4\,du^2}(1+2\rho) + \frac{2f^2\,dr^2}{r^5\,du^2}(1+2\rho)$; diviſant par $1+2\rho$, & multipliant par $\frac{rr}{S}$ on aura $\frac{1+\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi\,rdr}{S\,du}}{1+2\rho}$.

$$=\frac{f^2}{Sr}-\frac{f^2\,ddr}{Sr^2\,du^2}+\frac{2f^2\,dr^2}{Sr^3\,du^2}=\frac{\frac{f^2}{Sr}du^2-\frac{f^2}{Sr^2}ddr+\frac{2f^2\,dr^2}{Sr^3}}{du^2}.$$

3454. Pour simplifier le calcul on supposera le premier membre $\frac{1+\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi rdr}{Sdu}}{1+2\rho}=1+\Omega=\frac{\frac{f^2}{Sr}du^2-\frac{f^2}{Sr^2}ddr+\frac{2f^2dr^2}{Sr^3}}{du^2}$, ou ce qui revient au même, $\Omega=\frac{\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi rdr}{Sdu}-2\rho}{1+2\rho}$. Mais $\frac{f^2\,ddr}{Sr^2}-\frac{2f^2dr^2}{Sr^3}$ est la différentielle de $\frac{f^2dr}{Srr}$ (3295); donc $1+\Omega$ $=\frac{\frac{f^2}{Sr}du^2-d\left(\frac{f^2dr}{Sr^2}\right)}{du^2}$; soit fait le premier terme de $1+\Omega$ ou $\frac{f^2}{Sr}=1-s$, on aura $ds=\frac{f^2dr}{Sr^2}$ (3295), & $dds=d\left(\frac{f^2dr}{Sr^2}\right)$ qui est la valeur des deux derniers termes, donc $1+\Omega=1-s-\frac{dds}{du^2}$ & $s+\frac{dds}{du^2}+\Omega=0$. C'est-là l'équation qu'il s'agit d'intégrer, mise sous la forme la plus simple, à laquelle se réduit principalement la question du problême des trois corps, dans tous les auteurs qui l'ont appliquée à la théorie de la lune, (M. Clairaut, *pag.* 5. M. d'Alembert, *pag.* 16. M. Euler, *pag.* 24. M. Simpson, *pag.* 146).

Equation du problême.

3455. On verra bientôt que Ω se réduit à des termes tels que a. cos. pu, c'est-à-dire, qui ne renferment que des cosinus de multiples de u (3467). Ainsi nous allons intégrer cette équation, en supposant $s+\frac{dds}{du^2}+a.\cos.\,pu=0$, ce qui sera peut-être moins élégant, mais plus facile à entendre que l'intégration générale de M. Clairaut.

3456. Etant donnée l'équation qu'il s'agit d'intégrer $s+\frac{dds}{du^2}+a.\cos.\,pu=0$, on la multipliera par $du\cos.\,u$, & l'on aura $sdu.\cos.\,u+\frac{dds.\cos.\,u}{du}+adu.\cos.\,pu.\cos.\,u=0$. Donc (3623) $sdu.\cos.\,u+\frac{dds.\cos.\,u}{du}+\frac{1}{2}adu.$

Méthode pour l'intégrer.

cof. $\overline{p+1\,u} + \frac{1}{2}\,a\,d\,u$. cof. $\overline{p-1\,u} = 0$. L'intégrale de cette équation fe trouvera par la régle ordinaire (3309). s . finus $u + \frac{ds}{du}$. cof. $u + \frac{a}{2\,p+1}$ fin. $\overline{p+1\,u} + \frac{a}{2(p-1)}$ fin. $\overline{p-1\,u} = g$; la conftante g eft celle qu'on doit toujours fuppléer dans toute forte d'intégration (3304).

3457. Au lieu du finus de la fomme des angles u & $p\,u$, mettons fa valeur (3617). fin. $p\,u$. cof. u + fin. u. cof. $p\,u$, & au lieu de fin. de la différence, mettons fa valeur (3619). fin. $p\,u$. cof. u — fin. u cof. $p\,u$, & nous aurons s . fin. $u + \frac{ds}{du}$. cof. $u + \frac{a}{2(p+1)}$ fin. $p\,u$. cof. $u + \frac{a}{2(p+1)}$. fin. u . cof. $p\,u + \frac{a}{2(p-1)}$. fin. $p\,u$. cof. $u - \frac{a}{2(p-1)}$ fin. u. cof. $p\,u = g$; mais $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p-1+p+1}{pp-1} = \frac{2p}{pp-1}$, & $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} = \frac{p-1-p-1}{pp-1} = \frac{-2}{pp-1}$; donc on aura s . fin. u + $\frac{ds}{du}$ cof. $u + \frac{ap}{pp-1}$. fin. $p\,u$. cof. $u - \frac{a}{pp-1}$ fin. u. cof. $p\,u$ — $g = 0$; multipliant par $\frac{du}{\text{cof.}\,u^2}$, l'équation devient $\frac{s\,du.\,\text{fin.}\,u}{\text{cof.}\,u^2}$ $+ \frac{ds}{\text{cof.}\,u} + \frac{ap\,du.\,\text{fin.}\,p\,u}{(pp-1)\,\text{cof.}\,u} - \frac{a\,du.\,\text{cof.}\,pu.\,\text{fin.}\,u}{(pp-1)\,\text{cof.}\,u^2} - \frac{g\,du}{\text{cof.}\,u^2} = 0$.

3458. Les deux premiers termes $\frac{s\,du\,\text{fin.}\,u}{\text{cof.}\,u^2} + \frac{ds}{\text{cof.}\,u}$ ont pour intégrale $\frac{s}{\text{cof.}\,u}$ (3312). Les deux termes fuivans ont pour intégrale $\frac{-a\,\text{cof.}\,pu}{(pp-1)\,\text{cof.}\,u}$ (3295), mais il faut y ajouter $\frac{a}{pp-1}$ (3305). Le dernier terme a pour intégrale g. Tang. u (3310) ou $\frac{g\,\text{fin.}\,u}{\text{cof.}\,u}$. Donc l'intégrale entière eft $\frac{s}{\text{cof.}\,u}$ — $\frac{a.\,\text{cof.}\,pu}{(pp-1)\,\text{cof.}\,u} + \frac{a}{pp-1} - \frac{g.\,\text{fin.}\,u}{\text{cof.}\,u} = h$; c'eft encore une conftante qu'il faut ajouter pour l'intégration (3304). Multipliant par cof. u, l'on aura $s - \frac{a}{pp-1}$. Cof. $p\,u$ + $\frac{a}{pp-1}$. Cof. $u - g$. Sin. $u = h$. Cof. u, & mettant pour s fa valeur $1 - \frac{f^2}{Sr}$ (3454), l'on aura enfin cette équation

$\frac{f^2}{Sr} = 1 - g$. Sin. $u - h$. Cos. $u + \frac{a}{pp-1}$. Cos. $u - \frac{a}{pp-1}$. Cos. pu; que j'appellerai l'équation de l'orbite troublée.

3459. Cette équation de l'orbite troublée a trois termes, $1 - g$. Sin. $u - h$. Cos. u, qui sont les mêmes que dans l'équation d'une ellipse ordinaire (3280), dont $\frac{f^2}{S}$ seroit le paramètre; les deux derniers termes sont le changement que les forces perturbatrices causent dans l'équation de l'orbite, ou l'effet des forces Π & Φ; c'est un des avantages de la solution de M. Clairaut, d'avoir ainsi, dans une même équation, par des termes séparés, l'expression d'une orbite elliptique, & celle d'une orbite troublée.

3460. En supposant $\Omega = a$ cos. $pu +$ cos. mu, on trouveroit pour la correction de $\frac{p}{r}$ les mêmes termes; & de plus les deux suivans $\frac{1}{(m^2-1)}$. Cos. $u - \frac{1}{m^2-1}$ cos. mu; d'où il suit que si Ω est exprimé par une suite de termes A. Cos. $mu + B$. Cos. $nu + C$. Cos. qu, &c. (3467), on aura pour l'équation générale $\frac{p}{r} = 1 - g$. Sin. $u - \left(h - \frac{A}{m^2-1} - \frac{B}{n^2-1} - \frac{C}{q^2-1}, \&c.\right)$ cos. $u - \frac{A.\ \text{cos.}\ mu}{m^2-1} - \frac{B.\ \text{cos.}\ nu}{n^2-1} - \frac{C.\ \text{cos.}\ qu}{q^2-1}$, c'est-à-dire, qu'il y aura autant de termes cos. u qu'il y aura eu de termes dans Ω, & en outre autant de termes cos. mu, cos. nu, cos. qu, &c. Equation de l'orbite troublée.

3461. A l'égard des termes qui multiplient cos. u, & qui se joignent au terme h. cos. u que renferme l'équation d'une ellipse ordinaire (3280), ils affecteront bien l'ellipse que décrit la planète, mais ils l'affecteront constamment; & comme cette ellipse est déterminée par observation, & qu'il nous importe peu de savoir ce que l'excentricité eût été dans le cas où les planètes troublantes n'auroient pas été créées, nous n'aurons aucune attention à faire à ces termes cos. u, en calculant les inégalités périodiques; nous nous bornerons aux termes mu, nu, qui troublent cette orbite & l'empêchent d'être une ellipse immobile (3423).

3462. M. d'Alembert parvient à l'équation de l'art. 3454, par une méthode fort élégante, quoique très-différente de celle que je viens d'expliquer ; il considère que l'orbite décrite en vertu des deux forces Φ & Π, peut aussi être décrite en vertu d'une seule force qui tendroit toujours au point fixe ; & il cherche l'équation qui a lieu entre le rayon vecteur & l'angle parcouru, en employant cette force unique ; M. d'Alembert trouve aussi une expression de cette force qui renferme les forces Φ & π, & il la substitue pour avoir l'équation de l'orbite. *Recherches*, &c. 1754, *pag.* 12.

3463. La manière dont M. d'Alembert intègre cette équation différentielle de l'art. 3454, est aussi fort différente de celle de M. Clairaut : il se sert avec succès de l'expression imaginaire sin. $A = \frac{c^{A\sqrt{-1}} - c^{-A\sqrt{-1}}}{2}$ dans laquelle c est la base des logarithmes ; mais l'explication de cette méthode ingénieuse & de ses applications m'auroit obligé de changer totalement l'ordre & la suite de mon traité de l'attraction.

3464. Quand on a trouvé la valeur de $\frac{p}{r}$ (3460) ; on peut chercher l'élément du temps $dx = \frac{rrdu}{f\sqrt{1+2\rho}}$ (3452) qui ne contient que des fonctions de r & de u. Le paramètre de l'orbite troublée que je suppose donné par observation, & égal à p, étoit appellé $\frac{f^2}{S}$ (3459), donc $f^2 = pS$ & $dx = \frac{rrdu}{\sqrt{f^2 + 2f^2\rho}} = \frac{rrdu}{\sqrt{pS + 2pS\rho}}$, mais je suppose $S = 1$, parce que toutes les masses sont exprimées en parties de S, qui est la masse centrale, c'est-à-dire, la masse du soleil, quand il s'agit des inégalités des planètes principales, & celle de la terre quand il s'agit des inégalités de la lune. Je suppose aussi $p = 1$, parce que l'orbite est presque concentrique, c'est-à-dire, que le paramètre ne diffère du grand axe que d'une quantité beau-

coup

coup plus petite que l'excentricité ; donc $dx = \frac{rrdu}{\sqrt{1+2\rho}}$ $= rrdu(1+2\rho)^{-\frac{1}{2}} = rrdu(1-\rho)$ en négligeant les termes ultérieurs de la série (3286).

3465. Par la propriété de l'ellipse on a $\frac{p}{r} = 1 - e.$ cos. mu (3279), ou $\frac{1}{r} = 1 - e.$ Cos. $mu + Z$, appellant Z la correction de $\frac{1}{r}$ que nous trouvons par le moyen des forces perturbatrices (3460, 3493) ; il faut en conclure la valeur de rr ; pour cela nous ferons les deux termes $1 - e.$ Cos. $mu = a$, & élevant $a + Z$ à la puissance -2, nous aurons $r^2 = a^{-2} - 2a^{-3}Z$; mais $a^{-2} = 1 + 2e.$ cos. mu & $a^{-3} = 1 + 3e.$ Cos. mu, en négligeant les termes ultérieurs de la série, qui renfermeroient e^2 ; donc $r^2 = 1 + 2e.$ Cos. $mu - 2Z - 6eZ.$ Cos. mu ; substituant cette valeur de rr dans l'expression $dx = rrdu(1-\rho)$, & négligeant les termes où se trouve le produit des deux petites quantités Z & ρ, on aura $dx = (1 + 2e.$ Cos. $mu - 2Z - 6eZ.$ Cos. $mu - \rho - 2e\rho.$ Cos. $mu)\,du$, donc les termes variables de cette expression sont $-(2Z+\rho)$ $du - 2e(3Z+\rho).$ Cos. $mu\,du = dx$; c'est la correction de l'élément du temps ou de la longitude moyenne, pour le cas même où l'on fera entrer dans le calcul l'excentricité de la planète troublée. Elément du temps.

3466. Toutes les quantités que l'on trouve par ces calculs sont de petites fractions du rayon de l'orbite que nous avons pris pour unité ; les forces Φ & Π sont des fractions de la force du soleil à la distance 1, ou à la distance moyenne du soleil à la planète troublée, quand il s'agit d'une planète principale telle que Jupiter ; sa masse est une fraction de la masse du soleil, & sa distance à la terre une fraction de la distance du soleil ; ainsi la force qui résulte de cette masse divisée par le carré de la distance est aussi une fraction de la force du soleil ; mais on n'a trouvé qu'en parties du rayon l'espace parcouru en vertu de ces forces, savoir, $rddu + 2drdu$ pour la force Π & $rdu^2 - ddr$ pour la force $\frac{M}{rr} + \Phi$ (3450) : ces Toutes ces quantités sont des fractions du rayon.

termes renferment tous r ou ddr, donc ces eſpaces ne nous viennent qu'en parties du rayon r ; il en eſt de même de $\int \Pi r^3 du = \rho$, qui eſt égal à r^3 multiplié par une fraction de la force Π ; ρ eſt donc une fraction de r^3, c'eſt-à-dire, de la diſtance ; il en eſt de même de Ω, dont toutes les parties multiplient r & ſont des fractions de r ; ainſi Z qui eſt une quantité compoſée de Ω, eſt donc auſſi une fraction de la diſtance r, c'eſt pourquoi l'on multipliera le dernier réſultat par deux cens mille pour avoir le nombre de ſecondes qu'il contiendra (*3359, 3471, 3494*).

3467. Nous avons l'équation de l'orbite troublée, en ſuppoſant $\Omega = a \cos. pu$ (*3460*) ; il s'agit actuellement de démontrer que Ω doit s'exprimer en effet par une ſuite de termes, comme coſ. pu, où coſ. mu. Pour cela il faut évaluer les forces Φ & Π, dont Ω eſt compoſé. La force Φ eſt égale à la maſſe de la planète troublante, multipliée par $\frac{TS}{RT^3} - \left(\frac{RS}{RT^3} - \frac{1}{RS^2}\right) \cos. t$ (3442) ; cette force eſt très-variable ; car elle dépend de quatre variables ; 1°. De la diſtance TS (*fig.* 290), ou du rayon vecteur de la planète troublée ; 2°. du rayon vecteur RS de la planète troublante ; 3°. de la diſtance RT qu'il y a entre les deux planètes ; 4°. de l'angle de commutation t, ou RST, formé par les deux rayons vecteurs. Il faudra, pour ſimplifier cette expreſſion, trouver le moyen d'exprimer toutes ces variables, par la ſeule anomalie u de la planète troublée, c'eſt-à-dire, qu'il faudra chercher le rapport (du moins par approximation) entre u & les trois autres variables qui entrent dans l'expreſſion de la force Φ.

Fig. 290.

Pour donner un exemple de ces ſortes d'approximations je choiſirai d'abord une des inégalités que le ſoleil cauſe dans le mouvement de la lune, & enſuite une de celles que Jupiter cauſe dans le mouvement de la terre, ou, ce qui revient au même, dans le lieu apparent du ſoleil. Mon objet n'eſt que de rendre les principes évidens, & de faire entrer le lecteur dans l'eſprit des méthodes ; ainſi je n'en ferai que de courtes applications ; mais elles ſeront ſuffiſantes pour qu'un lecteur appliqué les puiſſe

étendre plus loin, après qu'il aura suivi & calculé les deux exemples que je vais détailler.

3468. LES INÉGALITÉS DE LA LUNE sont si considérables & si multipliées que pour les déterminer exactement, il faudroit employer une multitude énorme de termes; il est donc impossible d'entrer ici dans ce détail, mais il faut au moins donner une idée des difficultés que ce problême renferme; j'y ajouterai le calcul de la *variation* (3470). Newton & plusieurs auteurs ont parlé de cette inégalité, (Gregori, *Astr. Elem.* M. de la Caille, *pag.* 356); mais aucun n'a fait voir la manière de la calculer en nombres par le principe de l'attraction. Des inégalités de la lune.

Le centre S représentera la terre, AT l'orbite de la lune autour de la terre, qui est supposée fixe en S; BR l'orbite apparente que le soleil semble décrire en un an autour de la terre; nous supposons ces deux orbites concentriques, & dans le même plan, pour simplifier le calcul. La force $\Pi = -\left(\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right)$ sin. t. (3441), peut se réduire à une forme beaucoup plus simple, à cause de la grande distance de la lune; car ayant abaissé la perpendiculaire TC sur le rayon qui va de la terre au soleil, l'on a RT sensiblement égal à RC; donc $RT = SR - SC = SR - ST.$ cos. t; donc $\frac{1}{RT^3} = (SR - ST.$ cos. $t)^{-3} = \frac{1}{SR^3} + \frac{3ST.\text{cos.}t}{SR^4}$ (3287), donc $\frac{M.SR}{RT^3} = \frac{M}{SR^2} + \frac{3M.ST}{SR^3}$. cos. t; donc $\Pi = -\frac{3M.ST}{SR^3}$. cos. t. sin. $t = -\frac{3M.ST}{2SR^3}$. sin. $2t$ (3625) nous négligerons ici la force Φ, parce qu'en supposant l'orbite de la lune circulaire, cette force affecte beaucoup moins le mouvement de la lune dans son orbite, que la force Π qui est perpendiculaire au rayon vecteur, & dont tout l'effet est employé à altérer la vîtesse de la lune dans son orbite, comme nous l'expliquerons plus au long. (3481).

3469. Nommons f la distance du soleil à la terre, en prenant pour unité celle de la lune à la terre, ensorte que f soit égale à 380 environ; soit M la masse du soleil, en Calcul de la variation de la lune.

prenant la ſomme des maſſes de la terre & de la lune pour unité, on aura la force $\Pi = -\frac{3M}{2f^3}$ ſin. $2t$. Il faut en conclure la valeur de ρ qui entre dans Ω (3454); on a vu que $\rho = \int \frac{\Pi r^3 du}{f^2}$ (3452); mais alors $\frac{f^2}{S}$ étoit le paramètre (3459), ainſi appellant p le paramètre de l'orbite, qu'on tire toujours de l'obſervation, l'on aura $\rho = \int \frac{\Pi r^3 du}{pS}$; or puiſque l'orbite eſt circulaire on a $p = 1$; nous avons la maſſe S de la terre pour unité des maſſes, donc $pS = 1$ & $\rho = \int \Pi r^3 du$; mais r eſt auſſi égale à 1, donc $\rho = \int \Pi du = -\frac{3M}{2f^3} \int$. ſin. $2t\,du$.

Suppoſons que le mouvement de la lune ſoit au mouvement du ſoleil comme 1 eſt à $1 - n$, enſorte que le mouvement de la lune étant u, la différence des mouvemens moyens du ſoleil & de la lune, ou l'angle de commutation t ſoit nu, ($n = 0,9252$) nous mettrons $2nu$ à la place de $2t$, & nous aurons $\rho = -\frac{3M}{2f^3} \int$. ſin. $2nu\,du$, $= + \frac{3M.\ \text{cof.}\ 2nu}{4nf^3}$ (3308).

Dans la valeur de Ω (3454) ne prenons que le terme le plus fort de tous qui eſt -2ρ (3492), & nous aurons $\Omega = -\frac{3M}{2nf^3}$. cof. $2nu$; donc la correction qui en réſultera (3460), ſur l'équation $\frac{p}{r} = 1 - e$. cof. mu, &c. ſera $-\frac{3M}{2nf^3(1-4nn)}$. cof. $2nu$.

3470. Quand on a l'effet de l'attraction ſur la valeur de $\frac{p}{r}$, on doit chercher ſon effet ſur la valeur de dx, qui eſt l'expreſſion du temps, ou de la longitude moyenne; or nommant Z le terme que nous venons de trouver dans l'équation de l'orbite, le terme qui en réſulte ſur la valeur de x eſt $-\int (2Z + \rho)\,du$ (3465), c'eſt la correction de la valeur de la longitude moyenne, ou de l'expreſſion du temps; il faudra donc intégrer $-\left(\frac{-6M}{2nf^3(1-4nn)} + \frac{3M}{4nf^3}\right)$.

cof. $2nudu$ (3309), & l'on aura $-\frac{3M}{2n^2f^3}\left(\frac{-1}{(1-4nn)}+\frac{1}{4}\right)$. fin. $2nu$, pour un des termes de l'expreffion de la longitude moyenne en longitude vraie; elle changera de figne quand on exprimera la longitude vraie en longitude moyenne; car fi l'on a $x = u - \alpha$, on aura à peu-près $u = x + \alpha$, x étant le petit terme que nous venons de trouver; nous négligeons ici les autres termes (3292).

3471. Pour exprimer cette valeur en fecondes, on emploîra les nombres fuivans, 1°. La diftance du foleil eft à celle de la lune comme 57′ 3″ eft à 9″ (1711, 1742); donc $\frac{1}{f^3} = \frac{1}{55016000}$, 2°. La maffe M du foleil eft 307831 (3405) le produit de ces deux quantités ou $\frac{M}{f^3}$ revient à t^2 (3407) $= 0,005595 = \frac{1}{179}$. 3°. Le mouvement diurne de la lune eft 13° 10′ 35″, 0, celui du foleil 59′ 8″, 3, la différence eft 12° 11′ 26″, 7; divifant cette différence par le mouvement de la lune que nous prenons pour unité, nous aurons $n = \frac{12° 11'}{13° 10'} = 0{,}9251989$; donc $1 - 4nn = -2{,}424$; $\frac{-1}{1-4nn} = +0{,}41254$, & $-\frac{1}{1-4nn} + \frac{1}{4} = 0{,}66254$; on multipliera donc cette quantité par $\frac{M}{f^3} = t^2$, on la multipliera auffi par $\frac{3}{2n} = 1{,}75236$, & de plus par 57° pour l'avoir en fecondes (3359) & l'on aura $+ 22' 20''$. fin. $2t$ pour l'équation cherchée; elle diffère beaucoup de celle qu'a trouvée M. Clairaut qui eft de 40′; mais il ne faut regarder le réfultat précédent que comme une partie de la variation entière, puifque je n'ai pris qu'un feul des termes qui forment la valeur de Ω.

Confidération de l'inclinaifon.

3472. Je me contenterai de donner ici une idée des quatre confidérations importantes qu'on eft obligé de faire entrer dans les calculs rigoureux de la lune, & dont je n'ai pas fait mention. La première eft celle de l'inclinaifon de l'orbite lunaire que j'ai négligée, puifque j'ai fuppofé le foleil & la lune dans le même plan; l'expreffion des forces ϕ & Π (3441) renferme l'angle t, & fuppofe que t eft la

différence entre la longitude vraie de la lune dans ſon orbite, & la longitude vraie du ſoleil dans la ſienne; mais lorſqu'on conſidère l'inclinaiſon, comme M. Clairaut dans ſa théorie de la lune, il faut réduire le lieu du ſoleil au plan de l'orbite de la lune par une perpendiculaire, & nommant f' la diſtance du ſoleil à la terre réduite au plan de l'orbite lunaire, & t' l'élongation de la lune dans ce même plan, l'on aura dans l'expreſſion des forces $\frac{f'}{f}$ coſ. t' au lieu de coſ. t. A la place de ces deux quantités $\frac{f'}{f}$ & coſ. t', on mettra leurs valeurs (3639, 3640), & l'on aura l'expreſſion des forces, avec le véritable angle t & la vraie diſtance f du ſoleil à la terre, mais la plupart des termes ſeront multipliés ou par le coſinus de l'inclinaiſon, ou par une fonction de ce coſinus. Je rapporterai dans la ſuite deux théorêmes qui ſerviront à entendre la théorie de M. Clairaut dans cette partie (3639).

Conſidération de la parallaxe du ſoleil. *Fig.* 290.

3473. La 2[e] choſe que nous avons négligée eſt la parallaxe du ſoleil; en effet, nous avons ſuppoſé $RT = RC$ (*fig.* 290), comme ſi le ſoleil étoit à une diſtance infinie, & que ſa parallaxe fût abſolument nulle, de même que l'angle *SRT*. Dans les calculs rigoureux de la théorie lunaire on ne fait point cette ſuppoſition, & l'on réduit en ſérie la valeur de $\frac{1}{RT^3}$, en prenant pluſieurs termes de la ſérie (3290), & mettant encore à la place du vrai angle *RST* formé par les rayons vecteurs du ſoleil & de la lune & dont le plan eſt incliné à l'écliptique, une valeur qui contienne ſeulement l'angle t, qui provient quand on ôte du vrai lieu de la lune dans ſon orbite, celui du ſoleil dans la ſienne.

Méthode pour trouver la parallaxe.

3474. Les inégalités qui réſultent de cette conſidération, doivent être plus ſenſibles à meſure que la parallaxe du ſoleil ſera plus conſidérable; ainſi ces équations calculées & comparées avec celles que donne l'obſervation, devroient ſervir à connoître la parallaxe du ſoleil. M. Machin jugea par le mouvement du nœud de la lune que la parallaxe du ſoleil étoit de 8″ (*The laws of*

the moon's motion according to gravity, pag. 22). M. Mayer qui s'étoit occupé de ſemblables recherches m'écrivoit en 1755, que la parallaxe du ſoleil ne ſurpaſſoit pas 7″ 9, & qu'il s'en étoit aſſuré à un tiers de ſeconde près, par le moyen de la théorie de la lune. M. Stewart, Profeſſeur de Mathématiques dans l'Univerſité d'Edimbourg, a publié auſſi un ouvrage dans lequel il recherche la parallaxe du ſoleil par le moyen de la force que le ſoleil exerce ſur la lune, & il la trouve de 6″, 9 (*The diſtance of the ſun from the earth determined by the Theory of gravity, by Dr. Matthew Stewart, in-8°. 1763, pag. 67*). Ce petit Ouvrage eſt un ſupplément à un excellent Recueil du même auteur qui avoit paru quelques années auparavant, (*Tracts Phyſical and Mathematical*). Mais il faut voir ſur la parallaxe du ſoleil les déterminations aſtronomiques rapportées ci-devant (1742), par leſquelles on voit que cette parallaxe eſt d'environ 8″8.

3475. La troiſième conſidération qu'il faut faire entrer dans la théorie de la lune, eſt l'excentricité du ſoleil, qui produit dans ſes diſtances, par rapport à la lune & à la terre, des différences conſidérables, & par conſéquent de nouvelles inégalités dans le mouvement de la lune; cette excentrité exige qu'au lieu de la diſtance moyenne f, on mette le rayon vecteur du ſoleil exprimé par ſon anomalie (3281, 3344). *De l'excentricité du ſoleil.*

3476. Il y a une quatrième conſidération que nous avons négligée (3470), & qu'on doit employer dans les calculs rigoureux de la lune : lorſqu'on a l'expreſſion du temps ou de la longitude moyenne x, par le moyen de la longitude vraie u; par exemple, $x = u + \alpha$ ſin. mu, ou $u = x - \alpha$ ſin. mu, le dernier terme étant une des équations produites par l'attraction, on ne peut ſuppoſer $u = x - \alpha$ ſin. mx, c'eſt-à-dire, ſuppoſer $x = u$ dans le dernier terme, que quand ce dernier terme eſt fort petit; mais ſi ce terme étoit aſſez ſenſible, comme il arrive dans les trois grandes équations de la lune, pour que ſon carré fût encore de pluſieurs ſecondes, (il vaut près de deux minutes dans l'évection de la lune), il faudroit alors em- *Equation qu'il faut réſoudre.*

Fig. 295. ployer le problême dont j'ai rapporté la ſolution (3292); *Voyez* M. Clairaut, *pag.* 59 & *ſuiv.* édition de 1765.

Changement dans la force centrale de la lune.

3477. Après avoir examiné l'effet de la force Π perpendiculaire au rayon vecteur (3469), il me reſte à examiner l'effet de l'autre force Φ, qui modifie, ou qui affecte la force centrale de la lune; on a $\Phi = \frac{Mr}{RT^3} - \left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right)$ coſ. t (3442), mais $\frac{1}{RT^3} = (f - r \text{ coſ. } t)^{-3}$ à cauſe de la grande diſtance du ſoleil, $= f^{-3} + 3\,r f^{-4}$ coſ. t (3287) $= \frac{1}{f^3} + \frac{3\,r \text{ coſ. } t}{f^4}$, donc $-\left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right)$ coſ. $t = -\left(\frac{M}{f^2} + \frac{3\,Mrf \text{ coſ. } t}{f^4} - \frac{M}{f^2}\right)$ coſ. $t = -\frac{3\,r\,M \text{ coſ. } t^2}{f^3}$; c'eſt le ſecond terme de Φ. A la place du premier terme $\frac{Mr}{RT^3}$ on peut mettre $\frac{Mr}{f^3}$, parce que les autres termes qui ſe trouveroient en mettant pour RT ſa valeur $f - r$ coſ. t, ſeroient beaucoup plus petits; donc la force totale $\Phi = \frac{Mr}{f^3} - \frac{3\,r\,M \text{ coſ. } t^2}{f^3}$, $= -\frac{Mr}{2f^3} - \frac{3\,Mr}{2f^3}$ coſ. $2\,t$ (3627).

Elle diminue dans les ſyzygies.

3478. Dans les ſyzygies, c'eſt-à-dire, quand la lune eſt pleine ou nouvelle, on a également $2\,t = 0$ & coſ. $2\,t = 1$; ainſi cette force devient $-\frac{2Mr}{f^3}$; c'eſt la quantité dont l'action du ſoleil diminue la force centrale de la lune, ou ſa peſanteur vers la terre, dans les conjonctions, & les oppoſitions, cette quantité eſt à peu-près $\frac{1}{339}$ de la tendance de la lune à la terre.

Elle augmente dans les quadratures.

Dans la première quadrature, ou lorſque la lune eſt à 90° de la conjonction, $2\,t = 180°$, & dans la ſeconde quadrature $2\,t = 540°$; alors coſ. $t = -1$ (3605), & la force Φ devient $+\frac{Mr}{f^3}$; c'eſt la quantité dont le ſoleil augmente la force centrale de la lune dans les deux quadratures. Cette augmention n'eſt que la moitié de la diminution qui a lieu dans les ſyzygies, puiſque celle-ci eſt $-\frac{2Mr}{f^3}$. La force perturbatrice dépend donc de la ligne r ou de la diſtance de la lune à la terre; elle eſt d'autant plus grande

grande que la lune eſt plus éloignée de la terre ; cette force eſt donc plus grande dans l'apogée que dans le périgée. Pour que les deux termes $\frac{Mr}{2f^3}$ & $\frac{3Mr}{2f^3}$ coſ. 2 t ſe détruiſent, il faut que coſ. 2 t ſoit $= -\frac{1}{3}$, ou que l'angle t ſoit de 54° 44′, car alors $2t = 109° 28'$ dont le coſinus eſt négatif (3605), & égal à un tiers du rayon, ou 0,333 ; de-là il ſuit que par l'attraction du ſoleil la force centrale de la lune vers la terre eſt diminuée plus long-temps qu'elle n'eſt augmentée ; on vient de voir que la quantité de la diminution eſt auſſi plus forte que celle de l'augmentation ; ainſi en total on peut dire que la force du ſoleil diminue la peſanteur de la lune, ou l'attraction que la terre exerce ſur la lune.

3479. Je ſais que la plupart des lecteurs aiment à entrevoir à peu-près les raiſons générales des réſultats que le calcul démontre, je vais donc tâcher d'expliquer la manière dont la perturbation du ſoleil produit les trois principales inégalités de la lune, l'évection, la variation & l'équation annuelle.

Idée générale des inégalités de la lune.

L'Evection eſt la principale inégalité que le ſoleil produiſe dans la lune (1433) ; elle équivaut, ainſi que l'avoient ſuppoſé Newton & Halley, à un changement d'excentricité dans l'orbite lunaire joint à un mouvement de l'apogée (1435). Lorſque le ſoleil répond à l'apogée ou au périgée de la lune, ou lorſque la ligne des apſides de la lune concourt avec la ligne des ſyzygies, la force centrale de la terre ſur la lune qui eſt la plus foible dans la ſyzygie apogée reçoit la plus grande diminution (3478), & la force centrale qui eſt la plus forte dans la ſyzygie périgée y reçoit la moindre diminution, donc la différence entre la force centrale périgée, & la force centrale apogée ſera alors la plus grande ; donc la différence des diſtances augmentera, c'eſt-à-dire, que l'excentricité ſera plus grande ; auſſi l'obſervation prouve qu'alors la plus grande équation de la lune eſt de 7° $\frac{2}{3}$, tandis qu'elle n'étoit pas de 5°, lorſque la ligne des quadratures concouroit avec celle des ſyzygies.

3480. Le mouvement de l'apogée vient de ce que la force centrale eſt diminuée (3509) ; il doit donc être le plus grand quand la ligne des ſyzygies concourt avec la ligne des apſides, ou lorſque le ſoleil répond à l'apogée ou au périgée de la lune ; quand il eſt dans les quadratures le mouvement de l'apogée eſt au contraire le plus lent ; parce que la diminution totale de la force centrale eſt la plus petite ; quand le ſoleil eſt à 45° des apſides le mouvement vrai de l'apogée eſt égal au mouvement moyen, mais ſon vrai lieu eſt alors le plus différent du lieu moyen, & l'équation eſt la plus forte, parce qu'elle eſt le réſultat de tous les degrés de vîteſſes que l'apogée a reçus juſques-là ([a]).

3481. La variation eſt l'inégalité de la lune, qui ſur une orbite ſuppoſée circulaire, a lieu dans les octans, à cauſe de la force tangentielle qui tend à accélérer ou à retarder ſon mouvement ; ſoit *C* (*fig.* 315), le centre de la terre, *O* le centre du ſoleil, & *DHA* l'orbite de la lune ; lorſque avant la conjonction la lune eſt en *H*, elle eſt plus attirée que la terre, & elle eſt attirée dans la direction *HO* ; alors ſa vîteſſe s'accélère juſqu'à ce qu'elle ſoit en *A* dans ſa conjonction, où la viteſſe de la lune ſur ſon orbite eſt la plus grande ; lorſqu'elle eſt vers *P*, 45° après la conjonction, ſa longitude vraie eſt la plus avancée, d'une quantité appellée *variation*, qui eſt de 37′ additive (1445) ; il vrai que la vîteſſe de la lune ceſſe d'accélérer & commence à retarder dès que la lune a paſſé le point *A*, parce que le ſoleil ayant attiré la lune plus qu'il n'attiroit la terre pendant qu'elle alloit de *H* en *A*, a augmenté ſa vîteſſe de plus en plus, juſqu'en *A* où il ceſſe d'augmenter cette vîteſſe ; mais c'eſt en *A* que cette

Planche XLI. Fig. 315.

([a]) Il faut bien ſe ſouvenir que l'effet de ces ſortes d'accélérations ne commence a avoir lieu réellement & dans l'obſervation, que quand la cauſe eſt la plus forte, & il eſt le plus grand quand la cauſe ceſſe d'agir ; c'eſt ainſi que dans le mouvement elliptique des planètes le vrai lieu eſt le plus avancé au temps où l'accélération finit, & où commence le retardement (1257), c'eſt-à-dire, à 9 ſignes d'anomalie ; j'ai vu quelques auteurs donner des idées fauſſes des inégalités de la lune, pour avoir perdu de vue cette conſidération.

vîteſſe s'eſt trouvée la plus grande, puiſqu'elle n'a pas ceſſé d'être accélérée juſques-là. Depuis ce point *A* le ſoleil retirant vers *O* tend à diminuer la vîteſſe, mais l'excès de la vîteſſe acquiſe ſur la vîteſſe moyenne, dure juſques dans l'octant *P*, 45° après la conjonction, où la vîteſſe vraie eſt égale à la moyenne; c'eſt pourquoi l'équation de la variation (*Table* XXXVII) eſt additive, & la plus grande qu'elle puiſſe être, à 45° de la conjonction où la vîteſſe eſt la plus forte ([a]).

3482. L'ÉQUATION ANNUELLE de la lune qui va juſqu'à $11' \frac{1}{4}$ (1452), vient de ce que le ſoleil quand il eſt périgée agit plus ſur la lune que quand il eſt apogée; & comme ſon effet le plus conſidérable pendant une révolution entière de la lune, eſt de diminuer la force centrale de la lune vers la terre (3478), cette force eſt la plus diminuée quand le ſoleil eſt périgée; alors le diamètre de l'orbite lunaire devient plus grand, car la lune étant moins attirée vers la terre s'en éloigne néceſſairement; ſon orbite devenue plus grande rend la durée de la révolution plus longue, car les carrés des temps des révolutions ſont toujours comme les cubes des diamètres des orbites; le mouvement de la lune eſt donc rallenti dans le périgée du ſoleil, & l'équation annuelle commence alors à être ſouſtractive, par la raiſon expliquée dans la note précédente.

Méthode pour calculer la diſtance de la Lune par la longueur du Pendule.

3483. LES diſtances au ſoleil, de toutes les planètes qui tournent autour de lui ſe déterminent par le moyen d'une ſeule de ces diſtances, avec les durées de leurs révolutions, à cauſe de la loi de Képler (1224), que les carrés des temps ſont comme les cubes des diſtances; il en eſt à peu-près de même de la diſtance de la lune à la terre par rapport à celle des corps qui ſont à la ſurface de

([a]) Comme nous l'avons expliqué dans la note de l'art. 3480.

notre globe : on connoît la gravité des corps qui sont à la surface de la terre avec leur distance au centre ; on connoît un des effets de la gravité de la lune vers la terre, c'est la durée de sa révolution, on en peut donc conclure sa distance ; nous avons déja donné une méthode pour la trouver à peu-près (3398).

La force avec laquelle les corps sont attirés vers la terre, à la surface du globe est indiquée, soit par l'espace qu'ils parcourent dans une seconde (3373), soit par la longueur du pendule à secondes (2699) ; on en conclut aisément le temps qu'ils emploîroient à faire leur révolution dans un cercle de même grandeur que l'équateur (3421). La durée de cette révolution étant connue, avec la distance, & la force centrale qui y répond, il suffit de connoître la révolution de la lune, pour trouver sa distance & la force centrale qui l'y retient.

L'attraction étant supposée $= 1$ à la surface de la terre, elle sera $\frac{1}{g^2}$ à une distance g ; la lune attirant aussi la terre avec une force proportionnelle à sa masse que nous appellerons m, il faut supposer la terre en repos, & transporter à la lune seule l'effet des deux mouvemens (3435) ; nous prendrons donc pour l'attraction de la terre sur la lune $\frac{1+m}{g^2}$. L'action du soleil sur la lune diminue la pesanteur de la lune sur la terre de $\frac{1}{339}$ environ (3478), il ne reste donc que $\frac{338}{339}$ de la force précédente, qui agisse effectivement sur la lune ; donc appellant ce nombre $\frac{1}{\gamma}$, on aura la force de la terre sur la lune $\frac{1+m}{\gamma g^2}$. Si un corps tournoit dans l'équateur, nous avons vu que la durée de sa révolution en secondes seroit $2''\sqrt{\frac{r}{p}}$ (3421) ; la force centrifuge retranche $\frac{1}{289}$ de la force centrale de la terre ; ainsi la force attractive de la terre étant supposée $= 1$, celle qui retiendroit ce corps, où la gravité de la

lune ſur la terre n'eſt que $\frac{288}{289}$, nous ſuppoſerons ce nombre $= \frac{1}{\beta}$. Les forces centrales des corps qui tournent dans des orbites circulaires ſont comme les rayons de leurs orbites diviſés par les carrés des temps périodiques, ou en raiſon inverſe des carrés des temps diviſés par les rayons (*3396*); donc appellant t le temps périodique de la lune, on aura cette proportion, $\frac{1}{\beta} : \frac{1+m}{\gamma g^2} :: \frac{t^2}{g} : \frac{4''r}{pr}$, donc $g^3 = \frac{t^2 \beta p}{4'' \gamma}(1+m)$, & la diſtance cherchée de la lune, exprimée en multiples de p ſera $\frac{t^2 \beta p}{4\gamma}(1+m)$.

3484. Pour réduire cette expreſſion en nombres, je ſuppoſe la maſſe de la lune $\frac{1}{71}$ (1717, 3414) $1+m = 1{,}01408$, $t = 27^j\,7^h\,43'\,11''\,6$, le log. de β, 0,00147; celui de γ, 0, 00122; le pendule ſimple $p = 36$ pouces 7 lignes 21 (*2699*), étant diviſé par 864 pour être exprimé en toiſes, & par 3281000 pour être exprimé en rayons de la terre (*2690*) a pour logarithme 3,19016; avec ces données, je trouve le log. de $g = 1{,}78049$, dont le complément eſt le ſinus de la parallaxe horizontale $56'\,59''$ ſous l'équateur; c'eſt à peu-près ce que j'ai trouvé par mes obſervations de Berlin, comparées avec celles du Cap (1716). Cependant il faut voir dans M. d'Alembert, (*Recherches I, pag.* 168, 256) les objections que l'on peut faire à cette manière de trouver la parallaxe de la lune par le moyen du pendule. V. auſſi Murdoch, *Philoſ. tranſ.* 1764. Pour avoir égard à l'aplatiſſement de la terre dans cette recherche, il faudroit ôter de $1+m$ le petit terme $\frac{3}{5}\delta$ (3588). V. Mayer, *Comment. Gotting. II. pag.* 163.

Calcul des inégalités que la Terre éprouve par l'attraction de Jupiter.

3485. Après avoir donné une légere idée des inégalités de la lune & de la manière de les calculer, je

vais donner avec plus de détail le calcul des inégalités que la terre éprouve par l'attraction de Jupiter, parce qu'il reste encore bien des recherches à faire sur les inégalités des planètes, & que ceci pourra servir d'exemple à ceux qui voudroient s'exercer dans de pareils calculs.

La première opération consiste à exprimer les forces Φ & Π (3441) par le moyen des rayons vecteurs de Jupiter & de la terre, & de l'angle de commutation. On doit commencer par faire disparoître de l'expression des forces la

Fig. 290. distance *RT* (*fig.* 290), entre les deux planètes. Nommons r le côté *ST*, f le côté *SR*, & s le côté *RT*, dont nous cherchons la valeur, on aura (3290) $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7} + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right)$ cos. $t + \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right)$ cos. $2t + \frac{35r^3}{8f^6}$ cos. $3t + \frac{315r^4}{64f^7}$ cos. $4t$, qu'on pourroit mettre sous cette forme générale $A+B$ cos. $t+C$. cos. $2t$, &c. Cette quantité multipliée par r, donnera la première partie $\frac{r}{s^3}$ de la force Φ (3442); on ôtera $\frac{1}{f^2}$ de $\frac{f}{s^3}$; multipliant par cos. t, l'on aura la seconde partie de Φ, & multipliant par sin. t, l'on aura la force Π (3441). Je vais mettre ici le commencement du calcul, pour servir d'exemple à ceux qui voudront suivre ces opérations. Dans l'application suivante de ces formules (3489), on aura $r = 1$, & $f = 5, 2$; ainsi $\frac{1}{f^8}$ est 140 fois plus petit que $\frac{1}{f^5}$, & nous pourrons négliger les termes qui seront plus petits que $\frac{1}{f^6}$, on verra ci-après ce qu'il faut faire dans d'autres cas (3498). Nous n'emploîrons point dans les formules suivantes la masse de Jupiter qui multiplie tous les termes, il suffira de multiplier le dernier résultat, le calcul sera plus simple (3494).

3486. La seconde partie de $\Phi = \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cos. $t =$ $\left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right)$ cos. $t + \left(\frac{3r}{f^3} + \frac{45r^3}{8f^5}\right)$ cos. $t^2 + \left(\frac{15r^2}{4f^4} + \frac{105r^4}{16\,^6}\right)$

cos. 2 t. cos. $t + \frac{35r^3}{8f^5}$ cos. 3 t. cos. $t + \frac{315r^4}{64f^6}$ cos. 4t. cos. t, & substituant pour cos. t^2 sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cos. 2 t (3627), pour cos. 2t. cos. t sa valeur (3623) $= \frac{1}{2}$ cos. $t + \frac{1}{2}$ cos. 3 t; &c. l'on aura $\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ cos. $t = \frac{3r}{2f^3} + \frac{45r^3}{16f^5} + \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{f^5}\right)$ cos. 2 $t + \left(\frac{33r^2}{8f^4} + \frac{435r^4}{64f^6}\right)$ cos. $t + \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{735r^4}{128f^6}\right)$ cos. 3 t $+ \frac{35r^3}{16f^5}$ cos. 4 $t + \frac{315r^4}{128f^6}$ cos. 5 t. Pour avoir l'expression entière de la force Φ, il faut retrancher cette valeur de celle de $\frac{r}{s^3}$, qui est la première partie de Φ, ou de $\frac{r}{f^3} + \frac{9r^3}{4f^5}$ $+ \frac{225r^5}{64f^7} + \left(\frac{3r^2}{f^4} + \frac{45r^4}{8f^6}\right)$ cos $t + \left(\frac{15r^3}{4f^5} + \frac{105r^5}{16f^7}\right)$ cos. 2 t &c. & l'on aura la force Φ toute entière $= - \frac{r}{2f^3} -$ Valeur de Φ. $\frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7} - \left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right)$ cos. $t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{4f^5} + \frac{105r^5}{16f^7}\right)$ cos. 2 $t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{175r^4}{128f^6}\right)$ cos. 3 $t - \frac{35r^3}{16f^5}$ cos 4 $t - \frac{315r^4}{128f^6}$ cos. 5 t.

Pour trouver, par une opération semblable, la force Π perpendiculaire au rayon vecteur (3441), qui est $-$ $\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ sin. t, il faut multiplier par sin. t la valeur trouvée pour $\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}$ (3485), & changer les signes, l'on aura $- \left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right)$ sin. $t - \left(\frac{3r}{f^3} + \frac{45r^3}{8f^5}\right)$ cos. t. sin. $t - \left(\frac{15r^2}{4f^4} + \frac{105r^4}{16f^6}\right)$ cos. 2 t. sin. t, $- \frac{35r^3}{8f^5}$ cos. 3 t. sin. t, $- \frac{315r^4}{64f^6}$ cos. 4 t. sin. t. On développera ces produits en employant les formules (3621 & suiv.), telles que cos. t. sin. $t = \frac{1}{2}$ sin. 2 t, &c. & l'on aura $- \left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right)$ sin. t $+ \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{32f^6}\right)$ sin. $t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{45r^3}{16f^5}\right)$ sin. 2$t + \frac{35r^3}{16f^5}$ sin. 2t $- \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{32f^6}\right)$ sin. 3 $t + \frac{315r^4}{128f^6}$ sin. 3 $t - \frac{35r^3}{16f^5}$ sin. 4 t $- \frac{315r^4}{128f^6}$ sin. 5 t. Pour réduire les différens termes de cette quantité, on observera que $- \frac{9}{4} + \frac{15}{8} = - \frac{3}{8}$, $- \frac{225}{64} + \frac{105}{32}$

$= - \frac{15}{64}; - \frac{45}{16} + \frac{35}{16} = - \frac{10}{16} = - \frac{5}{8}, - \frac{105}{32} + \frac{315}{128} = - \frac{420}{128} + \frac{315}{128} = - \frac{105}{128}$. Ainsi l'on trouvera enfin $\Pi = - \left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^6}\right)$ sin. $t - \left(\frac{5r}{2f^3} + \frac{5r^3}{8f^5}\right)$ sin. $2t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{128f^6}\right)$

Valeur de Π. sin. $3t - \frac{35r^3}{16f^5}$ sin. $4t - \frac{315r^4}{128f^6}$ sin. $5t$, expression de la force perturbatrice perpendiculaire au rayon vecteur (3441), qu'il faut aussi multiplier par la masse de Jupiter (3405), à moins qu'on ne veuille attendre la fin de l'opération (3494).

3487. Connoissant l'expression ou la mesure des forces perturbatrices, la question se réduit à trouver l'effet qu'elles doivent produire en un temps donné; par exemple, en trois mois, ou plus généralement pendant le temps qu'il faut à la planète pour parcourir un arc quelconque; or l'on voit bien que c'est ici le plus difficile de la question; la mesure des forces Φ & Π, pour un moment donné, n'étoit qu'une opération de l'algebre ordinaire; mais ce qui doit résulter de ces forces, après qu'elles auront agi sans interruption & d'une manière variable pendant un temps fini, exige le calcul infinitésimal, le seul par le moyen duquel on puisse, d'un effet momentané & infiniment petit, déduire l'effet total.

3488. L'action de Jupiter sur la terre, en un moment infiniment petit, la fera sortir de son orbite d'une quantité infiniment petite; mais cette quantité infiniment petite, exprimée d'une manière générale par son rapport avec l'élément du temps, nous fera trouver, par le moyen du calcul intégral, le déplacement total qui en devra résulter pour un temps fini; comme nous trouvons la longueur entière d'une courbe par rapport à son ordonnée, au moyen d'une particule infiniment petite, pourvu que celle-ci soit exprimée d'une manière générale par l'équation de la courbe; c'est toujours le rapport de deux quantités finies que l'on déduit du rapport de deux quantités infiniment petites (3300).

3489. Les forces perturbatrices Φ & Π étant connues, on en déduira la valeur de Ω, qui doit nous donner celle

du

du rayon vecteur, ou plutôt de $\frac{p}{r}$ (3460), & ensuite la correction du temps (3452), ou la petite partie de la valeur de la longitude moyenne, qui dépend des forces perturbatrices. Les premiers termes de la valeur de Φ qui sont $-\frac{r}{2f^3}-\frac{9r^3}{16f^5}+\frac{225r^5}{64f^7}$ ne seront ici d'aucune utilité ; ils nous apprennent seulement que la force centrale de la terre vers le soleil est augmentée constamment de cette quantité par l'action de Jupiter ; du moins tant qu'on suppose que r & f sont des quantités constantes, comme nous nous proposons de le faire ici ; on n'a besoin, dans l'astronomie, que des termes qui sont variables & qui produisent des irrégularités dans les mouvemens apparens; tels sont les termes multipliés par sin. t, car l'angle t & son sinus changent perpétuellement.

Supposons que la distance moyenne de la planète troublée, c'est-à-dire, de la terre au soleil, est égale à l'unité, alors $f=5,20098$ (1222), donc $\frac{1}{f^4}=\frac{1}{731}$ ou 0,00136665, (les fractions décimales sont extrêmement commodes dans ces sortes de calculs), donc $\frac{3}{8f^4}=0,000512496$. De même $\frac{15}{64f^6}=0,000011841$, donc la partie de la force Π qui est $-\left(\frac{3r^2}{8f^4}+\frac{15r^4}{64f^6}\right)$ sin. t (3486) équivaut à 0,000524337 sin. t, & le premier terme de $\Phi=-\left(\frac{9r^2}{8f^4}+\frac{75r^4}{64f^6}\right)$ cos. t (3486) sera $-0,00159669$4. cos. t ; nous nous contenterons de ces premiers termes qui sont les plus forts, & nous chercherons ce qui en résulte dans le mouvement de la terre ; le calcul sera semblable pour tous les autres termes $2t$, $3t$, &c.

3490. Ayant trouvé en nombres la valeur de Π, il faut en conclure celle de ρ (3452) ; on avoit supposé $\rho=\int\frac{\Pi r^3 du}{f^2}$, mais $\frac{f^2}{S}$ étoit alors le paramètre de l'orbite (3459), donc employant le paramètre p, tel que le donne l'observation, on aura $\rho=\int\frac{\Pi r^3 du}{pS}$; mais si l'on suppose l'orbite

Fig. 290. de la terre circulaire & concentrique au ☉, on aura $r = 1$, $p = 1$, donc $\rho = \int \frac{\Pi\, du}{S}$; je n'aurai pas égard à S qui est la masse du soleil plus celle de la terre, parce que je la suppose égale à l'unité, la masse attractive de Jupiter étant exprimée en parties de cette masse du soleil; on aura donc $\rho = \int \Pi\, du = \int 0,0005243.$ sin. $t\, du$; il faut trouver la valeur de cette intégrale.

Expression de l'angle t.

3491. Pour cela on doit exprimer t par le moyen de l'angle u; nous supposerons les orbites concentriques, nous appellerons le mouvement de la terre 1, celui de Jupiter $1 - n$, ensorte que 1 soit à $1 - n$, comme la durée de la révolution de Jupiter par rapport aux étoiles, est à la durée de la révolution de la terre (1161), ou comme 0,08430586 est à 1; la différence n de ces 2 mouvemens, ou 0,91569414 est la valeur de l'angle de commutation t, ou la différence des longitudes de la terre & de Jupiter; car en partant du point B, où ces deux longitudes étoient les mêmes, & supposant l'angle du mouvement de la terre depuis ce temps-là $= 1$, celui de Jupiter est $1 - n$, & la différence n; mais si le mouvement de la terre est u, celui de Jupiter sera $(1 - n)\,u$, & l'angle t de commutation sera $n u$, n étant $= 0,91569$.

Ainsi la valeur de $\rho = -\int 0,000524$ sin. $t\, du$ revient à $-\int 0,000524.$ sin. $n u\, du$, dont l'intégrale sera (3308) $+ \frac{0,0005243}{0,91569}$ cos. nu, ou $+ 0,00057261$ cos. nu; c'est la valeur de ρ, d'où l'on déduira $- 2\rho$, qui est une partie de la valeur totale de Ω (3454).

Valeur de Ω.

3492. La valeur totale de Ω est $\dfrac{\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S\, du} - 2\rho}{1 + 2\rho}$; mais cette valeur de Ω doit d'abord se réduire à $\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S\, du} - 2\rho$, parce que le dénominateur $1 + 2\rho$ étant très-peu différent de 1, la petite fraction 2ρ n'ajouteroit à la valeur de Ω qui est déja très-petite, qu'une quantité beaucoup moindre; la théorie de la lune est la seule où l'on soit obligé d'avoir égard à ce dénominateur $1 + 2\rho$.

Il y a encore dans Ω un terme à négliger; car ayant sup-

posé que le rayon r étoit constant, dr est absolument nul, & le terme $\frac{\Pi r d r}{S d u}$ devient $= 0$, (3497). La valeur de Ω est donc $\frac{\Phi r r}{S} - 2\rho$, & parce que nous avons pris la distance r de la terre & la masse S du soleil pour unité, l'on aura enfin $\Omega = \Phi - 2\rho$. Ainsi Ω se réduit à $\Phi - 2\rho$; or $\Phi = -0,00159669$. cos. t, ou $-0,001597$. cos. $n u$, & $-2\rho = -0,001145$. cos. $n u$, donc $\Phi - 2\rho = -0,002742$. cos. $n u = \Omega$.

3493. Quand on a la valeur Ω exprimée en cosinus d'un angle tel que $n u$, il suffit de la diviser par $n n - 1$ (3460), & de changer les signes, ou, ce qui revient au même, de la diviser par $1 - n n$, sans changer les signes, pour avoir la valeur qui en résulte dans l'équation de l'orbite $\frac{p}{r} = 1 - e$. cos. $m u$; & elle devient $\frac{p}{r} = 1 - e$. cos. $m u + \frac{\Omega}{1 - n n}$; or $n = 0,91569$, $n n = 0,8385$, donc $1 - n n = 0,1615$; divisant donc $\Phi - 2\rho = -0,002742$. cos. $n u$ par $0,1615$, la correction de $\frac{p}{r}$ sera $-0,01698$. cos. $n u$, c'est ce que nous avons appellé Z (3465). On remarquera ici que quand n approche beaucoup de l'unité, la quantité $1 - n n$ est fort petite, & que les termes de la valeur de Ω en produisent de plus considérables dans la valeur de Z; au contraire, quand n est considérable, la valeur de Ω diminue en formant la valeur de Z; voilà pourquoi nous avons négligé les termes sin. $6t$, sin. $7t$ (3486) qui auroient donné $n n = 36$ & $n n = 49$.

3494. Le second terme de l'élément du temps (3465) qui est $-2e(3Z + \rho)$ cos. $m u d u$ disparoît quand on suppose l'orbite circulaire, puisqu'il renferme l'excentricité e; ainsi pour trouver la longitude moyenne, nous n'emploîrons que le terme $-(2Z + \rho) d u = d x$; nous avons trouvé $Z = -0,01698$. cos. $n u$ (3493) & $\rho = 0,00057261$. cos. $n u$ (3491), donc $-(2Z + \rho) d u = +0,033381$. cos. $n u d u = d x$. Pour en avoir l'intégrale il faut changer cosinus en sinus & diviser par n (3309),

dont la valeur eſt 0,91569, l'on aura donc 0,03645. ſin. *nu*, pour la valeur de *x*, c'eſt-à-dire, que $x = u + 0{,}03645$. ſin. *nu*, donc la longitude vraie $u = x - 0{,}03645$ ſin. *nu*.

Cette quantité 0,03645 doit ſe multiplier par la maſſe de Jupiter, $\frac{1}{1067}$, parce que les forces Φ & Π (3441) renfermoient cette maſſe, que nous n'avons point employée jusqu'ici, & que nous avons réſervée pour la fin, dans le deſſein de rendre les calculs plus faciles (3485); cette quantité doit auſſi ſe multiplier par 57° ou par 206265″ pour être convertie en ſecondes (3466), comme je l'ai expliqué, & l'on trouvera — 7″05. ſin. *nu* ou —7″05. ſin. *t*, c'eſt ce que trouve M. Clairaut, (*Mém. ac.* 1754, *p.* 544).

Valeur de l'équation cherchée.

3495. On trouveroit de même une équation + 2″7. ſin. 2*t* ſi l'on eût fait ſur les termes 2*t*, ce que nous avons fait ſur les termes *t*. Si au lieu de ſuppoſer $r = 1$ on emploie $r = 1 + e.$ coſ. *mu*; appellant *u* l'anomalie moyenne de la terre ou du ſoleil, on trouvera encore deux autres équations qui ſont — 1″5 ſin. (2*t* — *u*) + 0″4 ſin. (*t* — *u*).

Uſage de cette équation.

L'angle *t* eſt la longitude de la terre, moins celle de Jupiter vue du ſoleil; je ſuppoſe qu'on ait, pour le 5 Mars 1749, la longitude moyenne du ſoleil 11ˢ 13° 20′, celle de la terre, qui lui eſt oppoſée, ſera 5ˢ 13° 20′; je ſuppoſe auſſi que la longitude héliocentrique moyenne de Jupiter ſe ſoit trouvée de 11ˢ 9° 4′ ou par les tables qui ſont dans ce livre ou par celles de Halley que j'ai publiées en 1759; on retranchera celle-ci de la longit. de la terre, & l'on aura 6ˢ 4° 16′ pour la valeur de l'ang. *t*; le ſin. de 6ˢ 4° 16′ ou le ſin. de 4° 16′ pris négativement (3604), = — 0,0744, comme on le trouve par les tables de Sinus; donc l'équation — 7″05. ſin. *t* ſera + 0″5 dans ce cas-là. Si au lieu de la longitude de la terre on vouloit employer celle du ſoleil, qui eſt plus grande de ſix ſignes, pour former l'angle *t*, il faudroit changer le ſigne de l'équation, & elle deviendroit en général + 7″ ſin. *t*.

C'eſt ſur ce principe que ſont calculées les tables VIII, IX & X que l'on trouve parmi celles du ſoleil, & dont j'ai donné l'explication à la page 16 & à la page 36 des mêmes tables. J'ajouterai ſeulement ici que la table X

renferme deux équations 7″ 7 sin. dist. ☾ au ⊙ + 3″ 5 cos. dist. sin. anom. ⊙ (M. de la Caille, *Mém. de l'acad.* 1757, *pag.* 137). M. Mayer dans ses tables du soleil suppose la première équation de 8″, & il n'a point d'égard à la seconde qui dépend de l'anomalie moyenne du soleil.

3496. L'EXCENTRICITÉ de l'orbite troublée, lorsqu'on veut la faire entrer dans ces calculs, exige beaucoup d'autres termes dans les valeurs de Ω; on ne fait plus $r = 1$, comme je l'ai supposé dans les calculs précédens (3490), ni $t = nu$ (3491) : je vais donner une idée des difficultés que cette considération ajoute au calcul. Soit u l'anomalie vraie de la terre, on aura $u + 2e.$ sin. u pour son anomalie moyenne (3335); puisque nous avons appellé $1 - n$ le moyen mouvement de Jupiter, lorsque celui de la terre est 1, il ne faudra que multiplier $u + 2e.$ sin. u par $1 - n$, & l'on aura $u - nu + 2e(1 - n)$. sin. u, pour la longitude moyenne de Jupiter; & si on la retranche de celle de la terre ($u + 2e.$ sin. u) on aura la valeur de t en u. On suppose que l'orbite de Jupiter est concentrique, lorsque l'on calcule les effets de l'excentricité de la terre; ainsi supposant que $u - nu + 2e(1 - n)$ sin. u exprime aussi bien la longitude vraie de Jupiter que la moyenne, & la retranchant de celle de la terre, qui est u, on aura $nu - 2e(1 - n)$ sin. $u = t$, au lieu de nu que nous avons pris pour la valeur de t (3491). Calcul pour les orbites excentriques.

Nous avons retranché le mouvement de la terre de celui de Jupiter, & non pas celui de Jupiter de celui de la terre, parce que pour avoir un angle t, qui soit toujours croissant, on retranche toujours la longitude qui croît plus lentement de celle qui croît plus vîte.

3497. Un autre effet de l'excentricité est le terme $\frac{nrdr}{du}$ de la valeur de Ω (3492), que nous avons négligé, & dont il faut tenir compte quand on considère l'excentricité; on a pour lors $r = 1 + e.$ cos. u, $dr = - e.$ sin. udu (3308), $\frac{dr}{du} = - e.$ sin. u, $\frac{rdr}{du} = - er.$ sin. u; car les termes ultérieurs de la multiplication renfermeroient e^2, ou le carré de l'excentricité, que l'on peut négliger; il

faudra donc multiplier par e ſin. u tous les termes trouvés pour la valeur de Π (3486), & l'on aura une nouvelle ſuite de termes qui entreront dans Ω, & qu'il faudra traiter, comme nous avons fait le terme — 0,002742. coſ. nu (3493).

Enfin l'excentricité exige encore dans la correction du temps un nouveau terme $-2e(3Z+\rho)$ coſ. $m\,u\,d\,u$ (3465). J'ai donné ailleurs le calcul de tous ces termes, appliqué à un exemple aſſez détaillé (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 22); on y trouvera auſſi le calcul des termes qui dépendent de l'excentricité de l'orbite troublante, dont il eſt quelquefois néceſſaire de faire uſage.

Autre difficulté du problème des trois corps.

3498. La valeur de $\frac{1}{s^3}$ eſt la première choſe qu'il a fallu connoître pour avoir l'expreſſion des forces perturbatrices; dans l'exemple que j'ai donné, la valeur $\frac{1}{s^3}$ a été exprimée par une ſérie (3485), dont on a négligé les derniers termes, parce qu'on ſuppoſoit que f étoit très-grand ou très-petit par rapport à r; mais lorſque les 2 quantités approchent de l'égalité, la ſérie n'eſt plus aſſez convergente, & cette méthode pour trouver $\frac{1}{s^3}$ ne ſauroit être exacte. M. Euler qui apperçut cette difficulté, dans ſa pièce ſur la théorie de Saturne, s'occupa à la réſoudre, mais il ne démontra point la méthode qu'il indiquoit. M. d'Alembert, dans la ſeconde partie de ſes *Recherches*, donna une autre méthode, & M. Clairaut en a donné une troiſième à l'occaſion des inégalités de la terre, (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 545). Je l'ai expliquée, avec un aſſez grand détail, dans des mémoires ſur les inégalité de Vénus & de Mars, (*Mém. acad.* 1760, 1761); mais je vais en donner ici les principes, de la manière la plus élémentaire, & j'y joindrai les formules qui en réſultent.

3499. La valeur générale de la diſtance s ou RT, Fig. 290. (*fig.* 290), eſt $\sqrt{r^2+f^2-2fr.\text{coſ.}\,t}$ (3290), donc $\frac{1}{s^3} = (r^2+f^2-2fr\,\text{coſ.}\,t)^{-\frac{3}{2}}$; diviſant par $2fr$ les quantités qui ſont ſous le ſigne radical, & multipliant tout par $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$ on a $\frac{1}{s^3}=(2fr)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r^2+f^2}{2fr}-\text{coſ.}\,t\right)^{-\frac{3}{2}}$; ſi l'on

fait $\frac{r^2+f^2}{2fr}=h$, & qu'on exprime en général l'expofant $-\frac{3}{2}$ par m, la queftion fe réduira à trouver en général la valeur de $(h - \text{cof.}\, t)^m$. Pour cela foit $(h - \text{cof.}\, t)^m = A + B.\ \text{cof.}\, t + C.\ \text{cof.}\, 2t + D.\ \text{cof.}\, 3t$, &c.; cette forme nous eft indiquée par les valeurs trouvées ci-deffus (3485), puifque $\frac{1}{r^3}$ n'a produit que des cofinus de multiples de t; il s'agira de trouver les valeurs de A, B, C, &c. Pour trouver celle de A, multiplions tout par dt, & nous aurons $(h - \text{cof.}\, t)^m\, dt = A dt + B.\ \text{cof.}\, t dt + C.\ \text{cof.}\, 2t\, dt$, &c.; donc en intégrant $\int (h - \text{cof.}\, t)^m\, dt = At + B.\ \text{fin.}\, t + \frac{1}{2}C.\ \text{fin.}\, 2t$; faifons $t = 180°$, alors tous les termes B, C, &c. s'évanouiront, car le finus d'un demi-cercle & de tous fes multiples eft toujours égal à zéro, il reftera pour lors $A = \int \frac{(h - \text{cof.}\, t)^m\, dt}{180°}$, qu'il s'agit de réduire en nombres, par approximation, cette quantité n'étant pas intégrable abfolument.

3500. Pour avoir $\int (h - \text{cof.}\, t)^m\, dt$, il n'y a qu'à concevoir une courbe, dont t foit l'abfciffe, dt la différentielle de l'abfciffe, & $(h - \text{cof.}\, t)^m$, l'ordonnée; & fi l'on trouve la quadrature ou la furface de cette courbe pour le cas où $t = 180°$, ce fera l'intégrale $\int (h - \text{cof.}\, t)^m\, dt$. En calculant les inégalités que la terre éprouve par l'action de Vénus, je trouvai $f = 0{,}72333$, $h = 1{,}052912$; fi donc $t = 1°$; on a $\text{cof.}\, t = 0{,}9998477$, donc $h - \text{cof.}\, t = 0{,}0530643$; fon logarithme eft 8,7248025; le complément de ce logarithme fera 1,2751975, c'eft le log. de $(h - \text{cof.}\, t)^{-1}$; fi l'on y ajoute fa moitié 0,6375987, l'on aura 1,9127962, log. de 81, 8081, ainfi $(h - \text{cof.}\, t)^{-\frac{3}{2}} = 81{,}8081$ lorfque $t = 1°$.

On cherchera de même la valeur numérique du même terme, lorfque $t = 2°$, lorfqu'il eft de $3°$, & ainfi de fuite jufqu'à $180°$; toutes ces ordonnées fe multiplieront par dt, & donneront ainfi les élémens de la courbe dont on cherche la quadrature ou la furface; or, dt fera $= 1$ fi les ordonnées ont été calculées de degré en degré; il fera $= 2$, fi elles n'ont été calculées que de deux en deux degrés, & ainfi des autres, parce que dt doit être expri-

mé en degrés aussi bien que t lui-même. Si l'on a donc 180 ordonnées de degré en degré, il faudra les ajouter toutes ensemble pour avoir la surface ou l'intégrale cherchée (3328).

3501. On pourroit demander à ce sujet pourquoi $\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt = A.\ 180°$. c'est-à-dire, pourquoi nous faisons $t = 180$, plutôt que $360°$; je réponds que si on le faisoit égal à $360°$, on trouveroit la même chose, car alors $\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt$ devroit se répéter 360 fois, & l'on trouveroit précisément le double de ce que l'on trouve en ne calculant que 180 ordonnées de la courbe, dont $\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt$ est la différentielle; en effet quand on a trouvé $A = \frac{\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt}{180}$, il est évident que c'est $\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt$ pour le cas où $t = 180°$; si vous le prenez pour le cas où $t = 360°$, vous aurez le double; car toutes les ordonnées du premier demi-cercle se répéteront dans le second, & comme le total sera divisé par $360°$, on aura le même résultat.

Valeur de A par des quadratures de courbes.

3502. On demandera encore pourquoi, en cherchant la valeur de $\int dt (h - \text{cos.}\, t)^m$ pour chaque degré, on prend $dt = 1°$, ensorte que $1°$ soit l'unité des arcs t: je réponds que puisque dt est la différentielle de t, il faut absolument l'exprimer en parties de t, afin que dt & t soient des quantités homogènes. Si donc on prenoit dt égal à $1'$ ou à $\frac{1}{60}$ de degré, & que ce fût l'unité, alors le demi-cercle qui forme le dénominateur dans $\frac{\int (h - \text{cos.}\, t)^m dt}{180°}$, & qui rend cette valeur égale à A, vaudroit, non pas 180, mais 60 fois 180 de ces unités-là; si donc on veut mettre pour le demi-cercle 180 parties, il faut que dt soit composé de ces mêmes parties, c'est-à-dire, de degrés. Si l'on fait dt égale à deux degrés, on aura le même résultat, pourvu qu'on double la somme de toutes les ordonnées, c'est-à-dire, qu'on divise par 90 au lieu de diviser par 180, cela reviendra à peu-près au même; je dis à peu-près, parce que plus dt seroit grand, plus il y auroit d'inexactitude à supposer rectiligne la surface de la courbe

(h — cos.

$(h - \text{cof.}\, t)^m dt$, qui eſt l'élément de l'aire totale ou de la courbe, dont on calcule les ordonnées pour avoir ſa ſurface.

3503. J'ai dit qu'il falloit ajouter enſemble toutes les ordonnées pour avoir la ſurface de la courbe ; mais il eſt encore mieux d'avoir égard à ce que nous avons dit des courbes paraboliques (3329). Suppoſons que $dt = 2$, & qu'on ait trouvé 46 ordonnées pour le premier quart-de-cercle, c'eſt-à-dire, les ordonnées qui ont lieu en ſuppoſant $x = 0$, $x = 2^\circ$, $x = 4^\circ$, &c. juſqu'à $x = 90^\circ$ incluſivement, & 46 ordonnées pour le ſecond quart-de-cercle, c'eſt-à-dire, depuis $x = 90^\circ$ incluſivement, juſqu'à $x = 180^\circ$ incluſivement ; on ajoutera enſemble le tiers des extrêmes ou de la première & de la dernière ordonnée ; quatre tiers de la ſeconde, de la 4e, de la 6e, c'eſt-à-dire, de tous les termes pairs, deux tiers de la 3e, de la 5e, ou de tous les nombres impairs (3329) ; on diviſera la ſomme par 90 (3499), ce ſeroit par 180 ſi l'on avoit calculé les ordonnées pour tous les degrés, & dans le cas de l'article 3500, l'on aura la valeur de $A = 8,702$: on trouvera tous ces calculs faits en détail dans les Mémoires que j'ai donnés à l'académie en 1760 & 1761 ſur les inégalités de Vénus & de Mars produites par l'attraction de la terre.

3504. J'ai ſuppoſé, dans l'exemple précédent, qu'on cherchoit ſeulement la valeur de $(h - \text{cof.}\, t)^{-\frac{3}{2}} = (1,0529 - \text{cof.}\, t)^{-\frac{3}{2}}$, ou de $\left(\frac{r^2+f^2}{2fr} - \text{cof.}\, t\right)^{-\frac{3}{2}}$; mais pour avoir la valeur de $\frac{1}{s^3}$, il faut que cette même quantité ſoit multipliée par $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$ (3499) ; or, on ſuppoſe toujours que r, ou la diſtance de la planète troublée eſt égale à l'unité, il faut donc ſeulement diviſer l'unité par la racine carrée du cube de $2f$, ou de deux fois la diſtance de la planète troublante, pour avoir le coëfficient général ; ainſi la diſtance de Vénus au ſoleil eſt $0,72333 = f$, en ſuppoſant celle de la terre égale à l'unité ; donc $r = 1$ & $(2fr)^{-\frac{3}{2}} = 0,57471$; c'eſt le coëfficient général pour le cas des per- Coëfficient général.

turbations de la terre par Vénus ; il faut donc multiplier 8,702 par ce nombre-là, & l'on aura la valeur entière de $A = 5,0011$, à peu-près comme M. Clairaut l'a trouvé (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 554).

Pour trouver le second terme.

3505. On est obligé de chercher, par un semblable calcul, la valeur de B qui est le second terme de $\frac{1}{s^3}$ (3499); pour cela nous reprendrons la série $(h - \text{cos}.\ t)^m = A + B.\ \text{cos}.\ t + C.\ \text{cos}.\ 2t$, &c.; & multipliant tout par cos. t, nous aurons $(h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ t = A.\ \text{cos}.\ t + B\ \text{cos}.\ t^2$, &c. $= A.\ \text{cos}.\ t + \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\ \text{cos}.\ 2t$, &c.; tous les termes suivans renfermeront des cosinus, parce qu'il n'y a que les puissances paires cos. t^2, cos. t^4, &c. qui donnent des termes tels que $\frac{B}{2}$, où il n'y ait point de cosinus (3632), donc $(h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ t.\ dt = A.\ \text{cos}.\ t.\ dt + \frac{B\,dt}{2} + \frac{B}{2}$ cos. $2t.\ dt$, &c. dont l'intégrale $\int (h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ t.\ dt = A.\ \text{sin}.\ t + \frac{Bt}{2}$, &c. tous les termes, excepté $\frac{Bt}{2}$, renfermeront le sinus de t, ou de ses multiples; donc ils disparoîtront tous, excepté le terme $\frac{Bt}{2}$, lorsqu'on fera $t = 180°$; donc alors on aura $\int (h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ t\,dt = B.\ 90°$; donc $B = \int \frac{(h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ t\,dt}{90°}$, c'est le second terme de la série. On trouveroit de même $C = \int \frac{(h - \text{cos}.\ t)^m\ \text{cos}.\ 2t.dt}{90°}$; & ainsi de suite, pour D, E, F, &c.

On calculera donc aussi pour chaque degré la valeur de $(h - \text{cos}.\ t)^m$ cos. $2t$; par exemple, t étant égal à 1°, cos. $t = 0,9998477$; mais $h = 1,052912$ (3500); donc $h -$ cos. $t = 0,0530643$, qui élevé à la puissance $-\frac{3}{2}$ devient 81, 8081, & multipliant par cos. 1°, on a 81, 795; c'est le premier terme de B, ou la première ordonnée de la courbe, dont la surface entière doit donner la valeur de B. L'on calcule ainsi les 181 ordonnées, de degré en degré, ou seulement 91, de 2° en 2°; mais on observe que cos. t doit changer de signe aussi-tôt que t surpasse 90°; alors on ajoute cos. t avec h, au lieu de le retrancher, &

toutes les ordonnées du ſecond quart-de-cercle deviennent négatives, à cauſe de la multiplication par coſ. t; ayant calculé 91 ordonnées, on prendra le tiers des extrêmes, les $\frac{4}{3}$ des termes pairs & $\frac{2}{3}$ des impairs (3329), en obſervant que dans le ſecond quart elles ſont toutes négatives, on diviſera la ſomme par 45 (ce ſeroit par 90° ſi l'on avoit calculé 181 ordonnées), & l'on trouvera 15,4666; cette quantité multipliée par le coëfficient général 0,57471 (3504), donnera la vraie valeur de B, ou le ſecond terme de la ſérie $\frac{1}{s^3} = A + B.$ coſ. $t + C.$ coſ. $2t$, on le trouvera $= 8,8888$. Valeur du coëfficient *B*.

3506. Les autres termes C, D, E, F, ſe trouveront, par le moyen des deux premiers, au moyen des formules ſuivantes, que j'ai démontrées dans mon mémoire ſur les inégalités de Vénus, (*Mém. acad.* 1760). $C = \frac{2Bh + 2Am}{m+2}$; $D = \frac{4Ch + (m-1)B}{m+3}$; $E = \frac{6Dh + (m-2)C}{m+4}$; $F = \frac{8Eh + (m-3)D}{m+5}$, &c. Dans le cas dont il s'agit ici (3504), on a $m = \frac{3}{2}$ & $h = 1,052912$, d'où il eſt aiſé de calculer ces valeurs en nombres.

3507. L'uſage de ces termes eſt abſolument le même que pour la ſérie $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5}$, &c. (3485); car on s'en ſert pour trouver Φ & Π, enſuite Ω, Z, & l'élément du temps (3489 *& ſuiv.*). Lorſqu'on veut avoir égard à l'excentricité de la planète troublée, on trouve dans la valeur de $\frac{1}{s^3}$ un terme $-3ef.\ 2f^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1+f^2}{2f} - \text{coſ. } t.\right)^{-\frac{5}{2}}$ qui exige une nouvelle ſuite de termes, tels que A, B, C, &c. (Voy. *Mém. acad.* 1761, *pag.* 282). Je n'entrerai pas dans ce détail, il me ſuffit ici d'avoir expliqué les principes de ces recherches avec toute la clarté poſſible.

3508. Les comètes exigent beaucoup de calculs ſemblables, quand on recherche les perturbations & les inégalités qui ont lieu dans leur mouvement; les valeurs de ρ, de Ω, ſe trouvent par des quadratures de courbes que l'on forme en calculant de même un grand nombre Perturbations des comètes.

de leurs ordonnées ; en effet, quand la diſtance *s* de la planète troublante à la planète troublée eſt trop variable pour qu'on puiſſe l'exprimer par une ſérie, même avec le ſecours de la méthode précédente, on eſt obligé de chercher les valeurs des différentes parties de Ω (3492), en calculant un grand nombre de fois leurs valeurs pour chaque révolution ; j'en ai parlé à l'occaſion de la comète de 1759 (3115).

DU MOUVEMENT DES APSIDES.

3509. L'OBSERVATION prouve que les aphélies de toutes les planètes ont un petit mouvement ſelon l'ordre des ſignes (1312 *& ſuiv.*) ; l'apogée de la lune a un mouvement très-rapide (1432) ; ces mouvemens ſont une ſuite de l'attraction. Chaque planète décriroit naturellement une ellipſe ſi elle n'étoit attirée que par le corps autour duquel elle tourne ; mais elle eſt continuellement détournée de cette orbite par les attractions des autres planètes, enſorte que ſa trace n'eſt jamais véritablement une ellipſe ; cependant les aſtronomes ſuppoſent pour ſimplifier les calculs, qu'une planète reſte toujours ſur une ellipſe, mais que cette ellipſe eſt mobile. Soit *S* le
Fig. 296. foyer (*fig.* 296), & *A* l'aphélie d'une planète, dont l'orbite eſt *AMPO*, & ſuppoſons que la planète eût été de *A* en *B* dans une ellipſe immobile *ABP*, avec la force centrale du ſoleil *S* ; ſi l'attraction d'une autre planète *P*, qui tend à l'éloigner du ſoleil, la fait parvenir en un point *C*, & à une diſtance *SC* du ſoleil, on pourra ſuppoſer que ce point eſt placé dans une autre ellipſe *CDE* égale à l'orbite *ABP*, dont l'apſide au lieu d'être encore en *A* ſoit parvenue en *C* ; l'on ajuſte, pour ainſi dire, ſur le point *C* où eſt arrivée la planète, l'ellipſe *ABP* dont la planète eſt véritablement ſortie, & en faiſant mouvoir cette ellipſe on réduit le calcul du vrai mouvement de la planète à la ſimplicité du calcul elliptique. Toutes les fois que la planète s'éloigne du foyer *S* ou que ſa force centrale eſt diminuée, on eſt obligé de concevoir un mouve-

ment progreſſif dans ſon apſide pour ſatisfaire à cette diminution, c'eſt ce qui a lieu dans le ſyſtème planétaire.

3510. Si la gravité étoit exactement en raiſon inverſe du carré des diſtances, la planète emploîroit la moitié de ſa révolution à aller de *A* en *P*, ou de l'aphélie au périhélie; ſi la gravité eſt en raiſon inverſe d'une puiſſance de la diſtance qui ſoit entre deux & trois, ou entre le carré & le cube; la planète emploîra plus de la moitié de la révolution à arriver de l'aphélie au périhélie, c'eſt-à-dire, que le périhélie aura un mouvement direct; ſi la gravité eſt en raiſon inverſe d'une puiſſance moindre que le carré de la diſtance, l'aphélie ſera rétrograde. On peut voir dans le Traité des Fluxions de Mac-laurin, & dans le livre des Principes de Newton un grand nombre de propoſitions curieuſes ſur le mouvement des apſides dans différentes hypothèſes de gravité; pour moi qui ne veux donner ici que les choſes uſuelles dans l'aſtronomie, je me contenterai de faire voir comment on peut déduire le mouvement des apſides, de l'équation générale d'une orbite troublée (3458); en faiſant ces ſortes d'applications aux orbites planétaires, on pourra connoître mieux qu'on n'a fait juſqu'ici le mouvement de leurs apſides.

3511. L'équation générale d'une orbite troublée ſert à trouver le mouvement continuel des apſides, auſſi bien que les inégalités périodiques; en effet, dans une ellipſe mobile on a cette équation $\frac{1}{r} = 1 - e$ coſ. mu (3281), mais dans l'orbite troublée au lieu de e coſ. mu, l'on a une ſuite de termes dépendans de Ω (3458), examinons les plus conſidérables, dans le cas des perturbations de Jupiter ſur la terre.

3512. L'on a vu ci-deſſus (3486), que la force perturbatrice qui affecte la force centrale, c'eſt-à-dire, Φ, (en ſuppoſant la maſſe de Jupiter $= I$), eſt égale à $-I\left(\frac{r}{2f^3} + \frac{9r^3}{16f^5}\right)$, donc $\Phi\, rr = -I\left(\frac{r^3}{2f^3} + \frac{9r^5}{16f^5}\right)$; mais $\frac{1}{r} = 1 - e$. coſ. mu (3281); d'où l'on tire $r^3 = 1 + 3e$.

mu (3287); donc $\frac{r^3}{2f^3} = \frac{1+3e.\text{cof.}\, mu}{2f^3}$ & $9r^5 = \frac{9+45e.\text{cof.}\, mu}{16f^5}$; nous négligerons ce terme divifé par $16f^5$ comme étant fort petit; mais nous examinerons ce que vaut $\frac{3e.}{2f^3}$ cof. *mu* parmi les termes que l'attraction produit dans la valeur de Ω (3492). Suppofant que ce foit-là le feul terme de Ω, parce qu'il eft en effet le plus confidérable de tous, nous aurons pour l'équation de l'orbite troublée (3458) $\frac{f^2}{Mr} =$ $1 - g.\,\text{fin.}\, u. - h.\,\text{cof.}\, u + \frac{3e}{2f^3(mm-1)}\,\text{cof.}\, u - \frac{3e}{2f^3(mm-1)}$ cof. *mu*; cette équation doit revenir au même que l'équation d'une ellipfe mobile tirée de l'obfervation, $\frac{1}{r} = 1 - e.$ cof. *mu*, fi l'on ne confidère que le mouvement de l'apfide, & qu'on faffe abftraction de toutes les autres inégalités, car alors l'équation de l'orbite troublée n'a d'autre effet que de rendre l'ellipfe mobile; donc le terme $\frac{3e}{2f^3(mm-1)}$ eft l'excentricité de l'orbite troublée, c'eft-à-dire, l'excentricité obfervée, ou la même que j'ai appellée *e*, donc $\frac{3e}{2f^3(mm-1)} = e$, d'où l'on tire $mm =$ $1 - \frac{3}{2f^3}$, $m = 1 - \frac{3}{4f^3}$ (3288), $1 - m = \frac{3}{4f^3}$, c'eft le mouv. de l'aphélie de la terre (3281), en fuppofant que le mouvement de la terre eft l'unité; il faut donc multiplier $\frac{3}{4f^3}$ par 360°, pour avoir le mouvement de l'apfide pendant une révolution entière de la terre, c'eft-à-dire, fon mouvement annuel; il faut auffi le multiplier par la maffe de Jupiter qui étoit contenue dans la force Φ (3485); la valeur de $\frac{3}{4f^3}$ eft 0,005331, puifque $f = 5{,}201$; multipliant donc par $\frac{1}{1067}$ & par 1296000″ pour le réduire en fecondes & en décimales, on trouve 6″, 47 pour le mouvement annuel de l'aphélie de la terre, produit par l'attraction de Jupiter; on auroit 6″ 55‴ fi l'on ne négligeoit pas plufieurs termes tels que $\frac{45}{16f^5}$ qui eft égal à 0,000739. Ce réfultat différe peu de celui de M. Euler qui trouve

Mouvement de l'aphélie de la terre.

6″ 57‴, dans la pièce où il calcule l'action des planètes ſur la terre ; qui a remporté le prix de l'académie en 1756, & qui eſt dans le 8e vol. des pièces des prix, publié en 1771.

3513. Il y a deux autres cauſes qui peuvent produire un mouvement dans les apſides : la première a lieu pour la lune & pour les ſatellites, c'eſt la figure aplatie de la planète principale. La ſeconde eſt la petite réſiſtance qu'on peut imaginer dans la matiére éthérée où les planètes ſe meuvent ; cette réſiſtance, ſi elle avoit lieu, pourroit changer la grandeur, la figure & la ſituation des orbites après un certain nombre de révolutions. *Voyez* M. d'Alembert (*Recherches*, &c. *T.* II, *pag.* 145) ; on peut conſulter auſſi les Recherches de M. l'Abbé Boſſut, qui remporta le prix de l'académie en 1762 ſur cette matière, & celles de M. Albert Euler qui eut l'acceſſit, elles ſont dans le VIIIe volume des pièces des prix. Mais je dois avertir que l'examen des plus anciennes obſervations ne nous fait appercevoir dans les orbites aucun changement qui puiſſe indiquer la réſiſtance de la matière éthérée ; le mouvement des apſides qu'on y remarque eſt produit par l'attraction mutuelle des planètes ; car on trouve que la réſiſtance du fluide produiroit un mouvement de l'aphélie beaucoup moins ſenſible que le changement de durée dans la révolution, or celui-ci n'a pas lieu, du moins ſenſiblement ; donc le mouvement obſervé dans les apſides ne vient pas de la réſiſtance.

La réſiſtance de l'éther eſt inſenſible.

3514. Je dis qu'on ne voit pas de changement dans la durée des révolutions, je l'ai prouvé pour la terre & pour Mars, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 418 & 445) ; Saturne paroît au contraire avoir retardé (1164) ; donc ſi l'on obſerve une accélération dans Jupiter (1169), elle ne vient pas de l'action de Saturne, & de la poſition de ſes apſides, (M. Caſſini, *Mém. acad.* 1746, *pag.* 465) ; ſi cela eſt, les choſes reviendront par la ſuite au même état où elles ſont actuellement, & l'accélération ſe convertira en un retardement. Quant à l'accélération de la lune (1485), elle n'eſt pas conſtatée d'une manière abſolument évidente, & je ne doute pas qu'on ne trouve dans

L'accélération de Jupiter ne la prouve pas.

l'attraction de quoi satisfaire à l'équation séculaire qu'on croit y remarquer. Ainsi rien ne prouve jusqu'ici la résistance de la matière éthérée ; tous les astronomes doivent donc convenir que si les corps célestes ne sont pas dans un vide absolu, ils sont au moins dans une matière dont l'effet est insensible, & qui est pour nous comme le vide ; cela seul suffiroit pour dissiper le système des tourbillons & du plein, que nous avons déja réfuté (3383).

Le vide est prouvé.

DU MOUVEMENT DES NŒUDS DES PLANÈTES.

3515. Si toutes les planètes tournoient autour du soleil dans un même plan, ce plan ne changeroit point par leur attraction réciproque, une planète ne pouvant faire sortir l'autre d'un plan où elles sont toutes deux ; mais toutes ces orbites sont inclinées les unes sur les autres, & dans des situations fort différentes ; chaque planète est tirée sans cesse hors du plan de son orbite par toutes les autres planètes, & change à tout instant d'orbite. Les astronomes, pour représenter méthodiquement ces inégalités, supposent que la planète est toujours dans le même plan ou sur la même orbite, mais que cette orbite change de situation ; on peut en effet représenter tous les mouvemens d'une planète hors du plan de son orbite primitive en donnant à ce plan un changement d'inclinaison, avec un mouvement dans ses nœuds, qui soit tel que le plan qu'on adopte, suive la planète dans toutes ses inégalités.

On sentira même sans autre démonstration qu'il est impossible qu'une planète attirée, dont l'orbite est dans un autre plan que celle de la planète perturbatrice vienne jamais traverser le plan de celle-ci, au même point où elle l'avoit traversé dans la révolution précédente : elle doit à chaque fois le traverser plutôt qu'elle n'eût fait, si la planète perturbatrice ne l'eût point attirée vers ce plan ; elle a sans cesse une détermination ou une force vers le plan où se trouve la planète qui l'attire, & elle ne

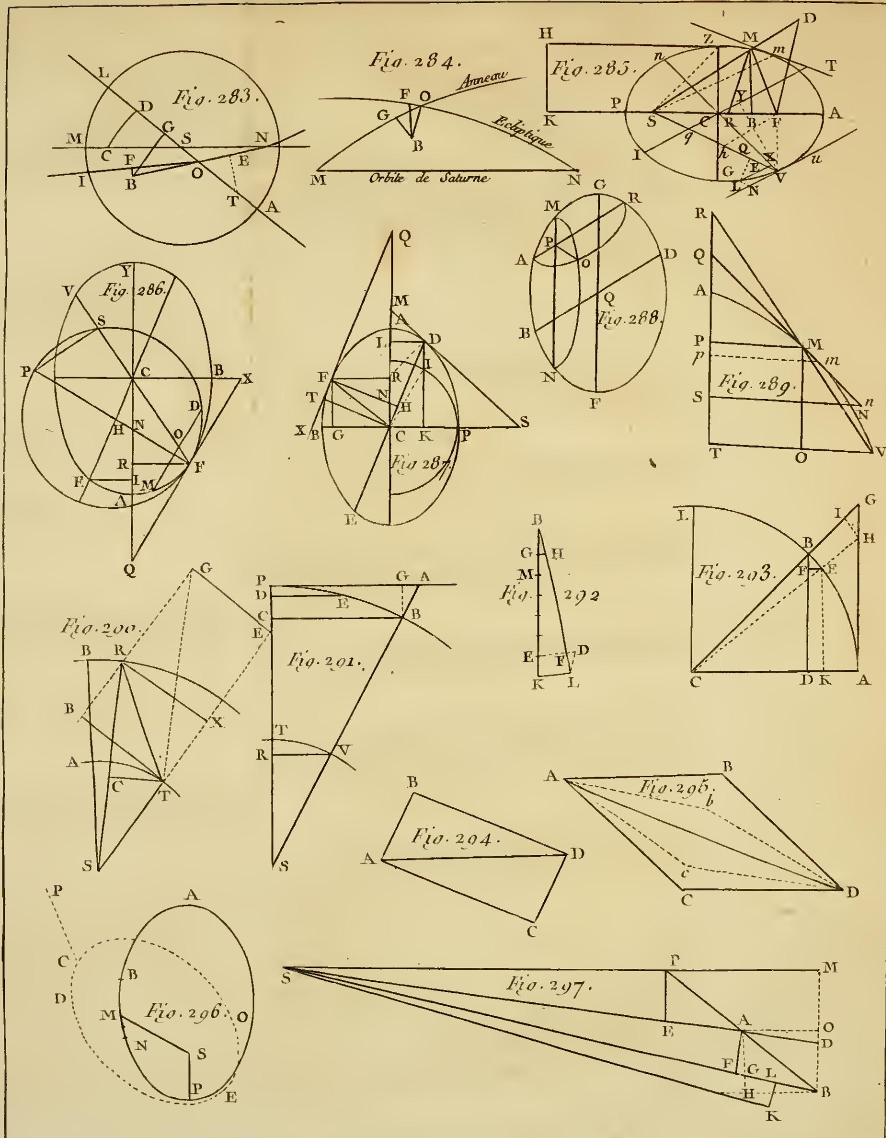


Fig. 283.
Fig. 284.
Anneau
Ecliptique
Orbite de Saturne
Fig. 285.
Fig. 286.
Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 297.

ne peut obéir à cette force qu'en arrivant à ce plan un peu avant la fin de sa révolution.

3516. Soit *DN* (*fig.* 299) l'écliptique; *LABN* l'orbite de la lune, c'est-à-dire, l'orbite dans laquelle la lune étoit d'abord, en parcourant l'arc *LA*; le soleil étant placé dans le plan de l'écliptique *DN*, il est clair qu'en tout temps la force attractive du soleil tend à rapprocher la lune du plan de l'écliptique ou de la ligne *DN*, dans laquelle se trouve le soleil; ainsi lorsque la lune tend à parcourir dans son orbite un second espace *AB* égal à l'espace *LA* qu'elle venoit de parcourir, la force du soleil tend à la rapprocher de l'écliptique *ND*, d'une quantité *AE*; il faut nécessairement que la lune par un mouvement composé décrive la diagonale *AC*, du parallélogramme *AECB*, ensorte que son orbite devienne *ACM*, au lieu de *LABN*; c'est pourquoi le nœud *N* de cette orbite change continuellement de position & va de *N* en *M* dans un sens contraire au mouvement de la lune, que je suppose dirigé de *A* vers *N*; donc le mouvement du nœud d'une planète est toujours rétrograde par rapport à l'orbite *DN* de la planète qui produit ce mouvement.

Pl. XL. Fig. 299.

Les nœuds sont rétrogrades.

3517. La même figure fait voir pourquoi l'attraction du soleil change l'inclinaison de l'orbite lunaire (1491): la lune obligée de changer sa direction primitive *LABN* en une direction nouvelle, *ACM*, rencontrera l'écliptique *NMD* au point *M* sous un nouvel angle *AMD* différent de l'inclinaison *AND* que la lune affectoit auparavant; mais ce changement d'inclinaison étant insensible dans les autres planètes, je ne m'en occuperai point ici. D'ailleurs ce changement est périodique, & il ne s'accumule point; car si l'orbite troublée *ACM* fait en *M* un plus grand angle d'inclinaison que l'orbite primitive en *N*, il arrivera le contraire quand la planète aura passé le nœud *N*, ensorte que l'inclinaison se rétablira par les mêmes degrés; il n'y a que les nœuds dont le mouvement est toujours du même sens, & qui rétrogradent de plus en plus, soit que la lune tende à son nœud,

Changement d'inclinaison.

ſoit qu'elle s'en éloigne. Ainſi je parlerai ſeulement du mouvement des nœuds, dont l'uſage revient ſouvent dans l'aſtronomie ; il produit lui-même un changement dans les inclinaiſons des orbites planétaires quand on les rapporte à l'écliptique (1378) ; & cette variation eſt extrêmement ſenſible pour les ſatellites de Jupiter (2945).

Ce mouvement du nœud pour chaque inſtant eſt différent à raiſon de la diſtance de la planète à ſon nœud, & de la diſtance de la planète troublante à ce même nœud ; il faut donc trouver d'abord une expreſſion générale du mouvement du nœud dans un inſtant infiniment petit, & cherchant enſuite ſon intégrale, on aura le mouvement pour une révolution entière.

3518. *Trouver l'expreſſion générale du mouvement des nœuds.* Soit *TOE* (*fig.* 298) l'orbite de la terre pour laquelle on cherche le mouvement du nœud, par rapport à l'orbite de Jupiter *MP* ; *S* le ſoleil qui eſt au centre de ces orbites ; *M* la planète dont l'attraction cauſe ce mouvement, c'eſt-à-dire, Jupiter ; *SN* la ligne d'interſection des deux orbites, enſorte que le demi-cercle ☊ *TO* ſoit relevé au-deſſus du plan de la figure ; *Tp* le mouvement de la terre ſur ſon orbite dans un inſtant très-court, tel que *dt*. On tirera une petite ligne *pq* parallèle au rayon vecteur *SM* de Jupiter, pour exprimer la force avec laquelle Jupiter tend à éloigner la terre *T* de ſon orbite, parallèlement à *SM* ; la terre étant retirée de *p* en *q* par l'action de Jupiter, ſon vrai mouvement au lieu d'être *Tp* ſe fait de *T* en *q* ; la ligne *Tq* exprime l'orbite compoſée que décrit la terre dans ce moment-là, tandis que *Tp* exprime l'orbite primitive qu'elle décriroit ſi l'action de Jupiter ne l'avoit pas retirée de *p* en *q*.

Fig. 298.

On prolongera la tangente *Tp* de l'orbite, & elle ira rencontrer en un point *N* la ligne des nœuds *SON*, ou la commune ſection du plan de l'écliptique & de l'orbite de Jupiter ; de même ſi l'on prolonge la ligne *Tq* du mouvement compoſé, elle ira rencontrer le plan de l'orbite de Jupiter en un autre point *n*, & *Sn* ſera la ligne des nœuds pour cette nouvelle orbite ; ainſi l'angle *NSn*

exprimera le mouvement du nœud ou le changement que la commune ſection des deux plans éprouve par l'action de Jupiter, c'eſt la quantité que nous cherchons, & dont il faut trouver l'expreſſion, nous appellerons dq ce petit angle NSn.

3519. Ayant joint les points N & n par une ligne Nn, elle ſera parallèle à pq; car les triangles Tpq, TNn ſont dans un plan dont toutes les lignes parallèles à pq ſont auſſi parallèles à la ligne SM; donc la ligne menée par le point N parallélement à SM & à pq, eſt dans le plan du triangle Tpq; mais elle eſt de plus dans l'orbite même de Jupiter, auſſi bien que SM, donc elle appartient à l'orbite & au triangle, donc elle eſt la commune ſection de l'orbite & du triangle TNn. Les deux triangles Tpq, TNn ſont ſemblables; donc $Tp : TN :: pq : Nn$, & $Nn = \frac{TN}{Tp} pq$.

Si l'on appelle M la maſſe de Jupiter, celle du ſoleil étant 1, f ſa diſtance au ſoleil, s ſa diſtance à la terre, c'eſt-à-dire, MT, la force perturbatrice de Jupiter ſur la terre ſera $\frac{M}{s^2}$ (3386); décompoſée ſuivant MS elle devient $\frac{Mf}{s^3}$ (3438); il en faut retrancher la force ſur le ſoleil, ou $\frac{M}{f^2}$, & l'on a la force perturbatrice dans la direction SM ou dans la direction pq qui lui eſt parallèle, $= M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$, c'eſt cette force que nous appellerons F.

L'eſpace $pq = F dt^2$, parce que les eſpaces parcourus ſont comme les carrés des temps (3365); ainſi $Nn = \frac{TN}{Tp} F dt^2$. La perpendiculaire $Rn = Nn.$ ſin. nNR; mais l'angle nNR eſt égal à l'angle $MS☊$, diſtance de Jupiter au nœud, à cauſe du parallélisme des lignes SM, Nn; donc $Rn = Nn.$ ſin. $MS☊ = \frac{TN}{Tp} F dt^2.$ ſin. $MS☊$.

3520. La valeur de l'angle NSn, qui eſt le mouvement du nœud, ou l'arc diviſé par le rayon (3357), eſt $\frac{Rn}{Sn} = \frac{TN}{Tp.NS} F dt^2.$ ſin. $MS☊$; mais $NS : TN :: R :$ ſin. TSN, Différentielle du mouvement du nœud.

en ſuppoſant l'orbite circulaire, ou l'angle T de 90°; donc $\frac{TN}{NS}$ = ſin. TSN ou $TS☊$; donc l'angle $NSn = dq = \frac{F\,dt^2}{Tp}$ ſin. $MS☊$. ſin. $TS☊$, c'eſt l'expreſſion du mouvement du nœud.

Si l'on ſuppoſe que le mouvement moyen de Jupiter ſoit à celui de la terre, comme p eſt à 1, p étant, par exemple, $\frac{1}{12}$, quand la terre aura décrit un angle u, Jupiter aura parcouru un arc égal à pu (ou $\frac{1}{12}u$), en partant du même point, & la différence de leurs mouvemens, ou l'angle de commutation MST ſera $u - pu$, ou $(1-p)u = t$; ſi le mouvement du nœud eſt q, la diſtance $MS☊$ ſera $pu - q$, & la diſtance $TS☊$ qui eſt la ſomme de MST & $MS☊$ ſera $u - q$. On ſubſtituera ces deux expreſſions dans la formule qui renferme la valeur de dq.

3521. A la place de l'élément du temps dt qui eſt ſuppoſé conſtant, parce que le temps eſt uniforme, on peut mettre le mouvement Tp que j'appellerai du, qui eſt également uniforme, & proportionnel au temps, dans une orbite circulaire; alors on aura $\frac{F\,dt^2}{Tp} = \frac{F\,dt^2}{du} = F\,du$, on ſubſtituera cette valeur dans l'expreſſion du mouvement du nœud, on mettra auſſi à la place de F ſa valeur $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$, & l'on aura le mouvement du nœud, $dq = M\,du\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ ſin. $(pu - q)$ ſin. $(u - q)$, dont il ſera aiſé de trouver l'intégrale, quand on aura les valeurs de f & s, exprimées en ſinus de l'angle u, ou de ſes multiples.

3522. Nommant t l'angle de commutation MST, on a la valeur de $\frac{1}{MT^3}$ ou $\frac{1}{s^3}$, exprimée par une ſérie de cette forme $A + B$. coſ. $t + C$. coſ. $2t + D$. coſ. $3t$, &c. (3485, 3499), dont les coëfficiens A, B, C ſont ſuppoſés connus; ainſi l'on aura $dq = M\,du\,(fA - \frac{1}{f^2} + Bf$. coſ. $t + Cf$. coſ. $2t$, &c.) ſin. $(pu - q)$ ſin. $(u - q)$; ſi l'on acheve effectivement la multiplication de ſin. $(pu - q)$ ſin. $(u - q)$,

l'on aura (3622) $\frac{1}{2}$ cof. ($1-p$) u — $\frac{1}{2}$ cof. ($u+pu-2q$), qu'il faut encore multiplier par $M du$ ($fA - \frac{1}{f^2} Bf$ cof. t, &c.). En mettant ($1-p$) u à la place de l'angle t, on aura dans le produit un grand nombre de termes, parmi lefquels il y aura le produit de $\frac{1}{2}$ cof. ($1-p$) u par Bf. cof. t ou Bf. cof. ($1-p$) u ; ce produit eft Bf [$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ cof. ($2-2p$) u] (3627) ; le terme $\frac{1}{4}$ ne renferme aucun finus, & par conféquent aucune quantité dont le retour foit périodique ; il exprime donc une quantité qui ira toujours en croiffant, & qui donnera $dq = MBfdu. \frac{1}{4}$, pour l'élément ou la différentielle du mouvement du nœud, en négligant tous les termes où il y a des finus ; l'intégrale eft $\frac{MBfu}{4}$; c'eft donc le mouvement du nœud de la terre fur l'orbite de Jupiter, pendant le temps que la terre décrira un angle u ; fi à la place de u nous mettons 360°, nous aurons le mouvement du nœud pour une révolution entière de la terre, ou le mouvement annuel MBf. 90°. Mouvement total du nœud.

3523. Exemple. Soit M la maffe de Jupiter $= \frac{1}{1067}$, celle du foleil étant 1, $f = 5,2$ (1222) ; $B = 0,004384 = \frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}$ (3485) ; $90° = 324000''$; ainfi $MBf 90° = 6'',924$. J'ai fait ufage de cettte quantité pour avoir le changement de latitude des étoiles (2736). De femblables calculs appliqués à toutes les planètes m'ont fait trouver le mouvement des nœuds de chacune par l'action de toutes les autres (*Mém. acad.* 1758, *pag.* 261), & j'en ai donné le réfultat ci-deffus (1347) avec différentes remarques fur cette théorie.

3524. Le mouvement des nœuds de la lune, qui, fuivant les obfervations, eft de 1° 26′ 48″ pour chaque révolution de la lune (1489), fe trouve par la formule précédente, à un vingtième près ; je vais en donner le calcul, en négligeant non-feulement la parallaxe du foleil, mais encore l'excentricité de l'orbite lunaire, celle du foleil, & toutes les inégalités de la lune ; on peut voir dans les auteurs cités (1477), qu'en négligeant moins de chofes, Nœud de la Lune.

on trouve ce mouvement bien mieux d'accord avec l'obſervation.

3525. La force $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ (3519), ſe réduit à $-\frac{3\ S.\ \text{coſ.}\ t}{f^3}$, en ſuppoſant que TM ſoit égale à la différence de MS à ST, (3477, 3530), & S la maſſe du ſoleil; donc on a (3521), $dq = \frac{3S}{f^3}\ du.\ \text{coſ.}\ (1 - p)\ u.\ \text{ſin.}\ (pu - q)\ \text{ſin.}\ (u - q)$; en faiſant la multiplication de ces trois facteurs, on trouvera un terme qui ſera $\frac{\text{coſ. zéro}}{4}$, ou égal à $\frac{1}{4}$; tous les autres renfermant des ſinus; ce terme donnera donc cette équation $dq = \frac{3S}{4f^3}\ du$, dont l'intégrale $q = \frac{3Su}{4f^3}$ eſt le mouvement du nœud pendant une révolution entière de la lune; on mettra à la place de u les 360°, ou 1296000″; au lieu de $\frac{S}{f^3}$, ſa valeur qui revient à celle de t^2 (3407); à ſon logarithme 7,7478192 on ajoutera celui de $\frac{3}{4}$ & celui de 360°, on aura le logarithme de 1° 30′ 38″, qui eſt le mouvement du nœud de la lune: L'obſervation donne 1° 26′ 48″; mais cet exemple ſuffit pour faire comprendre l'eſprit de la méthode, & l'on voit aſſez que pour connoître le vrai réſultat de la théorie, il faudroit employer plus de termes.

Son mouvement.

DE LA PRECESSION DES EQUINOXES.

3526. La préceſſion des équinoxes ou l'effet des attractions qu'exercent le ſoleil & la lune ſur le ſphéroïde terreſtre, eſt une des parties les plus difficiles du calcul des attractions céleſtes; Newton s'y eſt mépris: M. d'Alembert, M. Euler, M. Simpſon, M. le Chevalier d'Arcy, M. de Silvabelle, le P. Walmeſley & le P. Friſi (*De gravitate*, 1768), ſe ſont exercés ſur cette matière & ne ſont point d'accord; d'ailleurs aucun auteur n'en a parlé d'une manière élémentaire; enſorte que je crois faire une choſe utile en expliquant ici avec tout le détail & toute la

Auteurs qui ont parlé de la préceſſion.

clarté possible les principes & le calcul de cette grande question. La première solution de ce beau problême fut celle de Newton, (*Princip. math. L. III.*); mais elle n'étoit ni assez générale, ni assez bien démontrée; M. d'Alembert est le premier qui ait réduit ce problême en équations, & qui l'ait résolu d'une manière générale & complète, dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes*, en 1749. Il fut suivi par M. Euler, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1749; & tous deux trouvèrent un résultat différent de celui de Newton, (3562). Pour moi je suivrai principalement la méthode de Simpson (*Miscellaneous tracts.* 1757); mais je tâcherai de la simplifier & d'en démontrer toutes les parties d'une manière encore plus satisfaisante & plus élémentaire que n'avoit fait l'auteur lui-même.

3527. La théorie du mouvement des nœuds fait voir qu'une planète qui tourne dans le plan de son orbite, en est sans cesse retirée par les autres planètes (3516); il en est de même des parties du sphéroïde terrestre, qui étant relevées vers l'équateur & tournant chaque jour avec lui, sont détournées de leur mouvement naturel par les attractions latérales du soleil & de la lune, comme si la portion de matière (ou cette espece de ménisque) dont on peut concevoir que le globe est surmonté, étoit composée d'un grand nombre de planètes qui tournassent en vingt-quatre heures autour de la terre. Nous commencerons par chercher l'action du soleil & son influence sur la précession des équinoxes, parce que le calcul en est plus simple que pour la lune.

3528. Le premier pas qu'il faut faire dans cette théorie, est de trouver la force avec laquelle le soleil attire chaque point ou chaque particule de la terre. Soit S le soleil (*fig.* 300), $PADp$ un méridien terrestre, PCp l'axe de la terre, DC une ligne perpendiculaire à la ligne des centres SC, c'est-à-dire, à la ligne qui va du soleil à la terre; la force avec laquelle chaque point A du méridien est attiré par le soleil dans la direction AS, ne peut faire balancer l'axe PCp de la terre, & déplacer l'é- *Fig.* 300.

De la force du soleil sur chaque point de la terre.

Fig. 300. quateur que dans le cas où le point A ſera attiré plus que le centre C de la terre, car ſi l'un & l'autre étoient attirés avec la même force vers le ſoleil, il n'en réſulteroit aucun changement dans leur poſition reſpective (3432); il faut donc chercher l'expreſſion de la force qui agit ſur le point A, trouver ce qui en réſulte dans la direction CS, & en retrancher la force du ſoleil ſur le centre même de la terre dans la même direction, le reſte ſera la force perturbatrice par laquelle le point A, étant plus attiré que le point C ou le point K, tend à s'éloigner de la ligne CKD perpendiculaire au rayon ſolaire CS.

3529. La force du ſoleil ſur le point A peut être exprimée par $\frac{M}{SA^2}$ (3386), en appellant M la maſſe du ſoleil; cette force ſe décompoſe, & équivaut à deux autres qui agiroient ſuivant AB & AC; & comme la force AC dirigée vers le centre de la terre ne produit aucune perturbation, il ne reſte que la force ſuivant AB ou ſuivant CS qui lui eſt parallèle, cette force eſt $\frac{M.CS}{SA^3}$ (3438); il en faut ôter la force du ſoleil ſur le centre de la terre qui eſt $\frac{M}{CS^2}$, & l'on aura la force perturbatrice $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)$, dans la direction de la ligne des centres CS.

3530. Pour ſimplifier cette expreſſion l'on conſidérera que $SA=CS-AK$, du moins à très-peu près, à cauſe de la grande diſtance SA qui rend l'angle CSA très-petit; donc $\frac{1}{SA^3}=(CS-AK)^{-3}$, & réduiſant cette expreſſion en ſérie (3286) $=\frac{1}{CS^3}+\frac{3AK}{CS^4}$, &c. On peut négliger les termes ſuivans qui ſeroient diviſés par des puiſſances plus élevées de CS, & qui ſeroient par conſéquent beaucoup moindres; ainſi $\frac{M.CS}{SA^3}=\frac{M}{CS^2}+\frac{3AK.CS.M}{CS^4}$; donc la force perturbatrice $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)$ ſe réduira à $\frac{M.3AK}{CS^3}$. Ainſi cette force eſt proportionnelle à AK, c'eſt-à-dire, à la diſtance de chaque point A de la terre à la ligne CD perpendiculaire

perpendiculaire au rayon SC : nous rappellerons cette considération quand il s'agira des marées (3592). Fig. 300.

3531. Au lieu de la masse du soleil M qui entre dans cette expression, il faut y introduire la force centrifuge que nous éprouvons sous l'équateur, & qui est $\frac{1}{289}$ de la gravité des corps terrestres. Si l'on appelle a le rayon de l'équateur, t le temps de la rotation diurne de la terre, T la durée de la révolution annuelle, on aura $M = \frac{Cs^3 \beta . tt}{a^3 T^2}$ (3416), & par conséquent si l'on fait $a=1$, la force perturbatrice du soleil sur une particule A de la terre exprimée en parties de la force centrifuge terrestre sera $\frac{3\beta tt.}{T^2}$ AK.

Expression de la force perturbatrice.

3532. Ainsi cette force est proportionnelle à AK ou à la distance de chaque particule au plan CKD du cercle d'illumination, & lorsque AK devient égal à l'unité, c'est-à-dire, au rayon de l'équateur, l'on a $\frac{3\beta tt}{T^2}$ pour la force perturbatrice sous l'équateur, c'est ce que nous appellerons γ dans les articles suivans. Cette force du soleil exprimée en nombres est $3 . \frac{1}{(365)^2 . 289} = \frac{1}{12852000}$ de la gravité totale des corps terrestres dont nous avons parlé (3361), ainsi la force du soleil $\gamma = \frac{1}{12852000}$ de la gravité ordinaire ; c'est la force par laquelle le soleil tend à détacher de la terre une particule située sous l'équateur, & cela dans la direction CS.

Force du soleil par rapport à la gravité.

3533. La force du soleil sur une particule de la terre étant connue, il faut trouver la force totale qui en résulte pour faire tourner l'ellipse entière du méridien, & ensuite le sphéroïde. Supposons donc que toutes les parties d'une ellipse telle que FCN (*fig.* 301), sont sollicitées comme ci-dessus ; considérons une ordonnée EC au diamètre OF, & nous chercherons la somme des forces qui s'exercent sur cette ligne entière ; choisissons un point V ou une particule V de matière prise sur la ligne EC, la force étant proportionnelle à la distance de chaque particule au diamètre MON, on aura cette proportion ; a est à γ, comme OD est à la force cherchée, qui sera $\frac{\gamma}{a}$ OD. Fig. 301.

Fig. 301.

Considération du bras de levier.

3534. Cette force ou cette tendance de chaque partie de la terre vers le ſoleil exige encore une conſidération eſſentielle ſur laquelle il eſt néceſſaire d'inſiſter, c'eſt celle du bras de levier *DV* auquel cette force eſt appliquée. Si la force $\frac{\gamma}{a}$ *OD* qui agit ſur la particule *V* étoit appliquée en *D*, ou ſi au lieu de la particule *V*, on conſidéroit la particule *D*, on n'auroit aucun mouvement dans l'ellipſe, la particule *D* tend à ſe détacher du centre *O* ſuivant *OD*, mais non pas à faire tourner l'ellipſe autour du centre, cette force n'agit pas plus pour faire tourner l'ellipſe, que ſi elle étoit appliquée au centre *O*; car, ſuivant les élémens de mécanique, on peut conſidérer une même force dans tous les points de ſa direction, c'eſt-à-dire, en *O*, en *D* & en *T*. Au contraire il eſt évident que la même force appliquée en *C* y produira plus d'effet pour faire tourner l'ellipſe, que dans tout autre point de la ligne *DC*; cependant l'expreſſion $\frac{\gamma}{a}$ *OD* eſt égale pour tous les points de la ligne *BDC*, parce qu'elle indique ſeulement la quantité dont chaque point de la ligne *BDC* tend à s'éloigner de la ligne *MON*; il faut donc multiplier la tendance que chaque particule de matière *V* a pour s'éloigner de la ligne *MN*, par ſa diſtance *DV* à la ligne des centres *OT*, pour avoir ſon énergie, ou l'effet qu'elle doit produire pour faire tourner la terre autour de *O*; l'on ne voit pas d'abord quel produit donnera une force multipliée par une ligne, mais il nous ſuffira d'avoir la ſomme de toutes ces forces de rotation ainſi exprimées, nous les comparerons à celles d'un autre corps dont le mouvement ſera connu, en exprimant de la même manière les forces de celui-ci (3552), & nous en conclurons le mouvement de l'équateur terreſtre; ce n'eſt ici qu'un terme de comparaiſon : quand je multiplie la force du point *V* par *DV*, & la force du point *C* par *DC*, cela veut dire que ces forces ſont entre elles comme *DV* eſt à *DC*, ce qui eſt évident.

Force de chaque particule pour faire tourner la terre.

3535. L'on a donc la quantité $\frac{\gamma}{a}$ *OD*. *DV* pour l'ef-

ficacité ou l'énergie de la force par laquelle chaque particule V tend à faire tourner l'ellipſe ; & ſi l'on fait $DV = z$ & la particule ou l'élément $V = dz$, on aura $\frac{\gamma}{a} z\,dz\,OD$, dont l'intégrale $\frac{\gamma}{2a} z^2\,OD$ eſt la force de la ligne DV; ainſi $\frac{\gamma}{2a} DC^2 . OD$ ſera la force de la ligne totale DC.

3536. Par la même raiſon l'effort de toutes les particules de la ligne BD pour faire tourner l'ellipſe, ſera $\frac{\gamma}{2a} OD . BD^2$, & comme celles-ci agiſſent pour faire tourner la terre du côté oppoſé, il faudra prendre la différence des deux efforts, & l'on aura $\frac{\gamma}{a} . \frac{1}{2} OD (BD^2 - CD^2) = \frac{\gamma}{a} . \frac{1}{2} OD (BD + CD)(BD - CD) = \frac{\gamma}{a} OD . BC . DE$; c'eſt la force qui réſulte de toutes les attractions ſur l'ordonnée BC, pour faire tourner l'ellipſe ſur ſon centre. Force d'une ligne entière.

$OF = c$
$OM = p$
$FH = f$
$OH = g$
$OD = y$
$OE = x$

3537. Pour en conclure la force de l'ellipſe toute entière, il faut l'exprimer algébriquement par le moyen des diamètres. Suivant la propriété ordinaire de tous les diamètres OF, OM d'une ellipſe par rapport aux ordonnées BE, EC (3257), on a $CE^2 = BE^2 = \frac{pp}{cc}(cc - xx)$, mais à cauſe des triangles ſemblables OFH, ODE, on a ces deux proportions :

$$\left.\begin{matrix} OF : FH :: OE : OD \\ c : f :: x : y \end{matrix}\right\} \;\&\; \left\{\begin{matrix} OF : OH :: OE : ED \\ c : g :: x : ED \end{matrix}\right.$$

ainſi $OD = y = \frac{fx}{c}$ & $ED = \frac{gx}{c}$; au moyen de ces valeurs la force $\frac{\gamma}{a} OD . BC . ED$ de l'ordonnée entière BC ſera $= \frac{\gamma}{a} \frac{fx}{c} . \frac{2p}{c} \sqrt{cc - xx} . \frac{gx}{c}$. On concevra une autre ordonnée infiniment proche, dont la diſtance meſurée ſur OD ſoit appellée dy; multipliant par dy la force ſur l'ordonnée BC, l'on aura la force ſur le petit rectangle qui eſt l'élément de l'ellipſe, & l'intégrale donnera la force ſur l'ellipſe toute entière. Au lieu de dy on peut mettre

Fig. 301. $\frac{fdx}{c}$, & l'on aura la force ſur l'élément de l'ellipſe $\frac{\gamma}{a}$. $\frac{ffgxx.2p}{c^4}\sqrt{cc-xx}.dx$, ou $\frac{\gamma fg}{ac^2}.\frac{2pf}{c^2}\sqrt{cc-xx}.xxdx$; dont il faut prendre l'intégrale.

3538. On conſidérera que l'élément de la ſurface de l'ellipſe eſt égal à $\frac{2p}{c}\sqrt{cc-xx}.\frac{fdx}{c}$, c'eſt-à-dire, l'ordonnée $\frac{2p}{c}\sqrt{cc-xx}$, multipliée par la petite diſtance d'une ordonnée à l'autre qui eſt dy, ou $\frac{fdx}{c}$. Si l'on appelle A l'intégrale de cet élément $\frac{2pf}{cc}\sqrt{cc-xx}.dx$, ou la ſurface de l'ellipſe, on aura l'intégrale de l'autre élément (qui contient xx de plus), ou $\int\frac{2pf}{c^2}\sqrt{cc-xx}.xxdx$, égal à $A.\frac{c^2}{4}$, lorſque $x=c$ (3326); ainſi l'intégrale, ou la force de l'ellipſe entière ſera $\frac{\gamma fg}{ac^2}.A\frac{c^2}{4}=\frac{\gamma}{a}.\frac{fgA}{4}=\frac{\gamma}{a}.\frac{1}{4}FH.OH.A$, mais $OH.FH=mn(aa-bb)$, en appellant m & n le ſinus & le coſinus de l'angle AOH (3275); donc la force ou l'énergie cherchée eſt $\frac{\gamma}{a}.\frac{1}{4}mn(aa-bb)A$, ſur l'ellipſe toute entière; c'eſt la force avec laquelle cette ellipſe, par exemple, un méridien de la terre, tend à faire tourner la terre du nord au ſud, ou du ſud au nord.

Force totale de l'ellipſe.

3539. Puiſque AOG eſt le grand axe de l'ellipſe, ou le diamètre de l'équateur terreſtre, & qu'on ſuppoſe le ſoleil agir ſur la ligne ODT, il s'enſuit que l'angle AOT eſt égal à la déclinaiſon du ſoleil, mais le ſinus de l'angle $AOH=m$ & ſon coſinus $=n$ (3275, 3538), donc mn eſt le produit du coſinus & du ſinus de la déclinaiſon du ſoleil (3558).

3540. Ce que nous venons de démontrer pour l'ellipſe $FMGA$, qui forme le méridien ou la ſection du ſphéroïde terreſtre par ſon axe, ſe démontreroit également pour toute autre ſection de la terre parallèle au méridien; car toutes ces ſections ſont des ellipſes ſemblables au méri-

dien (3283). Ainsi l'on connoît la force du soleil sur une ellipse qui fait portion d'un sphéroïde : on peut imaginer une autre ellipse, ou une autre section du sphéroïde infiniment proche de la première, & qui lui soit parallèle, la distance réciproque étant du ; la force de toute l'ellipse multipliée par du, donnera la force de toute la tranche solide qui est l'élément du sphéroïde ; en intégrant, l'on aura la force du sphéroïde tout entier, ou l'énergie totale de la force dont la terre est agitée par l'attraction du soleil sur toutes les molécules de la terre. Supposons donc que le sphéroïde terrestre est coupé parallélement à l'axe PO (*fig.* 304), ou au méridien dans lequel se trouve le soleil, à une distance $CM = u$ du centre de la terre, par un plan LMN ; la section sera une ellipse (3283), dont le demi-grand axe perpendiculaire au petit axe LN sera $\sqrt{aa - uu}$, puisque ce sera une ordonnée de l'équateur, dont le rayon est a, prise à la distance u du centre. Si l'on nomme A la surface de l'ellipse du méridien $EPQO$, l'on aura $aa : aa - uu :: A : A\frac{aa - uu}{aa}$, surface de la petite ellipse ; pour avoir la force de toutes les parties de cette ellipse, il faudra mettre dans l'expression de la force totale (3538), cette surface à la place de A. *Fig.* 304.

Il faut par la même raison mettre la différence des carrés des axes de cette petite ellipse au lieu de la différence $aa - bb$, qui avoit lieu dans la grande ellipse ; on trouvera la différence des carrés des axes de la petite ellipse, en considérant que cette différence est proportionnelle à la surface de l'ellipse ; car dans deux ellipses semblables les demi-axes ont le même rapport ; l'excentricité étant $\sqrt{aa - bb}$; la surface de l'ellipse est comme le carré de cette excentricité ou comme $aa - bb$, c'est-à-dire, comme la différence des demi-axes ; ainsi $A : A . \frac{aa - uu}{aa} :: aa - bb : \frac{aa - bb}{aa} (aa - uu)$; c'est la différence des axes qu'il faut mettre à la place de $aa - bb$ (3538), & l'on aura $\frac{\gamma}{a} . \frac{mn}{4} \left(\frac{aa - bb}{aa}\right) . \left(\frac{aa - uu}{aa}\right)^2 A$, pour

l'énergie de la petite ellipſe ; il faut la multiplier par du, & intégrer, la multiplication donnera $A . \frac{\gamma}{a^5} . \frac{mn}{4}$ $(aa - bb)(a^4 du - 2a^2 u^2 du + u^4 du)$, intégrant chaque terme (3300), on a $\frac{A\gamma}{a^5} . \frac{mn}{4} (aa - bb)(a^4 u - \frac{2}{3}$ $a^2 u^3 + \frac{u^5}{5})$.

3541. Lorſque $u = a$, c'eſt-à-dire, au rayon entier CQ de l'équateur, la quantité précédente eſt égale à l'efficacité de toutes les particules qui compoſent le demi-ſphéroïde ; & celle du ſphéroïde entier qui en eſt le double, devient $\frac{A\gamma}{a^5} . \frac{mn}{4} (aa - bb) . 2 (a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{a^5}{5}) = \frac{4}{15} A\gamma$ $mn (aa - bb)$, eſt l'efficacité du ſphéroïde entier; mais $\frac{4aA}{3}$ eſt la maſſe entière du ſphéroïde, (3331), que nous appellerons S; donc mettant $\frac{3S}{4a}$ à la place de A, la force deviendra $\frac{\gamma}{5} (aa - bb) \frac{mn}{a} S$; & mettant à la place de γ ſa valeur $\frac{3\beta tt}{T^2}$, (3531), l'on aura enfin $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa - bb)$ $\frac{mn}{a} S$, expreſſion de la force totale du ſoleil pour faire tourner le ſphéroïde terreſtre du nord au ſud. Il s'agit d'en conclure le changement de l'axe, ou l'angle que l'axe doit parcourir en vertu de cette force ; c'eſt ici où commence la principale difficulté du problême, & l'élégance particulière de la méthode que j'explique, où ce problême eſt réduit à la plus ſimple dynamique.

Force totale du ſoleil.

Méthode pour réſoudre le problême.

3542. Nous connoiſſons la force du ſoleil ſur le ſphéroïde terreſtre (3541), & cette force doit produire à l'extrémité de l'axe de rotation un déplacement que nous appellerons r, en ſorte que le plan de l'équateur de la terre doit s'incliner vers le ſoleil en tournant autour d'un de ſes diamètres, en même temps qu'il tourne par la rotation diurne autour de l'axe du monde qui eſt perpendiculaire à ſon plan ; cherchons donc en général quelle force il faudroit appliquer perpendiculairement à chaque point de l'équateur pour entretenir ce petit mouvement r du

plan de l'équateur, en même temps que chaque particule contenue dans ce plan continueroit son mouvement de rotation; quand nous aurons trouvé la force totale qui seroit nécessaire pour produire un mouvement r, nous aurons par une simple règle de trois (3555), le mouvement que produit la force donnée du soleil dans un instant infiniment petit. Ainsi nous avons considéré la force du soleil telle qu'elle s'exerce sur chaque particule du sphéroïde, & nous avons trouvé la force totale exercée sur ce sphéroïde, nous allons chercher de la manière la plus facile le rapport entre un mouvement r, & la force totale exercée sur un sphéroide & nécessaire pour le produire; il faut commencer par le cas le plus simple, en ne prenant d'abord que le seul cercle de l'équateur, & une seule particule de matière qui tourneroit librement dans la circonférence de ce cercle, comme tourne la terre, en même temps que le plan de l'équateur sur lequel elle se meut, auroit un mouvement r, & nous trouverons qu'il faut à cette particule de matière une force qui soit $= 2\, r\, \beta$ cos. AR.

De la force nécessaire pour conserver le mouvement r. *Fig.* 302.

3543. Probleme. Soit un corpuscule R de matière (*fig.* 302), qui tourne librement & uniformément sur une circonférence $ARFB$ égale à l'équateur terrestre, d'occident en orient, tandis que le plan de l'équateur tourne lui-même du nord au sud, autour du diamètre AB par un mouvement infiniment plus lent, dont la vîtesse soit r, au point F où elle est la plus grande; on demande la force dont il faut que le corpuscule R soit agité à chaque point de l'arc AF, ou à chaque instant, perpendiculairement au plan de l'équateur, pour pouvoir demeurer toujours dans le plan qui tourne sur le diamètre AB.

Solution. Soit $ARFB$ la situation de l'équateur au moment où le corpuscule est en R; $ANHZB$ la situation de l'équateur au second instant, lorsque le corpuscule R aura parcouru l'arc RE de l'équateur, ou la partie RM de la tangente, qui ne diffère pas de RE (3314). Ce corpuscule a reçu en R par le mouvement du plan, une impression perpendiculaire au plan $ARFB$, capable de lui faire par-

Fig. 302. courir *RN* qui exprime la vîteſſe du plan en *R*, tandis qu'il a ſon mouvement dans l'équateur exprimé par *RM*; ainſi il doit parcourir la diagonale du parallélogramme *RNVM*, & arriver en *V* à la fin du ſecond inſtant, enſorte que *MV* ſeroit égale à *RN*, en ne conſidérant que ces deux impreſſions *RN* & *RM*. Mais la diſtance des deux cercles *ARF* *ANH* eſt plus grande vis-à-vis du point *M*, que vis-à-vis du point *R*, ainſi le point *V* n'eſt pas dans le plan du cercle *ANHB* qui repréſente la ſituation de l'équateur dans le ſecond inſtant; il s'en faut d'une quantité telle que *VC*, en ſuppoſant la ligne *GHC* parallèle à la ligne *DN*, l'une & l'autre dans le plan du cercle *ANHB*; il faut donc que le corpuſcule à la fin du ſecond inſtant reçoive une ſeconde force capable de lui faire parcourir *VC*, pour qu'il puiſſe accompagner le plan de l'équateur malgré ſon mouvement; c'eſt cette force que nous cherchons. Quoique le point *C* ne ſoit pas ſur la circonférence même du cercle *ANH*, mais hors du cercle, de la quantité *CH*, nous négligerons cette différence, & nous ne ferons point attention à la force qui ſeroit néceſſaire pour le ramener en *H*. Si nous négligeons cette quantité *CH*, ce n'eſt pas (comme on pourroit le conclure des termes de M. Simpſon), que cette force n'intéreſſe pas notre problême, mais c'eſt parce qu'elle eſt infiniment plus petite que la force *VC*, dont nous cherchons la valeur; cette quantité *CH* n'eſt que l'écart de la tangente pour un petit arc *MC* qui eſt ſuppoſé infiniment plus petit que *RM* ou *NV*; donc *CH* eſt un infiniment petit du troiſième ordre, tandis que la force *CV* que nous cherchons eſt un infiniment petit du ſecond ordre. Cela me paroît ſuffiſant pour répondre à une des objections que M. le Chevalier d'Arcy a faites contre la ſolution de M. Simpſon.

3544. Suppoſons que les triangles plans *DRN*, *GMC* ſoient perpendiculaires à la commune ſection *ADOB*, & que *RN* ſoit perpendiculaire à *DR*, & *MC* perpendiculaire à *GM*, rencontrant en *C* le plan du cercle *ANHB*, ou la ligne *GH* prolongée en *C*; on tirera *NV* parallèle à la tangente *RM*, & elle rencontrera *MC* en *V*. Suppoſons

que

que *RM* exprime la vîtesse du corps dans la circonférence *ARF*, la vîtesse qu'il a reçue par le seul mouvement du cercle *ARF* seroit *RN*, car le corps *R* se trouveroit en *N* en vertu de ce mouvement; & terminant le parallélogramme *RMVN*, le point *V* est celui où le corps animé de sa vîtesse *RM*, & de la vîtesse *RN* du plan de l'équateur, arriveroit, s'il étoit libre, dans le même temps qu'il met à parcourir *RM*; dans ce cas il s'écarteroit du plan de ce cercle de la quantité *CV*; ainsi pour que le corps *R* reste dans le plan du cercle *ANH*, il faut une force capable de contrebalancer cette vîtesse *CV*, ou de faire parcourir *CV*; cette force varie continuellement, parce que la vîtesse *RN* du plan de l'équateur est différente à chaque point; la force que nous cherchons est la plus grande quand le corps est en *A*, car lorsqu'il décrit *AX*, il n'a reçu en *A* aucune vîtesse du plan, & il a besoin d une force exprimée par *XY* pour pouvoir rester dans l'équateur. On néglige encore ici la différence entre la vîtesse *AX* & la vîtesse *AY*, parce que *XY* n'étant qu'un infiniment petit du second ordre, la différence entre *AX* & *AY* n'est qu'un infiniment petit du troisième.

3545. Pour trouver une force capable de retenir continuellement le corps dans le plan du cercle mobile *AR*, il faut trouver la force capable de lui faire parcourir *CV* dans le même temps; il faut donc que cette force soit à la force centrifuge, comme *CV* est à *ET*, qui est l'espace que feroit parcourir la force centrifuge; car les espaces décrits dans un même temps, sont comme les forces accélératrices en vertu desquelles ils sont décrits (3368).

3546. La vîtesse du mouvement diurne *RM* étant prise pour unité, nous avons appellé r le mouvement angulaire de l'axe ou du plan de l'équateur; ainsi $r \cdot RM$ sera la vîtesse *ZF* du plan de l'équateur en *F*, c'est-à-dire, la vîtesse d'un point *F*, & $r \cdot RM \frac{DR}{OF}$ sera la vîtesse *RN* du point *R*, puisque $ZF : RN :: \text{sin.}\ AF : \text{sin.}\ AR :: OF : DR$ (892).

A cause des triangles semblables *DRN*, *GMC*, on

Fig. 302. aura $DR : RN :: GM : MC$, ou $DR : r. \frac{RM.DR}{OF} :: DR + SM : MC$; donc $MC = r. \frac{RM.DR}{OF} + r \frac{RM.SM}{OF}$; nous en retrancherons $MV = RN = r. \frac{RM.DR}{OF}$, & il reſtera $CV = r. \frac{RM.SM}{OF}$. La force centrifuge du corps qui ſe meut dans la circonférence ARF, eſt égale à $\frac{RM^2}{2\,OF}$ (3391); donc CV eſt à l'effet de la force centrifuge, comme $r.SM : \frac{1}{2} RM :: 2r.SM : RM$; mais $OD : OA :: SM : RM$ (3307); donc CV eſt à l'effet de la force centrifuge $:: 2r.OD : OA$. Ainſi pour que le corps A demeure conſtamment dans le plan de l'équateur, quand l'équateur tournera autour du diamètre AB, il faut qu'il y ait une force perpendiculaire au plan de l'équateur, qui varie comme la diſtance au plan dans lequel ſe fait le mouvement de l'axe, c'eſt-à-dire, au plan qui paſſe par OF perpendiculairement à la figure & au cercle AFB, ou ſi l'on veut, une force qui varie comme le ſinus de la diſtance RF, ou le coſinus de la diſtance AR au diamètre AB, & qui dans le point A où elle eſt la plus grande, ſoit égale à la force centrifuge β multipliée par $2r$. *C'eſt ce qu'il falloit trouver.*

Force pour un corpuſcule dans l'équateur.

Cette force proportionnelle à la diſtance de chaque particule à une ligne OF, ou à un plan qui paſſe par OF, perpendiculaire à la ligne des centres du ſoleil & de la terre, eſt de même eſpèce que celle dont chaque particule de la terre eſt attirée par le ſoleil (3531).

Cette force eſt nulle quand le corps eſt en F; car on voit bien qu'alors RN eſt parallèle & égale à CM, la différence CV s'évanouit; la ſeule vîteſſe du plan de l'équateur autour de ſon diamètre AB, qui eſt commune au corps R, ſuffira pour qu'il reſte dans le plan de l'équateur.

3547. On néglige ici la petite différence qu'il y a entre la vîteſſe réelle du corps R, & ſa vîteſſe, ſuppoſée uniforme, dans le plan ARF; il eſt bien vrai que la vîteſſe réelle de R en C n'eſt pas rigoureuſement uniforme, ſi la vîteſſe eſt ſuppoſée uniforme dans le plan ARF, mais la

différence est infiniment plus petite que la force *CV*, car puisque l'angle *RAN* est supposé infiniment petit, *RN* est infiniment petite par rapport à la vîtesse de rotation *RM*; si l'on conçoit une ligne de *N* en *C*, elle fera un angle infiniment petit avec *NV*; donc la différence de *NV* à *NC* sera infiniment plus petite que *CV* (3351); donc si *CV* est un infiniment petit du second ordre, la différence que l'on néglige ici sera un infiniment petit du troisième. Cela suffit, ce me semble, pour répondre à l'objection de M. le Chevalier d'Arcy (*Mém. acad.* 1759). Fig. 301.

3548. Cette force nécessaire pour un seul corpuscule qui tourneroit dans la circonférence de l'équateur, nous fera trouver ce qui doit arriver dans un plus grand nombre de corpuscules qui formeroient un anneau continu *AFB* dans le plan de l'équateur, & même dans le cas où il y auroit des anneaux concentriques, tels que *GIK*, qui tourneroient également au dedans de l'équateur; & nous allons démontrer que la même force, avec la même loi, aura toujours lieu, & suffira pour conserver l'équilibre & le mouvement *r* dans un sphéroïde qui seroit entièrement fluide.

Soit β la force centrifuge d'un corpuscule placé dans l'anneau extérieur *ARFB*; celle d'un corpuscule *I* placé dans un anneau intérieur *GIK*, mais toujours dans le plan de l'équateur, sera $\beta \frac{OI}{OF}$, c'est-à-dire, proportionnelle au rayon de l'anneau ou du cercle qu'il décrit (3394); ainsi la force nécessaire pour retenir le corpuscule *I* sera $2 r \beta \frac{OI}{OF}$ au point *I*.

3549. Si l'on veut considérer un corpuscule placé sous une autre latitude, par exemple, à une distance de l'équateur qui seroit égale à *GL*, on trouvera que cette force diminue comme le cosinus de la latitude, aussi bien que la force centrifuge (3394); car si l'on conçoit le plan du cercle *GLIK* relevé perpendiculairement au plan de la figure, de manière que *I* soit le pole du petit anneau, dont le diamètre est *GK*, *QO* sera égale au

A une distance quelconque de l'équateur.

Fig. 302. rayon du parallèle décrit par le point L; donc la force centrifuge qui sous l'équateur ou en G étoit $\beta . \frac{OI}{OF}$, sera $\beta . \frac{OI}{OF} . \frac{QO}{OI}$, ou $\beta . \frac{QO}{OF}$; donc la force néceſſaire pour retenir le corpuſcule dans la circonférence de ſon parallèle, au lieu d'être $2 r \beta . \frac{OI}{OF}$, ſera $2 r \beta . \frac{OI}{OF} . \frac{QO}{OI} = \frac{2 r \beta . QO}{OF}$. Or dans cette expreſſion il n'y a que OQ de variable; ainſi la force néceſſaire pour retenir chaque corpuſcule de la terre dans ſon cercle ou dans ſon anneau, à une diſtance quelconque de l'équateur, ſera encore proportionnelle à la diſtance OQ du corpuſcule par rapport au diamètre OF, ou au plan qui paſſe par OF perpendiculairement à la figure, comme dans l'article 3546, où le corps tournoit dans l'équateur.

Fig. 303. 3550. Soit un cercle $GEHF$ (*fig.* 303), ou un parallèle à l'équateur, conſidéré comme compoſé d'une infinité d'anneaux concentriques, qu'on ſuppoſe tourner uniformément autour du centre C, & de l'axe $PCOB$ par le mouvement diurne, avec une vîteſſe égale à l'unité ſous l'équateur, tandis que le centre C lui-même & la ligne droite OC qui eſt l'axe du cone GOH, tournent uniformément dans le plan du méridien ou dans la circonférence du cercle PQB, avec une vîteſſe angulaire $= r$; les forces néceſſaires pour retenir les particules du cercle $GEHF$ dans leur plan, pendant ce mouvement compoſé, ſeront les mêmes que ſi le cercle GEH tournoit autour de ſon diamètre EF perpendiculaire au plan PQB de la figure, & qu'on ſuppoſât ce diamètre immobile avec ſon centre C, & la vîteſſe angulaire du cercle GEH, c'eſt-à-dire, la vîteſſe des points G & H égale à celle qu'avoit auparavant le centre C autour du point O; en effet l'angle OCG étant toujours droit, le point G décrira l'arc GQ, & le point C un autre arc concentrique & ſemblable à GQ, le point G vu du centre C aura le même mouvement angulaire que les points G & C vus du centre C; ſi le point G parcourt un degré du cercle GQ, la poſition de la ligne CG qui fait avec OG un angle conſtant changera auſſi d'un

degré, donc la rotation autour de *C* aura été d'un degré; or, c'est ce mouvement angulaire autour du centre *C*, & du diamètre *ECF* qui exige une force capable de retenir le corpuscule dans le plan de son cercle; car le mouvement qui seroit commun au centre & à toutes les parties de la circonférence ne changeroit rien au mouvement du corpuscule dans son cercle; donc le mouvement angulaire du point *G* autour de son centre *C*, dans la nouvelle hypothèse étant le même que lorsque le centre *C* étoit immobile, la force nécessaire pour y retenir le corpuscule *G* sera encore la même; il est donc certain que les forces parallèles à *PCO*, ou perpendiculaires au plan du cercle *GE*, qui sont nécessaires pour retenir les particules dans le plan *EGFH*, seront toujours comme les distances au diamètre *GH* ou au plan *PHBQ*, dans lequel se fait le mouvement de l'axe (3546), ainsi que dans le cas de l'article 3548, quelle que soit la distance du cercle *GEHF* au centre *O*, c'est-à-dire, quelle que soit la latitude du parallèle terrestre *GEHF*. Nous pouvons donc supposer que toutes les parties de la terre sont sollicitées par une force parallèle à l'axe, qui sous l'équateur est $2r\beta$ dans les extrémités du diamètre autour duquel tourne l'équateur, & qui est toujours proportionnelle à la distance de chaque particule au plan d'un méridien perpendiculaire à ce même diamètre.

3551. Concevons un fluide homogène tournant uniformément autour de l'axe *PB*, sous la forme d'un sphéroïde aplati, *QR* étant le diamètre de l'équateur, tandis que l'axe lui-même tournera de la manière expliquée ci-dessus (3543) par un mouvement très-lent de *P* en *Q*, supposé $= r$; on comprend, par ce qui a été dit ci-dessus, que les particules du fluide, pour rester en équilibre chacune dans le plan de leur parallèle, doivent être sollicitées parallèlement à l'axe, ou perpendiculairement à l'équateur par des forces qui soient comme les distances au plan du méridien *PRBQ*, & il faut que la force soit $2r\beta$ dans le point *A* de l'équateur *QAR*, qui est situé sur le diamètre *OA*, autour duquel se fait le petit mouvement de l'équateur.

La même chose a lieu pour un fluide.

Voyons quelle eſt la force totale qui en réſulte, afin de pouvoir comparer cette force avec celle du ſoleil, dont nous avons trouvé l'expreſſion (3541).

Force totale dans le ſphéroïde.

Fig. 304.

3552. Théorême. *Si toutes les particules d'un ſphéroïde* EPQO (*fig.* 304) *ſont ſollicitées par des forces parallèles à l'axe* PO, *proportionnelles à la diſtance de chaque partie au plan qui paſſe par* PO, *ou à un méridien, comme nous avons trouvé que cela doit arriver pour que l'équateur ſe meuve du nord au ſud d'une quantité* r (3551); *& ſi les deux moitiés* PEO, PQO *du ſphéroïde ſont ſollicitées également & en ſens contraire, la ſomme de toutes ces forces, ou l'énergie de la force totale employée à faire tourner le ſphéroïde autour de ſon centre, ſera* la cinquieme *partie de celle qui auroit lieu, ſi toutes les parties du ſphéroïde étoient réunies à la diſtance* CQ *du rayon de l'équateur.*

Démonstration. Soit le demi-diamètre CQ de l'équateur $= a$; la ſurface de l'ellipſe $OEPQ = A$; ſoit γ la force qui agit ſur une particule ſituée à la diſtance CQ, ou la force que nous avons trouvée égale à $2r\beta$ (3546); la diſtance CM d'une ſection parallèle au méridien $= x$; cette ſection, dont LN eſt le diamètre, ſera auſſi une ellipſe ſemblable au méridien $OEPQ$ (3283), mais nous aurons, par la propriété de l'ellipſe, $CP^2 : LM^2 :: aa : aa - xx$; donc la ſection ſur PO étant égale à A, la ſection ſur LN ſera $A\frac{aa-xx}{aa}$, parce que les figures ſemblables ſont comme les carrés de leurs côtés omologues; ainſi la ſomme de toutes les forces qui agiſſent ſur la petite ellipſe, dont LN eſt le petit axe, ſera $A . \frac{aa-xx}{aa} . \frac{x}{a}\gamma$, puiſque par l'hypothèſe la force en M eſt à la force γ qui a lieu en Q, comme x eſt à a. Cette force qui agit ſur toute l'ellipſe LN, doit encore être multipliée par le bras de levier CM, ou par la diſtance au centre, ainſi que nous l'avons fait en exprimant la force du ſoleil (3534), parce qu'elle a d'autant plus d'effet pour faire tourner le ſphéroïde qu'elle agit plus loin du centre, & l'on aura $A\gamma$.

$\frac{aa-xx}{aa}.\frac{xx}{a}$ pour la force avec laquelle cette section elliptique tend à faire tourner le sphéroïde. Si l'on imagine une autre section infiniment proche lmn, & qu'on multiplie la force trouvée par $Mm=dx$, on aura la force totale sur $LNnl$, dont on prendra l'intégrale (3300); on fera $x=a$ pour avoir l'effet sur le demi-sphéroïde PQO, & le double sera l'effet total, qu'on trouvera $\frac{4}{15}aaA\gamma$. La masse du sphéroïde que j'appelle S est égale à $\frac{4}{3}aA$ (3331), donc $\frac{4}{15}aaA\gamma$ qui est la même chose que $\frac{4}{3}aA.\frac{1}{5}a\gamma$ est aussi égale à $\frac{1}{5}a\gamma S$; or si la masse toute entière S étoit à la distance a, la force seroit $a\gamma S$, donc la force sur le sphéroïde est un 5ᵉ de celle que la même masse éprouveroit si elle étoit toute au point Q; & c'est *C. Q. F. D.* Cette force $\frac{a\gamma S}{5}$ ou $\frac{2r\beta aS}{5}$, (parce que $\gamma=2r\beta$), est donc celle qui est nécessaire pour produire sur l'axe du sphéroïde ou sur le plan de l'équateur, un mouvement angulaire égal à r du nord au sud.

3553. Ainsi les particules du sphéroïde resteront dans leur ordre naturel en suivant les deux mouvemens dont il s'agit, si la force totale qui produit le mouvement r de l'axe, & que j'appellerai F, est égale à $\frac{2r\beta aS}{5}$; donc $F=\frac{2ra\beta S}{5}$, & par conséquent le mouvement de l'axe, ou la valeur de $r=\frac{F}{\frac{2}{5}a\beta S}$; c'est-à-dire, que la force totale, employée par le soleil dans la direction de la ligne des centres pour faire tourner le sphéroïde, étant divisée par $\frac{2}{5}a\beta S$, donnera le mouvement de l'axe.

3554. Ce théorême revient à celui de M. Euler (*Mém. de Berlin*, 1749. *T. v.*) que si dans un temps dt l'angle de rotation est ds & la force F, on aura pour le changement de l'axe de rotation $\frac{Fdt^2}{2ds}$, divisé par $\frac{2}{5}Saa$ qui est le moment d'inertie ou de rotation du sphéroïde, c'est-à-dire, la somme des produits de chaque particule par le carré de la distance à l'axe. M. Euler n'en donna pas la démonstration ; mais il se propose de traiter cette matière

beaucoup plus généralement par une méthode toute différente, au moyen des axes principaux de rotation; cette méthode ſera expliquée fort au long dans le 3[e] volume de ſa Mécanique qu'il prépare en 1771.

3555. Il eſt donc démontré qu'une force totale $\frac{2}{5} ar\beta S$ exercée ſur le ſphéroïde entier, eſt capable de produire le mouvement r dans le plan de l'équateur du nord au ſud; or nous avons vu que le ſoleil exerce ſur tout le ſpéroïde une force totale $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa-bb)\frac{mn}{a}S$ (3541) pour le faire tourner du nord au ſud; donc en faiſant cette proportion; la force $\frac{2}{5} ar\beta S$ eſt au mouvement r qui en réſulte, comme la force réelle du ſoleil eſt à un 4[e] terme, on aura le mou-

Mouvement angulaire de l'axe.

vement qui doit réſulter de celle-ci $=\frac{3}{2}\frac{tt}{T^2}\cdot\frac{mn}{a^2}(aa-bb)$; c'eſt donc là le petit angle que l'axe de la terre décrit en un inſtant infiniment petit, le mouvement diurne de rotation étant pris pour unité.

Ce n'eſt pas dans le point où agit le ſoleil ſur l'équateur que l'effet ſe manifeſte, c'eſt à 90° de-là; je ſuppoſe que dans un inſtant donné l'action du ſoleil tende à déplacer le

Fig. 305.

point E de l'équateur (*fig.* 305) d'une quantité $DE=r$, tandis que le point E, par la rotation ordinaire, a décrit l'arc AE, il en réſultera un mouvement composé AD; l'équateur AEB prendra la ſituation ADC & s'écartera de la quantité CB; ainſi l'écart eſt le plus grand à 90° du point A, où s'exerce la force perturbatrice.

3556. Le petit angle $\frac{3ttmn}{2TTa^2}(aa-bb)$, dont l'axe de la terre eſt détourné de ſa ſituation par la force du ſoleil, à un inſtant donné, eſt le même que l'angle de l'équateur avec l'équateur moyen; mais cet angle différentiel eſt plus ou moins grand, dans différens temps, à cauſe du changement de la déclinaiſon du ſoleil, ou de m & n; il faut ſavoir ce qui en réſulte après un temps fini, afin d'avoir la préceſſion des équinoxes pour trois mois, ou pour le temps après lequel m & n ſe rétabliſſent, d'où nous la conclurons pour tout autre temps. Soit ESL

Fig. 307.

(*fig.* 307), l'écliptique, & EAC l'équateur, BAD la poſition

poſition nouvelle que prend l'équateur par l'action du ſoleil, faiſant l'angle *BAE* avec ſa ſituation précédente, au moment où nous l'avons conſidéré, c'eſt-à-dire, le ſoleil étant au point *S* de l'écliptique, avec une déclinaiſon *AS*; mettons *k* à la place de $\frac{aa-bb}{aa}$ dans la valeur de l'angle *A*, l'on aura $\frac{3t^2}{2T^2}kmn$ égal à l'angle *BAE* (3555). Dans le triangle ſphérique *BAE*, dont l'angle *A* eſt infiniment petit, on a cette proportion ; ſin. *B* : ſin. *EA* :: ſin. *A* : ſin. *BE*, ou :: *A* : *BE* (892); donc *BE* qui eſt la rétroceſſion du point équinoxial *B* le long de l'écliptique *BESL*, dans un inſtant infiniment petit, ſera $= \frac{A.\,\text{ſin.}\,EA}{\text{ſin.}\,B} = \frac{3t^2}{2T^2}kmn\frac{\text{ſin. aſc. dr.}}{\text{ſin. } 23^\circ\frac{1}{2}}$, parce que le point *A* eſt celui où répond le ſoleil pour le temps où l'on a calculé le petit mouvement de l'équateur, c'eſt-à-dire, où le ſinus de la déclinaiſon du ſoleil étoit *m*. Cette valeur de *BE* eſt donc la différentielle de la préceſſion des équinoxes ; nous la mettrons enſuite ſous une forme plus commode.

Fig. 307.

Différentielle de la préceſſion

3557. L'équateur *EAC* qui prend la ſituation *BAD*, ſe trouve moins éloigné de l'écliptique ſur le colure des ſolſtices *LDC*, ou à 90° du point équinoxial *E*; la différence *CD*, ou *SR* (*fig.* 308) eſt le petit changement de l'obliquité de l'écliptique, ou la nutation qui réſulte de ce mouvement de l'équateur; car *SR* eſt la valeur de l'excès de l'angle ♈ ſur l'angle *A*, or le changement des poſitions céleſtes ne peut dépendre que de la poſition de l'équinoxe *A* duquel on les compte, & de l'angle *A* que forme l'écliptique avec l'équateur ; ce n'eſt pas *IK* meſure de l'angle *D* qui eſt la différence de ces angles ♈ & *A*, c'eſt *SR* ; *IK* eſt la différence des déclinaiſons *IL* & *KL*, mais ces déclinaiſons ne ſont pas à égales diſtances de l'équinoxe, car l'une répond à la longitude ♈ *L*, & l'autre à la longitude *AL*, donc *IK* n'eſt jamais une quantité dont on ait beſoin dans nos calculs ; mais on emploie *SR*, différence entre l'angle ♈ & l'angle *A*, combinée avec

Fig. 308.

Nutation.

la différence ♈ A qui a lieu dans la poſition du point équinoxial.

Quand je dis que SR eſt la différence entre l'angle ♈ & l'angle A, je ſuppoſe RL eſt égal à $r\,l$, mais cela eſt vrai en R ou à 90° du point A, où l'arc $R\,r$ eſt ſenſiblement parallèle à $L\,l$.

Fig. 307. Pour trouver la valeur de la nutation CD (*fig.* 307), on obſervera que dans le triangle CAD, R : ſin. AC ou coſ. AE :: ſin. A : ſin. CD :: A : CD; donc la nutation $CD = A$. coſ. $AE = \frac{3t^2}{2T^2}\,kmn$ coſ. AE; il y faut introduire la longitude du ſoleil pour l'avoir ſous une forme plus aſtronomique.

3558. Dans le triangle ſphérique EAS rectangle en S, la déclinaiſon du ſoleil $= AS$; ſon aſcenſion droite $= EA$, ſa longitude $= ES$, on a donc ſin. AS $=$ ſin. ES. ſin. $E = px$ (3665); coſ. $ES =$ coſ. AE coſ. $AS = y$ (3670); donc ſin. déclin. coſ. déclin. coſ. $AE = pxy$;

Longitude $ES = z$
Sin. longit. ou ſin. $ES = x$
Coſ. longit. $= y$
Sin. 23° $\frac{1}{2}$, ou ſin. $AES = p$
Coſ. 23° $\frac{1}{2} = q$
Coſ. longit. $= y = \sqrt{1-xx}$

Différentielle de la nutation. donc mn. coſ. aſc. dr. $= pxy$; ainſi la différentielle de la nutation, c'eſt-à-dire, le petit arc CD ſera $\frac{3t^2}{2T^2}\,kpxy$.

3559. Puiſque cet angle eſt une fraction du mouvement diurne qui a été ſuppoſé égal à 1, il n'y a qu'à le multiplier par 366 $\frac{1}{4}$, ou $\frac{T}{t}$ (3356), & ce ſera la même fraction du mouvement annuel, qui ſera $\frac{3t}{2T}\,kpxy$; ainſi multipliant par cette quantité une partie quelconque du mouvement annuel, tel que le petit arc dz de l'écliptique décrit en un temps infiniment petit par le ſoleil; on aura le mouvement de préceſſion pour le même temps; enfin écrivant pour y ſa valeur $\sqrt{1-xx}$, & à la place de dz ſa valeur $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ (3323), l'on aura la différentielle de la nutation pour le moment actuel $\frac{3t}{2T}\,kpx\,dx$,

Nutation totale.

dont l'intégrale $\frac{3t}{4T}kpx^2$ est la nutation totale pour l'espace de temps que le soleil a employé à parcourir un arc z de l'écliptique.

3560. Il faut rrouver aussi la précession des équinoxes, ou la quantité totale de BE pour un temps fini ; on fera ces deux proportions (892), $ER : CD :: \text{sin.}\ EA : \text{sin.}\ CA$ ou cos. EA (892) :: tang. $EA : 1$, & $EB : ER :: 1 : \text{sin.}\ B$; multipliant terme à terme, $EB : CD ::$ tang. $EA : \text{sin.}\ B$; mais tang. $EA = \text{cos.}\ E.$ tang. ES (3668) $= \text{cos.}\ E \frac{\text{sin. long.}}{\text{cos. long.}} = \frac{qx}{\sqrt{1-xx}}$; donc $EB : CD :: \frac{qx}{\sqrt{1-xx}} : p$; si l'on met encore pour CD sa valeur $\frac{3t}{2T}kpx\,dx$ (3559), on trouvera $EB = \frac{3t}{2T} \cdot \frac{kqx^2 dx}{\sqrt{1-xx}}$; c'est la différentielle de la précession, des équinoxes, entant qu'elle dépend du soleil. L'intégrale de $\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-xx}}$ qui dépend de la quadrature du cercle est $\frac{z - x\sqrt{1-xx}}{2}$ (3325) ; donc l'intégrale cherchée est $\frac{3t}{2T} \cdot \frac{kq}{2}(z - x\sqrt{1-xx})$; c'est la précession des équinoxes pour le temps que le soleil a employé à parcourir l'arc z de l'écliptique ; la seconde partie de cette expression est une partie variable ou une inégalité de la précession, qui n'est que d'une seconde ; ainsi nous la négligerons totalement. Précession des équinoxes.

3561. La partie $\frac{3tkqz}{4T}$ de cette valeur, est la plus importante ; on voit qu'elle va toujours en croissant, ce qui prouve que la précession des équinoxes augmente continuellement, comme la longitude z du soleil ; pour en trouver la valeur numérique on considérera qu'au bout de trois mois on a $z = 90° = 324000''$; $x = 1$; on a aussi $q = \text{cos.}\ 23° 28' = 0,917$; $t = 1$ jour ; $T = 365^j, 256$; $k = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{1}{115}$, ou à peu-près le double de l'aplatissement de la terre ; en employant tous ces nombres on aura $\frac{3tkqz}{4T} = 5'' 28$; c'est la précession moyenne pour trois

Précession annuelle 21″. mois; ainsi le quadruple 21″ 12 sera la précession moyenne annuelle des équinoxes produite par l'action du soleil, en supposant la terre homogène, & l'aplatissement $\frac{1}{230}$. Nous verrons bientôt que suivant les observations cette quantité ne surpasse pas 16″ (3575).

3562. M. d'Alembert trouve par sa théorie cette précession de 23″ environ (*Recherches*, &c. *pag.* 159). M. Euler trouve aussi environ 22″; mais Newton ne trouve que 9″, & M. le Chevalier d'Arcy 10″ $\frac{1}{3}$, (*Mém.* 1759, *pag.* 421). Après l'examen le plus détaillé, je me suis convaincu que Newton s'est trompé de moitié, comme M. Simpson l'a fait voir, c'est-à-dire, que la méthode même de Newton devoit donner environ 21″; & si cette quantité est plus grande d'un tiers que ne l'indiquent les observations (3576), cela vient probablement de ce que la terre n'est pas homogène, comme nous l'avons supposé, ou que le rapport des forces du soleil & de la lune n'est pas bien connu. On peut voir à ce sujet les auteurs cités (3526); ces discussions sont trop longues pour trouver place ici; je passe à la précession & à la nutation que la lune doit produire, en agissant de la même manière que le soleil (3528) sur chaque partie de la terre.

Erreur de Newton.

De la précession lunaire. 3563. La lune, en agissant sur le sphéroïde, tout ainsi que le soleil, y produit un mouvement semblable: la précession produite par le moyen de la lune, se déduira facilement de celle du soleil; mais il faudra faire entrer dans ce calcul la situation des nœuds de la lune, ce qui exigera une opération trigonométrique de plus, parce que la déclinaison dont le sinus & le cosinus entrent dans les formules précédentes renferme le lieu du nœud, quand il s'agit de la lune, dont l'obliquité n'est pas constante sur l'équateur comme celle de l'écliptique.

Fig. 308. Soit ♈B (*fig.* 308) l'écliptique supposée immobile; ♈ED♎F l'équateur dans sa première situation, *AGRDBH* l'équateur altéré par l'action de la lune dans un instant infiniment petit; *FGNFH* l'orbite de la lune, dont le nœud est au point *N* de l'écliptique, l'angle *N* étant de 5° 8′ 46″ (1500); c'est l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire.

3564. L'action du soleil produit chaque année 21″ de précession (3561), en supposant la terre homogène, cela se réduit à $14''\frac{1}{2}$, suivant les observations, comme nous le ferons bientôt remarquer (3576) ; ainsi la lune dont la masse est 2 fois $\frac{1}{2}$ celle du soleil (3412) en produira deux fois & demi autant, toutes choses égales ; mais supposons en général la force égale à m, la précession solaire $= p$, & la durée d'un mois $= t$, alors la précession causée par la lune dans un mois sera $\frac{mpt}{T}$, c'est-à-dire, en raison de sa force, & du temps pendant lequel elle agit, & cela sur l'orbite de la lune, & en supposant que l'inclinaison de cette orbite sur l'équateur soit toujours la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, c'est-à-dire, que l'angle E soit de $23°\frac{1}{2}$, comme l'angle ♈. Mais si l'angle d'inclinaison est plus petit, que $23°\frac{1}{2}$, la précession devient plus grande dans le rapport des cosinus, car dans l'expression de l'article 3561 on auroit au lieu de q, ou du cosinus de $23°\frac{1}{2}$, un autre cos. qui seroit celui de l'angle E ; donc il faut diviser l'expression par q, & ensuite la multiplier par le cosinus de l'angle E ; alors la précession EG mesurée sur l'orbite de la lune, pendant une révolution de la lune, ou pendant un mois sera $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\text{cos. } E}{\text{cos. } 23°\frac{1}{2}}$ sur l'orbite de la lune.

Effet de l'inclinaison de la lune.

Longit. ☊ $=$ ♈ $N = z$
Sin. ♈ $N = x$
Cos. ♈ $N = y$
Sin. ♈ $= 23°\frac{1}{2} = a$
Cos. ♈ $= 23°\frac{1}{2} = b$
Sin. $N = 5°\, 9' = c$
Cosin. $N = 5°\, 9' = d$
Circonf. $= 6,28 = e$
Force ☾ $= 2\frac{1}{2} = m$
Précess. $14''\frac{1}{2} = p$
Révol. ☾ 27j $= t$
Année $=$ 365j $= T$
18 ans $= n$

3565. Pour rapporter cette quantité à l'écliptique, ♈A sur laquelle on a coutume de compter la précession, l'on observera que l'inclinaison de l'axe de la terre ou de l'équateur terrestre doit se trouver la même à chaque demi-révolution du soleil ou de la lune, c'est-à-dire, à leur passage dans l'équateur ; en effet la somme de tous les petits changemens de l'axe, qui arrivent par l'action de la lune, recommence à chaque révolution ; & supposant le nœud N immobile pendant un mois ; la lune dans

Fig. 308. une demi-révolution de H en G a néceſſairement produit la plus grande différence qu'il puiſſe y avoir dans la poſition de l'équateur ; donc le point D, qui tient le milieu entre les points G & H où l'orbite de la lune coupe l'équateur, eſt celui où l'équateur mobile coupe l'équateur primitif ; ainſi $DE = DF = 90°$; mais S étant le point ſolſtitial ΥS eſt auſſi $= 90°$, enſorte que $DS = \Upsilon E$. Dans le triangle DEG l'on a cette proportion, ſin. ED ou R : ſin. G : : ſin. EG : ſin. D, ou : : $EG : D$; donc le petit angle $D = EG$. ſin. $G = EG$. ſin. E. Dans le triangle ſphérique ΥDA l'on a auſſi cette proportion, ſin. A : ſin. ΥD (ou coſ. ΥE) : : ſin. D : ſin. ΥA ou : : $D : \Upsilon A$; donc on a $\Upsilon A = \frac{D.\,\text{coſ.}\,\Upsilon E}{\text{ſin.}\,A} = \frac{EG.\,\text{ſin.}\,E.\,\text{coſ.}\,\Upsilon E}{\text{ſin.}\,23°} = \frac{mpt}{T} . \frac{\text{ſin.}\,E.\,\text{coſ.}\,E.\,\text{coſ.}\,\Upsilon E}{\text{ſin.}\,\Upsilon.\,\text{coſ.}\,\Upsilon}$; c'eſt la valeur de la préceſſion cauſée par la lune dans le petit eſpace d'un mois, meſurée le long de l'écliptique ; elle doit varier d'un mois à l'autre à cauſe du changement de l'angle E, ainſi nous ne conſidérerons la petite préceſſion d'un mois que comme la différentielle de la préceſſion totale de 18 ans ; nous en chercherons l'intégrale quand nous aurons trouvé celle de la nutation.

Différentielle de la préceſſion cauſée par la lune.

3566. On trouvera de même la valeur de la petite nutation SR pour le même intervalle de temps, ou la différentielle de la nutation, c'eſt-à-dire, la quantité dont l'équateur ſe trouve rapproché de l'écliptique, ſur le colure des ſolſtices SRL, dans l'eſpace d'un mois ; pour cela on fera cette proportion, R : ſin. DS : : $D : RS$, donc $RS = D$. ſin. $DS = D$. ſin. ΥE, mais $D = EG$. ſin. E, donc $RS = EG$. ſin. E. ſin. $\Upsilon E = \frac{mpt}{T} . \frac{\text{coſ.}\,E}{\text{coſ.}\,\Upsilon}$. ſin. E ſin. ΥE ; il faut ſubſtituer dans cette expreſſion l'inclinaiſon N qui eſt à peu-près conſtante, & la longitude ΥN du nœud qui eſt à peu-près uniforme, en conſidérant que ſin. E. ſin. ΥN : : ſin. N : ſin. ΥE ; ainſi $RS = \frac{mpt}{T} \frac{\text{ſin.}\,N.\,\text{ſin.}\,\Upsilon N\,\text{coſ.}\,E}{\text{coſ.}\,\Upsilon}$. On doit encore éliminer de cette expreſſion l'angle E, parce que cet angle change par le mouvement des nœuds de la lune ; dans le triangle ΥEN on a coſ. $E =$ coſ. ΥN.

ſin. N. ſin. γ — coſ. N. coſ. γ (3716, 3736) ou $yca - db$; & parce que l'angle E eſt obtus, la perpendiculaire tombera hors du triangle, le coſinus de E ſera négatif, & l'on aura coſ. $E = bd - acy$; donc la petite nutation ſera $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{cx(bd - acy)}{b}$ le nœud étant ſuppoſé en N; nous la conſidérerons comme une différentielle dont l'intégrale ſera la nutation totale qui doit avoir lieu après que le nœud N aura fait le tour du ciel. Différentielle de la nutation.

3567. Il faut exprimer cette différentielle de la nutation par le moyen de la différentielle de la longitude du nœud qui ſera maintenant appellée dz; pour cela je conſidère que la durée t d'une révolution de la lune eſt à la durée n d'une révolution entière du nœud, comme dz qui eſt le mouvement moyen du nœud en un mois, eſt à la circonférence entière du cercle que nous appellerons e; donc $t = \frac{ndz}{e} = \frac{ndx}{e\sqrt{1 - xx}}$ (3323). Suppoſons $T = 1$, enſorte que n ſoit égal à 18,6 (1488), & ſubſtituons la valeur de t dans la différentielle de la nutation, en mettant $\sqrt{1 - xx}$ à la place de y, on aura $mpn. \frac{c}{eb}$ $\left(\frac{dbxdx}{\sqrt{1 - xx}} - acxdx\right)$ dont l'intégrale (3298, 3300) eſt $\frac{mpnc}{eb}$ $\left(-db\sqrt{1 - xx} - \frac{acx^2}{2}\right)$; or quand $x = 0$, il faut que la nutation ſoit nulle, puiſque c'eſt du point équinoxial que nous comptons les mouvemens, & que c'eſt à ce point que commence l'action périodique de la lune; donc l'intégrale trouvée doit être $= 0$ quant $x = 0$, cependant $-db\sqrt{1 - xx} - \frac{acx^2}{2}$ devient alors $= -db$, donc il faut ajouter $+ db$ à l'intégrale trouvée (3305); & cette intégrale complette ſera $\frac{mpnc}{eb}\left(bd - bd\sqrt{1 - xx} - \frac{1}{2} acxx\right) = \frac{mpnc}{eb}$ (db. ſin. verſe $z - \frac{1}{4}ac$. ſin. verſe $2z$), parce que le carré du ſinus d'un arc eſt égal à la moitié du ſinus verſe du double de l'arc (3626). Telle eſt la nutation entière, ou la diminution de l'obliquité de l'écliptique Nutation entière.

Fig. 308. caufée par la lune depuis que le nœud étoit dans l'équinoxe du Bélier jufqu'au temps où il eft arrivé en N; cette expreffion fe réduit à un nombre de fecondes, puifque p eft exprimée en fecondes, étant égale à $14'' \frac{1}{2}$, fuivant les obfervations (3576), & que toutes les autres quantités de l'expreffion précédente font des fractions du rayon, même la quantité e, ou la circonférence du cercle égale à 6,41 (art. 3359).

3568. La différentielle de la précef. $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\text{fin.}E.\text{cof.}E.\text{cof.}\Upsilon E}{\text{fin.}\Upsilon.\ \text{cof.}\Upsilon}$ eft à la différentielle de la nutation $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\text{cof.}E.\text{fin.}E\ \text{fin.}\Upsilon E}{\text{cof.}\Upsilon}$, comme $\frac{\text{cof.}\Upsilon E}{\text{fin.}\Upsilon}$ eft à fin. ΥE, ou comme cotang. ΥE eft à fin. Υ; ainfi la différentielle de la nutation multipliée par $\frac{\text{cot.}\Upsilon E}{\text{fin.}\Upsilon}$, doit donner la différentielle de la préceffion; mais cot. $\Upsilon E = \frac{ad+bcy}{cx}$ (3731), donc $\frac{\text{cot.}\Upsilon E}{\text{fin.}\Upsilon} = \frac{ad+bc\sqrt{1-xx}}{acx}$; ainfi multipliant cette quantité par la différentielle de la nutation $= \frac{mpnc}{be}\left(\frac{dbx}{\sqrt{1-xx}} - acx\right)dx$, on aura celle de la préceffion $= \frac{mpn}{abe} \cdot \left(\frac{abd^2}{\sqrt{1-xx}} + (bb-aa)dc - abc^2\sqrt{1-xx}\right)dx$, dont l'intégrale, en nommant z l'arc dont x eft le finus, fera (3323, 3324) $= \frac{mpn}{abe}\,(ad^2bz + (bb-aa)dcx - \frac{1}{2}abc^2z - \frac{1}{2}abc^2x\sqrt{1-xx})$ ou $\frac{mpn}{abe}\,[(dd-\frac{1}{2}cc)abz + (bb-aa)dc.\text{fin.}z - \frac{1}{4}abcc.\text{fin.}2z]$

Préceffion entière. (3625). Telle eft la valeur de la préceffion vraie caufée par l'action de la lune, pendant le temps que le nœud emploie à parcourir l'arc z.

3569. Il s'agit maintenant d'exprimer en nombres la nutation & la préceffion: lorfque le nœud de la lune a achevé une demi-révolution, l'on a $z = 180°$; mais le finus verfe de 180° eft 2, & le finus verfe de $2z$ ou de $360° = 0$; donc après une demi-révolution du nœud la nutation $\frac{mpnc}{eb}\,(db\ \text{fin.v.}z - \frac{1}{4}ac\ \text{fin.v.}2z)$ (3567) devient

$\frac{mpnc}{eb}$

$\frac{mpnc}{eb} \cdot 2bd$, ou $\frac{2mpncd}{e}$; cette quantité revient à 19″ 2, quand on suppose $2\frac{1}{2}$ pour la force de la lune, ou $m = 2\frac{1}{2}$; car alors il faut supposer la précession solaire $p = 14''\frac{1}{2}$; pour que les deux ensemble fussent — 50″ 3 qui est la précession observée; mais si l'on veut que la nutation soit de 18″, & supposer rigoureusement exactes les observations de M. Bradley (2858), on supposera $m = 2,09$, & $p = 16''$, 28, alors on trouvera la nutation de 18 secondes, comme dans l'exemple ci-joint.

Log. 2	0,30103
2,09	0,32015
16,28	1,21184
18,613	1,26982
Sin. 5°	8,95310
Cos. 5°	9,99824
6,28	9,20192
18″ 0	1,25610

3570. Pour exprimer aussi en nombres la précession trouvée, on suppose que le nœud ait fait une demi-révolution; alors $z = \frac{e}{2}$; sin. z & sin. $2z = 0$; donc les deux derniers termes de la valeur trouvée disparoissent, & la précession entière devient $\frac{mpn}{2}(dd - \frac{1}{2}cc)$, & parce que le carré d'un cosinus $dd = 1 - cc$, elle revient à $\frac{mpn}{2}(1 - \frac{3}{2}cc)$; donc pendant une révolution entière des nœuds la précession sera double de cette quantité, ou $mpn(1 - \frac{3}{2}cc)$. Précession en 18 ans.

3571. On voit par cette expression que la moyenne précession causée par la lune, est à la précession mpn qui auroit lieu si la lune tournoit dans l'écliptique (3564), comme $1 - \frac{3}{2}cc$ est à 1, ou comme 0,9879 est à 1.

3572. En comparant les expressions (3569, 3570), on voit que la quantité de la nutation, qui est de 18″ suivant les calculs précédens, pendant neuf ans ou pendant une demi-révolution du nœud, est à la précession correspondante, comme $\frac{4cd}{e}$ est à $1 - \frac{3}{2}cc$, c'est-à-dire, comme 1 est à 17, 35.

3573. L'inégalité ou l'équation de la précession, se trouvera en retranchant de la précession vraie pour un temps quelconque, la précession moyenne pour le même temps. Soit z la longitude du nœud pour un

certain eſpace de temps, la préceſſion moyenne pendant une demi-révolution du nœud étant $\frac{mpn}{2}(dd-\frac{1}{2}cc)$, on aura pour le temps correſpondant à l'arc z, la préceſſion $=\frac{z}{e}.\ mpn\ (dd-\frac{1}{2}cc)$; cette préceſſion moyenne retranchée de la vraie préceſſion trouvée ci-devant (3568), donne pour différence ou pour équation $\frac{mpn}{abe}[(bb-aa)\ dc\ \text{ſin.}\ z-\frac{1}{4}abc^2\ \text{ſin.}\ 2z]$. Nous négligerons le ſecond terme qui renferme le carré du ſinus c d'un angle de 5°, & qui ne peut jamais produire qu'un quart de ſeconde; nous aurons donc pour la plus grande équation de la préceſſion, le nœud étant dans le ſolſtice, c'eſt-à-dire, ſin. z étant égal à 1, $\frac{mpncd}{abe}(bb-aa)$.

Equation de la préceſſion.

Rapport de la préceſſion à la nutation.

3574. Cette équation de la préceſſion eſt à la nutation de 18″ ou $\frac{2mpncd}{e}$ (3569), comme $bb-aa:2ab$, comme 1 eſt à $\frac{2ab}{bb-aa}$ ou à la tangente du double de l'obliquité de l'écliptique (3633); cette règle qui ſuit de la théorie eſt conforme à l'hypothèſe que j'ai ſuivie dans le calcul de la nutation (2874), & qui n'eſt que la conſtruction de l'expreſſion précédente. En effet ſi l'on ſuppoſe que PQ (*fig.* 242) ſoit à PB comme $bb-aa$ eſt à b, ou comme le coſinus de 46° 56′ eſt au coſinus de 23° 28′ (3633), c'eſt-à-dire, comme 0,7444 eſt à 1, ou à peu près comme 3 eſt à 4, & qu'on prenne BPO égal à la longitude du nœud, le lieu du pole ſera en M; or $PQ : BV :: \frac{bb-aa}{2} : b$, & tang. PEQ : tang. $PQ :: PEQ : PQ :: R$: ſin. 23° :: $1 : a$; donc multipliant terme à terme, $PEQ : BV :: \frac{bb-aa}{2} : ab :: bb-aa : 2ab$; c'eſt la proportion qui doit être par la théorie précédente entre la plus grande préceſſion, égale à l'angle BEQ, & la nutation totale de 18″.

Fig. 242.

3575. Ainſi la théorie détermine le rapport entre la nutation obſervée en latitude, & l'inégalité de la préceſſion des équinoxes, enſorte que nous pouvons déterminer celle-ci par le moyen de la première. Si nous ſuppo-

sons avec M. Bradley que la nutation est de 18″, la plus grande équation de la précession sera 16″ 8, la précession causée par le soleil sera 16″ 3 & celle de la lune 33″ 7; alors la force de la lune seroit 2, 09, c'est-à-dire, un peu plus que le double de celle du soleil (3569).

3576. Mais si la nutation observée étoit de 19″ on auroit 17″ 8 pour l'équation, 14″ 5 pour la précession solaire, 35″ 5 pour celle que cause la lune, & $2\frac{1}{2}$ pour la force de la lune, ainsi que je l'ai supposé (3413, 3569); cette quantité peut s'accorder avec les observations de M. Bradley, pourvu qu'on y suppose seulement 1″ d'erreur, ce qui est possible dans les observations, & par ce moyen l'on concilieroit les observations des marées avec celles de la nutation; c'est pourquoi j'ai supposé, dans le cours de cet ouvrage, que la force de la lune étoit deux fois & demie celle du soleil; on peut, par une espèce de milieu, ne la supposer que $2\frac{1}{4}$; il en résultera toujours que la précession causée par le soleil n'est pas de 21″ comme par la théorie (3561), mais de $15\frac{1}{2}$, & que la terre n'est pas homogène. Le degré d'aplatissement qu'on y observe, prouve aussi la même chose (3579).

Force de la lune = $2\frac{1}{4}$.

3577. Les 35″ de précession moyenne, qui sont l'effet de la lune, seroient produites d'une manière aussi uniforme que celles du soleil (3560) si la lune étoit toujours à la même déclinaison quand elle répond au même point de l'équateur; mais à cause du mouvement de ses nœuds (1487), il arrive que dans ses différentes révolutions elle s'éloigne plus ou moins de l'équateur, & agit sur lui avec plus ou moins de force. Quand le nœud ascendant est dans le Bélier, le plus grand éloignement de la lune par rapport à l'équateur, va jusqu'à $28°\frac{3}{4}$; mais quand le nœud ascendant est dans la balance, neuf ans après, la lune ne s'éloigne jamais de l'équateur que de $18°\frac{1}{4}$ à chaque révolution; alors son attraction totale sur le sphéroïde, dans le cours d'une révolution, est beaucoup moindre, puisqu'on a vu qu'elle dépend du sinus *m* de la déclinaison (3539); c'est pourquoi la précession

Idée générale de la nutation.

annuelle eſt ſi inégale dans l'eſpace de 18 ans, & la nutation ſi conſidérable.

3578. Ceux qui aiment à avoir des idées plus développées que ne les donne le calcul, verront avec plaiſir l'explication élémentaire d'une ſingularité dont j'ai vu quelques perſonnes embarraſſées, & dont on ne trouveroit pas l'explication dans les auteurs; cela fera comprendre ſur-tout la manière dont l'attraction de la lune produit le changement de l'obliquité de l'écliptique. Lorſque le nœud aſcendant eſt dans le Bélier, c'eſt alors que la lune s'éloigne le plus de l'équateur, & qu'elle a le plus d'action pour changer le plan de l'équateur, & par conſéquent l'obliquité de l'éclipt.: ſoit ♈ *G* ♎ l'écliptique (*fig.* 306), ♈ *M* ♎ l'équateur; *EG* l'orbite de la lune; cette planète s'écarte beaucoup au nord de l'équateur quand ſon nœud aſcendant *G* eſt dans le Bélier, alors la lune attire l'équateur terreſtre de ce côté-là avec plus de force. Il ſemble qu'alors l'équateur *EM* devroit ſe rapprocher de l'écliptique *EG*; c'eſt cependant alors même que l'angle eſt le plus grand, & que l'obliquité de l'écliptique, au lieu d'être de 23° 28′ 0″, ſe trouve de 23° 28′ 9″.

Fig. 306.

Effet qui paroit ſingulier.

Pour avoir le dénouement de cette difficulté, il faut ſe rappeller que ce n'eſt pas au point où agit la lune ſur l'équateur terreſtre que ſe fait le plus fort déplacement de l'équateur, mais à 90° plus loin (3555). Ainſi quand la lune, en parcourant *LA* (*fig.* 309), agit le plus ſur l'équateur ♈ *Q* vers les points ſolſtitiaux, c'eſt vers les équinoxes ♈ & ♎ que cet effet devient ſenſible, il n'en réſulte donc rien pour changer l'obliquité de l'écliptique ou la diſtance du point *E* de l'écliptique au point *Q* de l'équateur: voyons dans quel temps ſe fait le plus grand changement.

Fig. 309.

Fig. 306.

Quand le nœud de la lune eſt en *G* (*fig.* 306) dans le ſolſtice, la lune traverſant l'équateur en *E*, n'agit point pour incliner l'équateur; car pour agir il faut qu'elle en ſoit à une certaine diſtance, & plus elle en eſt éloignée, plus elle agit. La lune étant en *G*, la plus éloignée de l'équateur qu'il eſt poſſible, c'eſt-là où elle attire le plus; ſi.

MO est le mouvement diurne de l'équateur terrestre en 1″ de temps, & *OF* la quantité de force que la lune exerce perpendiculairement à son plan, l'équateur prendra la direction *MF*; donc sur le colure des solstices *NS* où se mesure l'obliquité de l'écliptique, l'équateur *MS* paroîtra plus éloigné de l'écliptique *N*; donc l'obliquité de l'écliptique paroîtra augmentée par l'action de la lune.

Pendant tout le temps que le nœud ascendant *G* sera dans la partie boréale de l'écliptique ou dans les signes ascendans, cet effet aura lieu; voilà pourquoi il s'accumule de plus en plus, & enfin quand le nœud *G* de la lune par son mouvement rétrograde arrive en ♈, l'action est nulle, mais l'équation résultante de l'effet qui a été produit jusqu'à ce moment-là, est la plus grande, tout ainsi que dans le mouv. ellipt. des planètes, l'équation est la plus grande quand la vîtesse cesse d'augmenter (1256); voilà pourquoi l'obliquité de l'écliptique est la plus grande (2861), dans le temps où véritablement l'action de la lune sur l'équateur est située le moins avantageusement pour produire cette augmentation, & qu'elle sembleroit devoir faire tout le contraire. Au reste ce sont ici des considérations vagues, dont on auroit de la peine à tirer des conséquences, sans le secours des calculs que j'ai détaillés ci-dessus. Ainsi la précession des équinoxes qui de tous les phénomènes de l'attraction a donné le plus d'embarras aux Géomètres, se trouve expliquée d'une manière simple & élémentaire, & forme une nouvelle démonstration de cette loi générale du monde, comme je l'avois annoncé (3383).

Figure de la terre suivant les loix de l'Attraction.

3579. Nous avons prouvé par observation l'aplatissement de la terre (2672), il faut le prouver actuellement par la théorie générale. Si la terre étoit une masse fluide & homogène, elle auroit la figure d'un ellipsoïde dont l'axe seroit plus petit de $\frac{1}{230}$ que le diamètre de l'équateur. Cette proposition que Newton ne démontra qu'im-

parfaitement, a été prouvée par M. Mac-Laurin & par M. Clairaut; elle me donnera lieu d'expliquer les principes de l'Hydroſtatique & les attractions des ſphéroïdes; il en réſultera une introduction aux ouvrages des géomètres qui ont approfondi cette matière, tels que M^rs. Clairaut, d'Alembert, Simpſon, (*Mathemat. diſſert.* 1743) Mac-Laurin, Bouguer, le P. Boſcowich, &c. qui ont étendu leurs recherches plus loin que le cas du ſphéroïde homogène & de la peſanteur ordinaire.

On a déja vu dans la préceſſion (3576), un fait qui prouve que la terre eſt hétérogène (a); les obſervations faites ſur la figure de la terre le prouvent également; parce que le degré d'aplatiſſement qui auroit lieu dans le cas du ſphéroïde homogène, & l'augmentation de peſanteur de l'équateur vers les poles, indiquée par la longueur du pendule (3373) ne ſont pas exactement tels que nous les obſervons.

Principes d'Hydroſtatique.

La ligne du zénit, la ligne verticale, la ligne du fil à-plomb, la direction de la peſanteur, eſt perpendiculaire à la ſurface de la terre, quelle que ſoit la quantité de ſon aplatiſſement; c'eſt un principe dont j'ai fait ſentir la certitude, ſoit par l'expérience, ſoit par le raiſonnement (2660), & qui ſera néceſſaire dans les démonſtrations ſuivantes, car nous ſuppoſerons que le ſphéroïde eſt en équilibre dans toutes ſes parties, lorſque la peſanteur eſt perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, dans tous ſes points, & que toutes les colonnes ont une égale peſanteur; cela eſt rigoureuſement vrai, dans le cas de la loi de peſanteur qui a lieu dans la nature, quoique cela ne ſoit pas général pour toutes les loix de peſanteur qu'on pourroit imaginer.

Pour démontrer que la figure de la terre doit être elliptique en ſuppoſant une maſſe fluide qui tourne ſur ſon axe, il faut connoître ſi les attractions qui ont lieu en divers points de la ſurface d'un ſphéroïde elliptique, ſont telles qu'elles ſoient dans tous les points en équilibre avec

(a) Ὁμὸς, *ſimilis*; Γένος, *genus*; Ἕτερος, *alter*.

la force centrifuge qui a lieu dans le même sphéroïde elliptique ; car si cela est, on sera certain que la figure du sphéroïde tournant sur son axe ne cessera point d'être une ellipse ; telle est la méthode de M. Clairaut (*Figure de la terre*, *pag.* 158, & suiv.) ; que nous allons expliquer.

3580. THÉORÊME. Soient deux ellipses semblables & concentriques *AMBL*, *QSRHT* (*fig.* 310), & une ligne *MQN* tangente en *Q* à l'ellipse intérieure ; concevons que le plan de ces deux ellipses tourne autour de l'axe *MQN* en faisant seulement un angle infiniment petit ; les deux tranches ou solides infiniment minces & elliptiques (3282) produites par les ellipses *AMBN*, *QSRTQ* exerceront dans la direction *QB* du petit axe une attraction égale, la premiere sur le corpuscule *N*, l'autre sur le corpuscule *Q*. *Fig.* 310.

DÉMONSTRATION. Supposons deux lignes *QR*, & *QT* dans la petite ellipse, également éloignées de l'axe *QB*, & deux lignes *NK* & *NL* dans la grande ellipse parallèles à *QR* & à *QT*; les lignes *QR* & *QT*, avec les petites lignes infiniment proches, telles que *Qt*, décriront, par le mouvement de ce plan, deux petites pyramides qui sont les élémens du solide décrit par le mouvement de la petite ellipse *QSRTQ*. De même les lignes *NK* & *NL*, chacune avec une autre ligne infiniment proche, telle que *Nk*, décriront deux autres petites pyramides inégales, mais dont la somme est évidemment égale à la somme de deux pyramides *QR* & *QT*, puisque $NK + NL = 2\,QR$ (3635), & que les pyramides sont semblables, étant engendrées par un seul & même mouvement & parallèles entr'elles. Ces attractions des pyramides *QR* & *QT* dans la direction *QH* seront les mêmes que les attractions des pyramides *NK* & *NL* sur le point *N* dans une direction parallèle à *QH*, puisque l'angle *RQM* est égal à l'angle *KNM* & à l'angle *LNZ*, ce qui rendra les forces décomposées égales aussi bien que les forces absolues ; on dira la même chose de tous les autres élémens dont la tranche est composée. Et lorsque *QR* & *QT* seront

Fig. 310. arrivées à une inclinaiſon aſſez grande pour faire paſſer *NL* dans le ſegment *MAN*, on verra que les attractions des pyramides dont eſt composé le ſolide, produit par la révolution de *MANM*, étant retranchées des attractions des pyramides qui leur correſpondent, dans le ſolide produit par *MBN*, & qui ſont oppoſées, le reſte ſera encore égal aux attractions des pyramides correſpondantes dans le ſolide produit par l'ellipſe *RQT*; donc l'attraction reſtante de la plus grande tranche ſur le point *N*, dans la direction parallèle à *QB*, ſera encore égale à l'attraction de la petite tranche ſur le point *Q* dans la direction *QH*.

3581. Coroll. Delà il ſuit que les deux ſphéroïdes elliptiques ſemblables, dont *AMB*, *QSH* ſont les méridiens, & dont les tranches ci-deſſus expliquées ſont les élémens, exercent auſſi une même attraction, l'un ſur le point *Q*, ſuivant *QB*, l'autre ſur le point *N* dans une direction parallèle à *QB*. Il en ſeroit de même ſi la tangente *MQN* de la petite ellipſe étoit parallèle au petit axe, au lieu d'être parallèle au grand axe, c'eſt-à-dire, qu'on prît *SD* au lieu de *QM*; l'attraction du petit ſphéroïde ſur le point *S* ſeroit égale à l'attraction du grand ſphéroïde ſur le point *D*, l'une & l'autre conſidérée dans une direction parallèle au grand axe.

La figure de la terre eſt elliptique.

3582. Il n'en faut pas d'avantage pour démontrer que la figure d'une maſſe fluide qui tourne ſur ſon axe eſt une figure elliptique, & pour cela nous allons démontrer d'abord que les attractions que nous avons déterminées dans un ſphéroïde elliptique, combinées avec la force centrifuge qui eſt toujours parallèle au grand axe du méridien ou perpendiculaire au petit axe, produiſent une force qui eſt perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde.

Fig. 311. Soit l'attraction du ſphéroïde ſur un corpuſcule *E* (*fig.* 311), ſitué ſous l'équateur, égale à *E* (3588); l'attraction ſur un corpuſcule ſitué au pole, égale à *P* (3585), la force centrifuge ſous l'équateur $=$ *F* (3395); ſoit un point *N* dont il faut déterminer la peſanteur, pour ſavoir vers quel point elle ſe dirigera.

L'attraction

L'attraction en N décomposée suivant NR, sera la même qu'au pole X d'un sphéroïde semblable à PNE, qui auroit CX pour demi-axe (3581); donc $P.\frac{CX}{CP}$ sera la force qui agit en N parallèlement à l'axe PC (3586); car les attractions des corps semblables & homogènes, étant comme les masses & en raison inverse des carrés des distances, sont comme les simples rayons; de même l'attraction du sphéroïde PEp sur le point N dans la direction NX, sera la même qu'à l'équateur R d'un sphéroïde semblable, où CR seroit le demi-diamètre de l'équateur; donc (3581) on aura $E\frac{CR}{CE}$ ou $E\frac{NX}{CE}$ pour l'attraction au point N, suivant NX. Il en faut retrancher la force centrifuge $F.\frac{NX}{CE}$ qui a lieu au point N (3394); donc $(E-F)\frac{NX}{CE}$ sera la force totale qui agit en N suivant NX, & qu'on peut exprimer par une ligne NV, la force perpendiculaire à celle-là étant exprimée par NS. La force composée qui en résulte, sera exprimée par une diagonale NT qui prolongée rencontre en G l'axe Pp; & si XG est égale à la sous-normale de l'ellipse, c'est-à-dire, à $\frac{CE^2}{CP^2}CX$, (3274), il s'ensuit nécessairement que la force totale du point N est dirigée suivant la normale, & par conséquent perpendiculaire à la surface de la terre: pour cela, il suffit qu'on ait cette proportion, $VT:NV::XG:NX$, car on en conclud que, $P.\frac{CX}{CP}:\frac{NX}{CE}(E-F)::\frac{CE^2}{CP^2}.CX:NX$, ou ce qui revient au même, $P:E-F::CE:CP$, & dès-lors la force d'un point quelconque ne dépend plus de sa situation, & les deux forces qui agissent en N, se réduisant à une force NT perpendiculaire à la surface du sphéroïde, il tournera sans changer de figure (3579); donc la figure naturelle de ce fluide est une ellipse dont les axes sont comme P est à $E-F$.

La terre est elliptique.

Ainsi toutes les fois que les différens points d'un cercle sont sollicités par des forces parallèles entre elles

& proportionnelles aux ordonnées de ce cercle, il se change en une ellipse dont le grand axe est parallèle à la direction de cette force étrangère ; & comme tous les méridiens de la terre sont dans le même cas, ils deviennent tous des ellipses, & la figure de la terre qui en résulte se trouve comme formée ou engendrée par un méridien tournant autour du petit axe. Dans le cas des marées nous verrons que la même force produit un sphéroïde allongé (3592).

Quelle doit être la vîtesse de rotation.

3583. Pour que la figure de la terre continue d'être une ellipse, dont les axes soient entre eux comme $CE : CP$, il faut que la vîtesse de rotation soit telle que par la force centrifuge F qui en résulte, l'on ait cette proportion $P : E - F :: CE : CP$, alors toutes les colonnes péseront également; il y aura sur toutes les parties du sphéroïde une pression perpendiculaire à la surface, égale dans tous les points, puisque dans cette proportion à laquelle nous sommes parvenus il n'y a aucun terme qui dépende de la situation du point M; chaque partie n'aura donc d'autre mouvement que celui de la rotation commune à toute la masse, & le sphéroïde elliptique tournera sur son axe sans changer de figure.

Après avoir démontré que le sphéroïde est elliptique, il faut trouver quelle sera la quantité de son aplatissement, suivant la vîtesse de rotation qui est connue, & suivant la force d'attraction que le sphéroïde exerce sur des particules de matière situées au pole & sous l'équateur ; c'est-à-dire, trouver les rapports des quantités E & F. L'on partagera le sphéroïde en petites pyramides, & l'on cherchera d'abord l'attraction de chacune.

Attraction d'une pyramide infiniment petite. Fig. 312.

3584. *L'Attraction d'une petite pyramide* BD (fig. 312) *sur le corpuscule* B *placé à son sommet, est égale à la base divisée par la hauteur ; & cette attraction décomposée suivant* BG, *est égale à la base divisée par la hauteur, & multipliée par le cosinus de l'angle* DBG.

Soit X la surface de la base d'une petite pyramide BD; $\frac{X \cdot Dd}{BD^2}$ sera l'attraction de l'élément de la pyramide (3386),

& $\frac{X.Dd.\text{cos}.GBD}{BD^2}$ sera l'attraction de ce même élément suivant la direction BG (3439). Au lieu de la base X on peut mettre αBD^2, car cette base est proportionnelle au carré de la hauteur ou de la distance BD; l'attraction élémentaire sera donc $\alpha . Dd$. cosin. GBD, dont l'intégrale est $\alpha . BD$. cos. GBD, & remettant pour α sa valeur $\frac{X}{BD^2}$, on trouvera $\frac{X}{BD}$ cosin. GBD pour l'attraction de cette pyramide infiniment petite dans la direction BG.

3585. TROUVER *l'attraction d'un sphéroïde* PEp; (fig. 311) *sur un corpuscule* P *placé au pole.* Soit Mm une portion infiniment petite du méridien EMp; ayant tiré les lignes PM, Pm, & le petit arc MA perpendiculaire sur Pm, on imaginera que la courbe tourne autour de l'axe PCp, d'une quantité infiniment petite; alors PMA formera une pyramide que l'on peut regarder comme un des élémens du sphéroïde entier, que la courbe PEp décriroit si elle faisoit une révolution complète. Soit l'angle infiniment petit qui mesure le mouvement du plan $PEp = \alpha$, le rayon étant pris pour unité; soit le demi-axe $PC = 1$, le rayon CE de l'équateur $= m$, l'abscisse $PQ = z$, l'ordonnée $QM = u$, le cosinus de l'angle MPQ pour le rayon $1 = s$, on aura $u\alpha$ égal à l'arc ou à la petite ligne droite décrite par le point M, pendant le mouvement infiniment petit du plan $PEMp$ autour de l'axe, car un petit arc est égal au rayon multiplié par l'angle (3357); ce petit arc, l'un des côtés de la base de la pyramide, étant multiplié par l'autre côté MA, donnera la surface de la base de cette pyramide, $= u\alpha . MA$; donc l'attraction de la pyramide décomposée suivant PC, sera $\frac{u\alpha s.MA}{PM}$ (3584); mais $\frac{MA}{PM} = \frac{ds}{\sqrt{1-ss}}$ (3307); c'est-à-dire, que la différentielle d'un arc est à celle du cosinus s comme le rayon est au sinus; donc l'attraction de la petite pyramide sera $\frac{\alpha usds}{\sqrt{1-ss}}$, dont il faut éliminer la lettre u, pour mettre s à sa place, afin de n'avoir Fig. 311.

qu'une ſeule inconnue dans cette différentielle. Par la propriété de l'ellipſe on a $u^2 = 2mmz - m^2 z^2$ (3254); d'un autre côté, le coſinus de l'angle $MPQ = \frac{PQ}{PM}$ (3613) $= \frac{z}{\sqrt{zz+uu}} = s$, d'où l'on tire $zz = sszz + ssuu$, ou $z = \frac{su}{\sqrt{1-ss}}$, $zz = \frac{s^2 u^2}{1-ss}$; ſubſtituant ces valeurs de z & de zz dans l'expreſſion de u^2, on aura $u\left(1 + \frac{m^2 s^2}{1-ss}\right) = \frac{2mms}{\sqrt{1-ss}}$ & $u = \frac{2mms(1-ss)}{(1-ss+m^2 ss)\sqrt{1-ss}}$; mettant nn à la place de $mm - 1$, & ſubſtituant cette valeur de u dans l'expreſſion $\frac{ausds}{\sqrt{1-ss}}$, elle deviendra $\frac{2\alpha m^2 s^2 ds}{1+n^2 s^2} = 2\alpha m^2 s^2 ds - 2\alpha n^2 m^2 s^4 ds$ (3287), car à cauſe de la petiteſſe de n^2 on néglige les termes ſuivans; l'intégrale eſt $\frac{2}{3}\alpha m^2 s^3 - \frac{2}{5}\alpha m^2 n^2 s^5$ (3300), & faiſant $s = 1$ & $\alpha = c$ (3358) pour avoir la ſomme de tous les élémens qui compoſent le ſphéroïde, cette intégrale devient $\frac{2}{3}cm^2 - \frac{2}{5}cm^2 n^2$. A la place de m qui eſt le rayon de l'équateur, mettons $1 + \delta$, enſorte que δ ſoit l'aplatiſſement de la terre, qui eſt une fraction très-petite du demi-axe CP, dont nous pourrons négliger le carré & les puiſſances ultérieures; alors $m^2 = 1 + 2\delta$ (3287), & $nn = mm - 1 = 2\delta$; ſubſtituant ces valeurs on aura pour l'intégrale précédente $\frac{2}{3}c + \frac{8}{15}c\delta = \frac{2}{3}c\left(1 + \frac{4}{5}\delta\right)$; c'eſt l'attraction d'un ſphéroïde (dont le demi-axe eſt égal à 1, & l'aplatiſſement à δ), ſur un corpuſcule ſitué au pole. C'eſt cette quantité qui eſt appellée P dans les articles 3582, 3589.

Attraction polaire du ſphéroïde.

Attraction du globe.

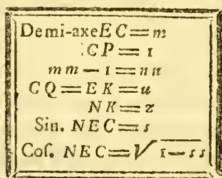
3586. Si l'on ſuppoſe $\delta = 0$, comme cela arrive dans un globe, dont le rayon eſt $CP = 1$, l'on aura $\frac{2}{3}c$ pour l'attraction de ce globe ſur un corpuſcule placé à ſa ſuperficie. Delà il ſuit que cette attraction eſt proportionnelle à la circonférence ou au rayon du globe qui attire; enſorte qu'un globe d'un rayon double attireroit un corps ſitué au pole avec une force double. Il en eſt de même de deux ſphéroïdes ſemblables, puiſque la quantité d'attraction qui dépend de δ, augmenteroit proportionnellement à δ, &

deviendroit double dans un sphéroïde dont le rayon seroit double.

3587. Delà il suit que l'attraction du sphéroïde sur des points situés à diverses distances est en raison inverse des carrés des distances ; car si l'on appelle la distance r, en imaginant un sphéroïde semblable qui s'étende jusques-là, l'on aura l'attraction proportionnelle à r, ou à $\frac{r^3}{r^2}$, c'est-à-dire, à la masse du sphéroïde qui est r^3, divisée par le carré de la distance.

3588. TROUVER *l'attraction qu'un même sphéroïde elliptique exerce sur un corpuscule placé sous l'équateur.* Soit *PC* le demi-axe (*fig.* 313), *CE* le rayon de l'équateur, & *EK* parallèle à l'axe *PCR* ; supposons un plan qui passe par la ligne *EK* & qui coupe le sphéroïde ; la section sera une ellipse semblable à l'ellipse *EPAR* (3283), parce que ce plan étant parallèle à l'axe *PR* de la terre est nécessairement parallèle à quelqu'un des méridiens du sphéroïde, qui se coupent tous sur l'axe *PR*. Si l'on prend $EH = PR$, & qu'on suppose sur le diamètre *EH* une sphère coupée de même par des plans qui passent par la ligne *EK*, ces plans formeront une infinité d'élémens ou de tranches infiniment minces en tournant autour de la ligne *EK* ; on trouvera la proportion qu'il y a entre l'attraction d'un des élémens de la sphère & l'attraction de l'élément correspondant du sphéroïde, & l'on en déduira l'attraction du sphéroïde au moyen de ce que nous connoissons celle de la sphère (3586). De l'attraction sous l'équateur. *Fig.* 313.

Si l'ellipse *EPAR* fait un mouvement infiniment petit, en décrivant un petit angle α autour du point *E* & de la ligne *EK*, elle formera une tranche elliptique infiniment mince, dont l'élément, ou la différentielle est une petite pyramide *ENL* ; le mouvement du point *N* pendant le même temps lui fera décrire une petite ligne droite, ou plutôt un petit arc, dont la valeur est l'angle α multiplié par le rayon *NK*,


Demi-axe $EC = m$
$CP = 1$
$mm - 1 = nn$
$CQ = EK = u$
$NK = z$
Sin. $NEC = s$
Cos. $NEC = \sqrt{1 - ss}$

ou αz (3357); c'eſt un des côtés de la baſe de cette petite pyramide, l'autre côté eſt NL; ainſi la ſurface de la baſe ſera $\alpha z . NL$; l'attraction de la pyramide ſera donc (3584) $\frac{\alpha z . NL}{EN}\sqrt{1-ss}$ dans la direction EC; mais $\frac{NL}{EN}$ eſt le petit angle NEL (3584), ou la différentielle de l'angle NEC, & la différentielle de l'angle multipliée par le coſinus eſt égale à la différentielle du ſinus (3307); donc on aura $\frac{NL}{EN}\sqrt{1-ss}=ds$, ainſi l'attraction de la pyramide ENL ſe réduira à $\alpha z ds$, dont il faut éliminer la lettre z.

Par la propriété de l'ellipſe, $PQ . QR : QN^2 :: PC^2 : CE^2$ (3254); donc $1-uu : zz-2mz+mm :: 1 : mm$; donc $uu=\frac{2mz-zz}{mm}$. Le ſinus de l'angle NEC ou ENK, eſt égal à $\frac{EK}{NE}=\frac{u}{\sqrt{uu+zz}}=s$; de ces deux équations l'on tirera aiſément une valeur de z en s; car puiſque $s=\frac{u}{\sqrt{uu+zz}}$, $uu=\frac{sszz}{1-ss}$; donc égalant les valeurs de uu l'on a $\frac{2mz-zz}{mm}=\frac{sszz}{1-ss}$; $2m(1-ss)-z(1-ss)=m^2s^2z$; donc $z=\frac{2m(1-ss)}{1+mmss-ss}$, & comme $mm-1=nn$, $z=\frac{2m(1-ss)}{1+nnss}$; ſubſtituant cette valeur de z dans $\alpha z ds$, elle deviendra $\frac{2m\alpha(1-ss)ds}{1+nnss}$. Si l'on réduit en ſérie cette fraction, en négligeant le carré de nn (3287), on aura l'attraction de la petite pyram. $=2m\alpha(1-ss)(1-nnss)ds$ $=2m\alpha(1-ss-nnss+nns^4)ds$, dont l'intégrale (3300) eſt $2m\alpha\left(s-\frac{s^3}{3}-\frac{nns^3}{3}+\frac{nns^5}{5}\right)$, c'eſt l'attraction de la tranche décrite par le ſecteur AEN, & ſi l'on fait $s=1$, l'on aura l'attraction de la tranche ſemi-elliptique décrite par ERA, $2m\alpha(\frac{2}{3}-\frac{2}{15}nn)$; ſubſtituant pour m ſa valeur $1+\delta$ (3585), & pour nn ſa valeur 2δ, elle devient $2\alpha(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\delta)$. Si l'on fait $\delta=0$, l'on aura l'attraction d'une tranche ſemi-circulaire infiniment mince, qui feroit décrite de la même façon par le mouvement du

demi-cercle, dont EH feroit le diamètre, & cette attraction eſt $\frac{4}{3}\alpha$.

Le rapport entre les attractions d'une ſphère décrite ſur EH, & du ſphéroïde $ERAP$, eſt le même que celui de leurs élémens, puiſqu'ils ont le même nombre d'élémens ; ainſi les attractions totales ſont entre elles comme l'attraction de la tranche ſemi-elliptique eſt à celle de la tranche ſemi-circulaire, c'eſt-à-dire, comme $2\alpha(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\delta)$ eſt à $\frac{4}{3}\alpha$, ou comme $1+\frac{3}{5}\delta$ eſt à 1 ; donc il ſuffira de multiplier l'attraction de la ſphère que l'on fait être égale à $\frac{2}{3}c$ (3586) par $1+\frac{3}{5}\delta$, pour avoir celle du ſphéroïde, qui ſera par conſéquent $\frac{2}{3}c(1+\frac{3}{5}\delta)$ (a) ; c'eſt la quantité que nous avons appellée E (3582). Les quantités P & E ſont calculées dans la *Théor. de la Fig. de la T.* de M. Clairaut, ſans ſuppoſer que le carré de δ ſoit une quantité négligeable; mais j'ai cru pouvoir omettre ici tout ce qui rendroit le calcul plus compliqué, ſans donner dans le réſultat un centième de différence.

3589. Au moyen des valeurs de P & de E nous pouvons connoître l'aplatiſſement de la terre. Pour que le ſphéroïde elliptique tourne ſur ſon axe ſans changer de figure, il faut qu'on ait cette proportion (3583), $P : E—F :: CE : CP$, ou $\frac{2}{3}c(1+\frac{4}{5}\delta) : \frac{2}{3}c(1+\frac{3}{5}\delta)—F :: 1+\delta : 1$, d'où il eſt aiſé de tirer la valeur de F; nous négligerons le carré de δ, ou le produit de F par δ, qui eſt conſidérablement plus petit que F, & nous aurons $F=\frac{2}{3}c.\frac{4}{5}\delta$; c'eſt l'expreſſion de la force centrifuge en ſuppoſant connu l'aplatiſſement de la terre. La force centrifuge ſous l'équateur eſt $\frac{1}{289}$ de la peſanteur (3395). Appellons Φ la fraction $\frac{1}{289}$ (3395), nous aurons donc $\Phi=\frac{F}{E—F}$; car F eſt à $E—F$, comme la force centrifuge eſt à ſa différence d'avec la peſanteur ; ſubſtituant les valeurs de E & de F en δ, & négligeant les puiſſances de δ, l'on aura $\Phi=\frac{4}{5}\delta$, Aplatiſſement
ou $\delta=\frac{5}{4}\Phi=\frac{5}{4}.\frac{1}{289}=\frac{1}{231}$. Donc l'aplatiſſement de la de la terre.

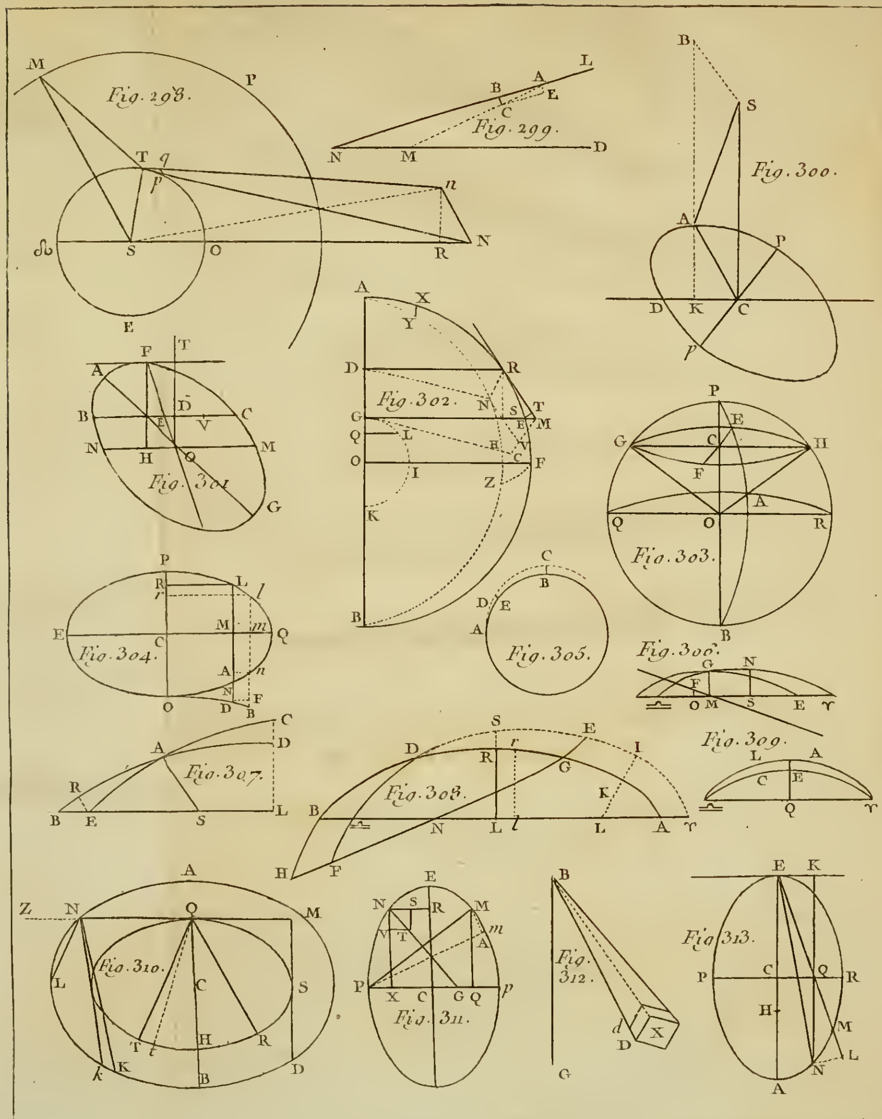
(a) Si l'on ſuppoſe que le point attiré E ſoit hors de l'ellipſe à une diſtance g du centre C, on trouvera par la même méthode que l'attraction du ſphéroïde diminue en raiſon inverſe de g^2.

terre doit être de $\frac{1}{231}$ en vertu des loix de l'attraction ; si la terre est homogène & qu'elle ait été fluide dans le principe, Newton trouvoit seulement $\frac{1}{230}$ (Liv. III. prop. 19). Cette quantité d'aplatissement ne diffère pas beaucoup de ce qu'on trouve par observation (2692); & il paroît que la différence vient de ce que la terre est plus dense vers le centre qu'à la surface : ainsi l'on peut regarder ceci comme une nouvelle démonstration du mouvement de la terre (1099), & de la théorie de l'Attraction, dont on a vu tant de preuves dans ce XXII[e] Liv.

DU FLUX ET DU REFLUX DE LA MER.

3590. La théorie de la figure de la terre conduit naturellement à celle du flux & du reflux de la mer, parce que les marées viennent d'un changement dans la figure de notre globe, produit par une force étrangère qui suit la même loi. Il y a dans les marées trois phénomènes principaux extrêmement remarquables ; le premier revient deux fois le jour, le second deux fois le mois, le troisième deux fois l'année. Tous les jours au passage de la lune par le méridien, ou quelque temps après, on voit les eaux de l'Océan s'élever sur nos rivages ; on assure qu'à S. Malo cette hauteur va jusqu'à plus de 100 pieds. Parvenues à cette hauteur les eaux se retirent peu-à-peu ; environ six heures après leur plus grande élévation elles sont à leur plus grand abaissement ; après quoi elles remontent de nouveau lorsque la lune passe à la partie inférieure du méridien, ensorte que la haute mer & la basse mer, le *Flot* & le *Jusan* s'observent deux fois le jour, & retardent chaque jour de 48′, plus ou moins, comme le passage de la lune au méridien. Le second phénomène consiste en ce que les marées augmentent sensiblement au temps des nouvelles lunes & des pleines lunes, ou un jour & demi après, & l'augmentation est sur-tout très-sensible quand la lune est périgée. Enfin le troisième phénomène des marées est l'augmentation qui arrive vers les deux équinoxes ; ensorte que le cas ou les marées sont les plus fortes

Phénomènes des marées.


Fig. 298.
Fig. 299.
Fig. 300.
Fig. 301
Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 305.
Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.
Fig. 311.
Fig. 312.
Fig. 313.

fortes de toutes eſt celui d'une ſyzygie périgée qui arrive dans le temps de l'équinoxe : nous expliquerons encore mieux les phénomènes en expliquant leur cauſe.

Hiſtoire de nos connoiſſances.

Le plus ancien Auteur qui ait parlé des marées, comme l'obſerve Strabon (vers les deux tiers de ſon premier livre), eſt Homère (Odyſſ. XII. 105), à l'occaſion de Charibde; Homère dit qu'elle s'élève & ſe retire trois fois le jour; Strabon penſe que le mot τρὶς a été mis à cauſe de la figure poëtique, pour le mot δὶς, deux fois; on pourroit croire auſſi qu'Homère étoit mal informé ou qu'il y a eu corruption dans le texte. (*Coſtard*, *Hiſt. of aſtron. pag.* 256, 268).

Hérodote en parlant de la mer Rouge, & Diodore de Sicile (*pag*. 174), font mention d'un flux grand & rapide; mais ſans rien dire de la cauſe, ῥοῦν δὲ πολὺν καὶ σφοδρόν, Le premier des Grecs qui fit attention à la cauſe des marées, fut Pytheas de Marſeille; il avoit été en Angleterre, comme le dit Strabon, & il avoit dû y obſerver les marées de l'Océan; Plutarque nous apprend qu'il les regardoit, en effet, comme étant réglées en quelque ſorte par la lune; il eſt vrai qu'il ne parle que d'une marée par mois, mais c'eſt ſans doute une faute de Plutarque. Les marées du Golphe Arabique ou de la mer Rouge étant très-fortes pourroient ſervir, dit M. Coſtard, à expliquer le paſſage des Iſraélites, dont il eſt parlé dans l'Exode ch. XIV., ſur-tout ſi l'on ſuppoſe qu'un vent de *N. E.* pouvoit augmenter encore la chûte ou l'abaiſſement des eaux.

Ariſtote, dans la multitude de ſes ouvrages de phyſique, faits 300 ans avant J. C., ne parle preſque pas des marées, on n'y trouve que trois paſſages forts courts à ce ſujet; le premier, où il dit qu'il y a un grand flux des eaux qui ſont vers le Nord ou du côté de l'Ourſe, (Météorol. L. II. Sum. I. T. I. *pag*. 759. édit. de Geneve, 1606); le ſecond, où il dit qu'on parle d'élévation de la mer réglées ſur la lune (*De Mundo*, c. 4. *in fine*); le troiſième, où il dit que la marée d'une grande mer eſt plus forte que celle d'une mer plus petite (*Probl. ſect.* 23,

T. II. *pag.* 972). Nous ne voyons rien qui annonce qu'Ariſtote ſe ſoit occupé de ces phénomèmes au point d'être mort du déſeſpoir que ſa curioſité lui cauſa ; comme l'ont écrit S. Juſtin & S. Grégoire de Nazianze, cités par Moréri.

M. Coſtard, dans ſon hiſtoire de l'aſtronomie (*pag.* 264) obſerve que les Grecs étoient peu au fait des phénomènes de la marée ; puiſque Agatharchides qui écrivoit vers l'an 114 avant J. C. croyoit que la marée arrivoit toujours à 3 heures & à 9 (*Hudſon Geog. min.* T. I. *pag.* 28) ; mais de nos jours, M. Richard a bien dit que c'eſt depuis midi juſqu'à trois heures (Voy. d'Italie, T. II. *pag.* 251); enſorte qu'il faiſoit en 1764 la même faute qu'Agatharchides, 114 ans avant J. C. C'eſt au temps de Céſar, que les Romains inſtruits par leurs conquêtes commencent à montrer des connoiſſances dans cette partie de la phyſique ; Céſar en parle dans ſes commentaires (L. IV). Strabon explique d'après Poſidonius, que le mouvement de l'Océan imite celui des cieux, qu'il y a un mouvement diurne, un menſtruel, un annuel ; que la mer s'élève quand la lune eſt dans le méridien, ſoit au-deſſus ſoit au-deſſous de l'horizon, & qu'elle eſt baſſe au lever & au coucher de la lune. Que les marées augmentent dans les nouvelles & dans les pleines lunes, & dans le ſolſtice d'été. Strabon (L. III. *pag.* 173).

Cauſe des Marées.

Pline explique non-ſeulement les phénomènes, mais la cauſe, quand il dit (L. II. c. 97) : *Cauſa in ſole lunaque... ut ancillantes ſyderi avido trahentique ſecum hauſtu maria*, &c. Senèque en parle avec exactitude (*Quæſt. nat. III.* 28. *Quare bonis viris mala accidant c.* 1). Macrobe, auteur du 4e ſiècle décrit très-bien les mouvemens de l'Océan, à l'occaſion de la période de 7 jours (*Somn. Scip.* I. 6).

Les différentes manières dont on a cherché en différens temps à expliquer l'effet de la lune ſur les marées ſont ſi peu ſatisfaiſantes, que je ne crois pas devoir même les indiquer. V. Plutarque, *de Plac. phil.* L. III. c. 17. Galilée, *de Syſt. mundi*, Dial. 4. Riccioli, *Almag.* II. *p.* 374.

Gassendi, *Op. II. pag.* 27. Je passe à l'explication de Képler, qui le premier apperçut l'effet de l'attraction universelle dans les marées ; il en parle d'une manière éloquente dans deux ouvrages : *De Stella martis* (1206), *Epitome astron. pag.* 555, comme je l'ai déja rapporté (3377).

Newton après la découverte du principe & de la loi générale de l'attraction, apperçut facilement les effets que le soleil & la lune devoient produire sur les marées, & il traita cette matière dans son livre des principes avec sa supériorité ordinaire. Enfin, l'académie des Sciences ayant résolu vers 1738 de traiter tout de nouveau & d'approfondir les branches du systême du monde que Newton n'avoit pu épuiser, proposa pour le prix de 1740 la question des marées ; les pièces de MM. Bernoulli, Euler & Mac-Laurin, qui partagerent le prix sont d'excellens traités sur cette matière; mais je vais reprendre cette théorie, & démontrer avec une extrême simplicité toutes les circonstances générales des marées, sans supposer autre chose que ce que j'ai déja démontré.

3592. La première chose qui se présente à démontrer, c'est que l'attraction de la lune ou du soleil considérée séparément, agissant sur une couche de fluide très-mince qui environne un globe, doit faire prendre à ces eaux une figure elliptique ; M. Mac-laurin le démontra d'une manière ingénieuse dans sa pièce de 1740 ; M. Clairaut a imité sa démonstration dans sa Théorie de la figure de la terre, comme on l'a vu (3579) ; & il est aisé d'appliquer aux marées la même démonstration ; pour cela il suffit de considérer trois choses ; 1°. La force de la lune sur les différens points de la terre est proportionnelle à la distance de chaque point, au plan perpendiculaire au rayon lunaire (3530) ; elle est donc proportionnelle à des lignes parallèles au grand axe de l'ellipse, qui naturellement doit se diriger vers la lune ; 2°. La force centrifuge que nous avons considérée quand il étoit question de la figure de la terre étoit également parallèle au grand axe de l'ellipse du méridien dans les diffé- Figure allongée des eaux.

rens points de la terre (3394, 3582); 3°. Une force dont la direction s'exerce ainsi par des lignes parallèles, dans les différens points d'une sphère, & dont l'intensité est proportionnelle aux mêmes lignes, change la sphère en une ellipse dont le grand axe est parallèle à la direction de cette force étrangère (3582).

Ainsi les eaux s'élèvent non-seulement vers le côté où est l'astre qui les attire, mais encore du côté opposé; parce que si l'astre attire les eaux supérieures plus qu'il n'attire le centre de la terre, il attire aussi le centre de la terre plus qu'il n'attire les eaux inférieures, & celles-ci restent en arrière du centre autant que les eaux supérieures vont en avant du côté de l'astre qui les attire. Et comme tous les cercles de la terre qui ont leur commune section dirigée vers la lune prennent la même forme, il en résulte un ellipsoïde allongé.

Degré d'allongement.

Le degré d'ellipticité d'un pareil sphéroïde est égal à $\frac{5}{4}$ de la force perturbatrice au point où elle est la plus grande (3589); ainsi quand nous aurons déterminé la force attractive, nous la multiplierons par $\frac{5}{4}$ pour avoir l'aplatissement ou l'allongement que cette force produit, c'est-à-dire, la différence des demi-axes.

La force perturbatrice du soleil sur les eaux de l'Océan au point où elle est la plus grande, est égale à la masse du soleil multipliée par 3, comme dans la théorie de la ☾, & divisée par le cube de la distance du soleil, ou multipliée par le cube du sinus de la parallaxe du soleil (3530). Si donc on suppose la masse du soleil 307831 (3405), sa parallaxe 9″ & le rayon moyen de la terre 3290200 toises (2691), on trouve que l'aplatissement de ce sphéroïde est de 22 pouces & $\frac{7}{10}$, c'est la quantité dont la force seule du soleil est capable d'élever les eaux de la mer sous l'équateur, comme on le voit par le calcul ci après. Nous verrons bientôt que la lune peut en produire trois fois autant; ce qui feroit en tout 8 pieds de marée dans une mer libre; mais cette hauteur est souvent diminuée par la résistance du fond; car elle n'est que de 3 pieds à

l'Isle de Ste Hélene, au Cap de Bonne-Espérance, dans les Philippines & les Molucques; & elle est souvent augmentée par la figure des côtes, puisqu'à S. Malo, il y a jusqu'à 70 pieds de marée, & même d'avantage.

Masse.	5488312
(Sin. 9″)3	6919452
Rayon de la Terre. . .	6517222
3 . . .	0477121
72 . . .	1857332
$\frac{5}{4}$ . . .	0096910
22 P, 7 . . .	1356349

Élévation totale de l'eau.

3593. Ce n'est pas précisément vers le soleil ou vers la lune qu'est dirigé le sommet de cette ellipsoïde aqueux, car on observe que la marée n'arrive qu'environ $2^h\frac{1}{2}$ après leur passage au méridien dans les mers libres; c'est ainsi que M. de la Caille l'a observé au Cap (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 456). M. Maskelyne, à $2^h\frac{1}{4}$ à l'Isle de Sainte-Hélene, (*Phil. transf.* 1762, *pag.* 591). Ainsi quand nous parlerons dans les articles suivans de l'astre qui produit la marée, il faudra entendre un point qui est à 35° environ plus oriental que le vrai lieu de l'astre. Et à l'égard des côtes qui sont plus réculées, la marée est encore plus retardée, comme on le voit par la table de l'*Etablissement du Port*, qui est dans la *Connoissance des Temps*, & dans tous les livres de Navigation, tels que celui du P. Fournier, de M. Bouguer, &c.

Marées à différentes heures.

3594. Dans une ellipse peu aplatie les excès des rayons sur le petit demi-axe sont comme les carrés des sinus des distances au petit axe (2680); ainsi le sphéroïde aqueux faisant successivement avec le soleil tout le tour de la terre, les pays situés sous le grand axe seront inondés, ceux qui seront sous le petit axe auront basse mer, & la différence entre la basse mer & la hauteur de l'eau pour un moment quelconque sera l'excès d'un des rayons sur le petit axe de l'ellipse.

La hauteur de la marée au-dessus des basses eaux, en un lieu quelconque, est donc égale à la plus grande hauteur de l'eau multipliée par le carré du cosinus de la distance de l'observateur au sommet de l'ellipsoïde; ou de la distance entre le zénit du lieu & l'astre qui produit la marée, en supposant l'ellipsoïde dirigé à l'astre même;

ainſi la plus baſſe mer arrive quand l'aſtre eſt à l'horizon, & la plus haute mer quand l'aſtre eſt au méridien.

Delà il ſuit que ſi le lieu donné & l'aſtre qui produit la marée ſont tous deux ſous l'équateur, la hauteur de la marée eſt comme le carré du coſinus de l'angle horaire; & l'élévation croît à peu-près comme les carrés des temps aux environs du méridien; c'eſt auſſi ce que l'obſervation a fait voir (*Mém. acad.* 1720, *pag.* 360).

Marées à différentes latitudes.

Si le lieu donné eſt éloigné de l'équateur, la hauteur de la marée eſt comme le carré du coſinus de la latitude; mais auſſi-tôt que la latitude eſt aſſez grande pour que la lune ne ſe couche point dans certains temps, il n'y a plus qu'une ſeule marée dans les 24 heures; parce que la lune n'approche qu'une fois de l'horizon. Sous le pole même il n'y a point de marée diurne, puiſque la lune reſte ſenſiblement pendant toute la journée à la même diſtance du zénit, & le ſphéroïde aqueux tourne, ſans s'élever à une heure plus qu'à une autre. Dans les autres cas, il y a deux marées, l'une répond à peu-près au paſſage ſupérieur de la lune par le méridien, l'autre au paſſage inférieur; mais elles ſont fort inégales.

A différentes déclinaiſons.

Si l'aſtre n'eſt pas dans l'équateur, la marée pour un pays ſitué ſous l'équateur ſera comme le carré du coſinus de la déclinaiſon, parce que cette déclin. ſera elle-même la diſtance de l'aſtre au zénit, ou la diſtance du point donné au ſommet de l'ellipſoïde. Si le lieu donné n'eſt pas dans l'équateur, la marée ſupérieure ſera la plus grande, ſuivant la théorie, quand l'aſtre paſſera le plus près du zénit; c'eſt-à-dire, quand la déclinaiſon de l'aſtre ſera du côté du pole élevé; mais la marée inférieure ſera plus petite que quand l'aſtre étoit dans l'équateur, parce que le point oppoſé à l'aſtre ſera plus éloigné du zénit que l'équateur, quand l'aſtre ſera dans la partie inférieure du méridien.

Marées des équinoxes.

L'on obſerve cependant que les marées en Europe ſont plus grandes en général dans les équinoxes que dans le ſolſtice d'été; cela vient probablement de quelques circonſtances particulières; 1°. Les vents du Sud & de l'Oueſt

ſont alors plus fréquens & plus forts; 2°. La marée du ſolſtice eſt plus gênée entre les continens de l'Afrique & de l'Amérique, & plus reſſerrée que celle des équinoxes; elle peut donc être moins ſenſible ſur nos côtes; 3°. Dans les ſolſtices il y a deux marées, dont une forte & l'autre foible, & qui ſe compenſent mutuellement, au lieu que dans le temps des équinoxes il y en a deux à peu-près égales, dont l'effet total eſt plus ſenſible. Ajoutons cependant qu'il n'eſt point auſſi général qu'on le dit communément que les marées des équinoxes ſoient les plus grandes de l'année.

3595. Si la force du ſoleil eſt capable de changer la ſurface des eaux de l'Océan en un ſphéroïde allongé dont le ſommet eſt dirigé vers le ſoleil, la lune doit produire un effet ſemblable; auſſi les marées qu'on obſerve participent-elles des mouvemens du ſoleil & de la lune. Dans les ſyzygies, c'eſt-à-dire, les nouvelles lunes & les pleines lunes, le ſphéroïde aqueux produit par la force du ſoleil, & celui qui eſt produit par la force de la lune, ſont dirigés dans le même ſens; ainſi l'allongement du ſphéroïde eſt égal à la ſomme des allongemens que le ſoleil & la lune ſont capables de produire ſéparément; mais dans les quadratures les axes de ces deux ſphéroïdes ſont à angles droits, & le grand axe du ſphéroïde ſolaire augmente le petit axe du ſphéroïde lunaire. Ainſi les marées des ſyzygies ſont la ſomme des effets du ſoleil & de la lune, tandis que les marées des quadratures ſont la différence. Les hauteurs des marées peuvent donc nous faire connoître le rapport des forces du ſoleil & de la lune. M. Bernoulli ayant appris qu'à S. Malo la mer varioit de 50 pieds dans les marées moyennes des ſyzygies, & de 15 pieds dans celles des quadratures, en conclut que le rapport des deux forces du ſoleil & de la lune eſt celui de 13 à 7 (*3412*); mais après avoir examiné diverſes obſervations ſur-tout les intervalles des marées (*3596*), il en conclud que la force de la lune eſt $2\frac{1}{2}$ fois celle du ſoleil, dans les moyennes diſtances.

Marées des ſyzygies.

Force de la lune.

Quand la lune eſt apogée ſa force diminue comme le

cube de sa distance augmente (3444), ensorte que si la force moyenne de la lune est $2\frac{1}{2}$, la plus grande force dans le périgée sera égale à 3, & la plus petite = 2 seulement, dans l'apogée ; en effet, les cubes des parallaxes extrêmes, ou de 53′ 51″, & de 61′ 29″ sont à peu-près comme 2 est à 3.

Les cubes des distances du soleil à la terre en hiver & en été sont entre eux comme 1 est à 1, 106. La force du soleil est donc plus grande en hiver d'un dixième, & si sur 22 ou 23 pieds de marée qu'il y a Brest quand la lune est périgée, il y en a $5\frac{3}{4}$ pour l'action du soleil, il doit y avoir en hiver 7 pouces d'élévation de plus qu'en été, par le seul effet des distances du soleil à la terre.

3596. Jusqu'ici nous n'avons parlé des marées que pour le cas des syzygies ou des quadratures ; examinons ce qui se passe dans les temps intermédiaires. Quand la lune & le soleil sont à quelque distance l'un de l'autre, chacun produit une élévation différente dans un lieu donné, & la somme de ces deux élévations est la hauteur de la marée qu'il s'agit de déterminer. La force de la lune étant deux ou trois fois plus grande que celle du soleil, le point de la haute mer approche deux ou trois fois plus de la lune que du soleil, & n'est jamais éloigné de la lune de 15°. Ainsi le passage de la lune au méridien est ce qui influe le plus sur le temps de la haute mer ; aussi la différence entre le passage de la lune & le moment de la haute mer n'est jamais de plus de 63′, lors même que la lune est périgée & qu'elle est à 60° du soleil. M. Bernoulli a déterminé, par ses formules, le *maximum* de cette différence entre le passage de la lune & la haute mer ; mais il est aisé de le déterminer par le calcul astronomique, à l'aide de quelques fausses positions, pour toutes
Pl. XLII. les distances du soleil à la lune. Soit C le centre de la
Fig. 333. terre (*fig.* 333), S le soleil, L la lune, H le point de la haute mer, LS la distance du soleil à la lune supposée de 60°, LH la distance de la lune au point de la haute mer; la hauteur de la plus grande marée par l'action seule du soleil

leil étant appelée 1, l'on aura cof. SH^2 pour la hauteur en H, produite par le foleil (3594), & 3 cof. LH^2 pour la hauteur produite en H par l'action de la lune périgée. Si l'on fuppofe LH de 9° & SH de 51°, lo'n trouvera ces deux termes 0,3961 & 2,9266 ; ainfi la hauteur totale de la marée fera 3, 3227. Si l'on fuppofe 9° ½ on aura 2,9183 & 0,4046 ce qui fait 3,3229 ; fi l'on fuppofe 10° on aura 2,9095 & 0,4132, ce qui donne la marée 3,3227; il eft facile de voir que le *maximum* de leur fomme eft à 9° ½ ; c'eft la plus grande hauteur de la marée quand le foleil & la lune font à 60° l'un de l'autre, & que la lune eft périgée. Pour favoir combien de temps le point H doit paffer au méridien plutôt que la lune, on confidérera que le retardement diurne de la lune étant alors de 1h 6′, ces 9° ½ font 40′ de temps, ainfi la haute-mer précédera de 40′ le paffage de la lune au méridien ; fuivant la table de M. Bernoulli, c'eft 38′ ½. Quand la lune eft apogée & que fa force eft feulement double de celle du foleil, le *maximum* pour 60° de diftance eft de 2,3660 & ce point eft à 15° de la lune ; ces 15° font 62′ ¾ en temps lunaire ; M. Bernoulli ne trouve que 58′.

Différence entre ces marées & les paffages de la lune.

Cette différence entre le paffage de la lune au méridien, & l'heure de la marée a encore fervi à M. Bernoulli à déterminer le rapport des forces de la lune & du foleil (3412). Suppofons que dans les moyennes diftances SH réponde à 34′ de temps; & que HL foit de 14′, il eft aifé de prouver que ces deux quantités font en raifon inverfe des forces du foleil & de la lune, d'où il réfultera que ces forces font entre elles comme 14 eft à 34 ou à peuprès comme 1 eft à 2 ½. Pour prouver que HL eft à SH comme la force du foleil eft à celle de la lune, prenons en général le nombre m pour exprimer ce rapport ; la hauteur en H eft cof. $SH^2 + m.$ cof. HL^2 (3594) ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cof. $2\,SH + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}$ cof. $2\,HL$ (3627); la différentielle doit être égale à zéro (3299) ; c'eft-à-dire, (3308), fin. $2\,SH . d . SH + m$ fin. $2\,HL . d . HL = 0$, mais $d . SH = - d . HL$, puifque SH augmente autant que LH

diminue donc sin. 2 $SH = m$ sin. 2 HL; & comme dans les petits arcs les sinus sont proportionnels aux arcs, on a $SH = m.\ HL$. La table de M. Bernoulli paroît être faite sur un nombre plus petit que $2\frac{1}{2}$; car suivant son exemple LH répond à 15′, SH à 35′, SL à 50′; or 35 : 15 :: 7 : 3, ce qui donne $m = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ au lieu de $2\frac{1}{2}$ qui est cependant la force de la lune suivant M. Bernoulli.

Règle générale pour le calcul des marées.

3597. De tous les principes établis dans les articles précédens, il résulte une règle générale pour calculer la hauteur de la marée dans un lieu & un temps quelconque. Il faut trouver 1°, le lieu du soleil & de la lune, & leurs distances à la terre, 2°, calculer leurs déclinaisons, leurs hauteurs pour le lieu donné (1034), supposant l'angle horaire plus grand de $3^h\frac{1}{4}$ si c'est à Brest, 6^h à S. Malo ou à Plymouth, &c. plus ou moins suivant l'heure du port, dont on trouve une table dans la connoissance des temps & dans tous les livres de navigation. Quand cette hauteur calculée sera zéro, l'on aura la base mer dans le lieu donné, car le sommet du sphéroïde sera dans l'horizon. Hors delà le carré du sinus de cette hauteur du sommet du sphéroïde aqueux, multiplié par le plus grand effet de la lune à la distance donnée (3595), donnera la hauteur de la marée, ou la différence de la plus basse mer lunaire à celle qui a lieu au moment donné; on fera le même calcul pour le soleil, & l'on ajoutera ensemble les deux hauteurs pour avoir la marée totale.

3598. Il est bon de la rapporter au point fixe ou au niveau naturel pour la combiner avec celle du soleil rapportée au même niveau; mais pour avoir ce point de niveau, il est nécessaire de démontrer la proposition suivante.

La hauteur de l'eau vers le sommet du sphéroïde aqueux est double de sa dépression à 90° delà, l'une & l'autre étant comptées du terme naturel ou du niveau que les eaux atteindroient s'il n'y avoit point de marée. En effet, conservant les dénominations de l'art. 3333, on trouve $x = \frac{1}{3}\beta$, c'est l'abaissement vers le petit axe; ainsi l'élévation vers le grand axe est $\frac{2}{3}\beta$. L'endroit où le globe coupe l'ellipsoïde est à 54° 44′ du grand axe, car

il faut que le carré du cosinus de cette distance fasse $\frac{1}{3}$, & la racine de $\frac{1}{3}$ est le cosinus de $54^{\circ} 44'$. Ainsi quand on veut prendre un point fixe pour y rapporter les hauteurs de l'eau, il faut le prendre au-dessus des basses eaux, d'un tiers seulement de la différence entre la basse mer & la haute mer ; afin que la montée soit double de la descente dans les syzygies. A Brest il y a 23 pieds de marée dans les cas les plus favorables ; le tiers est 7 pieds 8 pouces, c'est la hauteur du niveau naturel de la mer au-dessus des basses eaux ; plusieurs observateurs se sont trompés en prenant le milieu pour terme moyen.

Dans les marées des quadratures la hauteur totale étant la différence des effets de la lune & du soleil, si on les appelle l & s on aura $\frac{2}{3} l - \frac{1}{3} s$ pour l'élévation, & $\frac{1}{3} l - \frac{2}{3} s$ pour la dépression ; ainsi leur rapport dépend de celui des forces l & s ; si ce rapport est celui de 5 à 2 (3595), l'élévation des eaux au-dessus du point fixe sera 8 fois plus grande que leur dépression, car en substituant pour l sa valeur $\frac{5}{2} s$, la première quantité sera $\frac{24}{18}$, & la seconde $\frac{3}{18}$ seulement ; c'est en effet ce que trouve M. Bernoulli à la fin de la pièce que nous avons citée.

3599. On objecte souvent aux attractionnaires que si l'attraction étoit la cause des marées, elle devroit avoir lieu dans les petites mers comme dans les grandes ; il est donc nécessaire de montrer que dans de petites mers la marée doit être insensible. Supposons que SX (*fig.* 333), soit le globe terrestre, ABY le sphéroïde aqueux qui auroit lieu si la mer étoit libre & couvroit toute la terre ; s'il y a un petit espace de mer qui n'ait que la largeur ZX d'orient en occident, les eaux ne peuvent pas prendre la courbure YS, car n'y ayant pas des eaux environnantes pour prendre la place de celles qui s'éléveroient, elles sont réduites à prendre une courbure semblable OR, ensorte que YO soit égale & parallèle à SR, la surface COR étant toujours égale à la surface CZX. Par-là on voit sans aucun calcul que la marée y sera d'autant moins sensible que la longueur de la mer en longitude sera moindre, puisque la surface du triangle

Marées dans les petites mers.

Fig. 333.

ZCX diminue comme *ZX* & que l'inclinaiſon des lignes *OR*, *ZX*, ne ſauroit jamais être plus grande que l'angle formé par le cercle & par l ellipſe en *M*; auſſi M. Bernoulli démontre par ſes formules que la marée totale de cette mer eſt à celle qui auroit lieu dans la mer libre, comme la longueur *ZX* de cette mer d'orient en occident eſt au ſinus total.

Il ſuit encore que la pleine mer y arrive quand la diſtance *DM* de l'aſtre au lieu donné eſt d'environ 54°, parce que c'eſt en *M* qu'eſt la plus grande inclinaiſon, & que c'eſt à 54° du ſommet *B* qu'eſt l'interſection du cercle & de l'ellipſe (3598). M. Bernoulli prouve également que ſi la mer avoit 90° d'étendue, la marée y ſeroit plus petite d'un ſixième ſeulement que dans la mer libre; & elle y arriveroit $1^h\ 5'$ plus tard que ſi toute la terre étoit inondée.

On voit auſſi par ce qui précède que dans une mer étroite lorſque l'eau s'élève vers un rivage *R*, elle s'abaiſſe vers le rivage oppoſé en *O*.

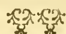
Marées extraordinaires.

Je ne parlerai pas ici des modifications particulières que la loi générale des marées éprouve en différens pays, par la ſituation des mers & des rivages; on peut voir ce que Newton dit de Batsham dans le Tunquin, où il n'y a qu'une marée par jour; ce qu'on a écrit ſur les marées extraordinaires de l'Euripe, dans le ſecond tome des voyages de Spon, & dans le dictionn. de la Martinière, & ſur celle du détroit de Gibraltar, dans les *Tranſ. Philoſ.* 1762.

Quant au détail des obſervations qu'on a faites en France ſur les marées, on les trouvera ſur-tout dans les mémoires de l'académie, années 1710, 1712, 1713, 1714, 1720, & dans les pièces qui ont remporté le prix (3591).

Concluſion.

L'attraction univerſelle eſt donc aujourd'hui démontrée par toutes les eſpèces de phénom. que nous avons parcourus, & nous n'avons à deſirer que la perfection des méthodes & de l'analyſe qui doivent nous en faire trouver juſques aux moindres circonſtances, & dont nous avons donné ici tous les fondemens, avec les principaux réſultats.



LIVRE VINGT-TROISIEME.

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

Nous avons renvoyé à ce XXIIIe livre un grand nombre de propoſitions, qui auroient fait dans le cours des autres livres de trop longues digreſſions, & qui d'ailleurs devoient être préſentées dans un certain ordre, & avec un enchaînement convenable. Ce livre auroit pu être placé à la tête de tout l'Ouvrage, comme dans les Leçons de M. de la Caille ; mais il y auroit annoncé l'aſtronomie ſous un aſpect trop rebutant ; d'ailleurs on peut très-bien lire le reſte de l'Ouvrage, & le comprendre, ſans remonter à toutes les démonſtrations de Trigonométrie qu'il ſuppoſe.

Uſage des ſinus dans l'Aſtronomie.

3600. Les ſinus dans l'aſtronomie prennent ſans ceſſe la place des angles & des arcs : il eſt donc eſſentiel d'en donner une idée ſimple, & de diſſiper l'obſcurité qui ſemble y être attachée pour un grand nombre de lecteurs ; nous allons donc conſidérer les ſinus dans leurs uſages les plus familiers ; on verra combien la conſidération en eſt eſſentielle dans l'aſtronomie & la trigonométrie, & en même temps combien l'idée en eſt ſimple.

Soit un triangle rectiligne *ABC* (*fig.* 314), rectangle en *C*; que du centre *A* l'on décrive un arc de cercle *BD*, qui eſt la meſure de l'angle *A* ; on appelle *Sinus* de l'arc *BD*, la perpendiculaire *BC*, abaiſſée de l'extrémité *B* de l'arc ſur le rayon *AD* qui paſſe par l'autre extrémité *D* du même arc. Ainſi la ligne *BC* eſt le *Sinus* de l'angle *A* ou de l'arc *BD* qui en eſt la meſure ; *AC* en eſt le *Coſinus*, *CD* le *Sinus verſe*.

Planche XLI. Fig. 314.

Définition des ſinus.

Fig. 314. 3601. Les ſinus ou perpendiculaires, tels que *BC*, ne ſuivent pas la même marche, le même progrès que les arcs dont ils ſont les ſinus; ſi, par exemple, l'arc *LD* eſt de 45° enſorte que l'arc *DG* de 90° en ſoit le double, la hauteur, ou la perpendiculaire *AG* ne ſera pas double de la perpendiculaire *BC*; on voit bien que la partie *BG* rampe, ou monte plus obliquement que la partie *BD*; & ſa hauteur, ou ſon ſinus ne doit pas croître auſſi rapidement que dans l'arc *BD*, quoique la longueur des arcs ſoit la même. Ainſi la marche, ou la proportion des ſinus *BC*, *AG*, eſt différente de celle de leurs arcs *DB*, *DG*; les géomètres ont calculé avec ſoin des tables de ſinus pour tous les angles (3904), c'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant *BD* de 10°, 20°, 30°, &c. ils ont calculé les différentes longueurs des perpendiculaires, telles que *BC*; le plus grand de tous ces ſinus eſt le ſinus total, ou le rayon lui-même *AG*, parce que l'arc *DG* de 90°, a la plus grande hauteur, la plus grande de toutes les perpendiculaires.

Utilité des ſinus. 3602. Ces ſinus viennent ſouvent ſe placer dans l'aſtronomie à la place de leurs arcs, & il eſt eſſentiel de les bien comprendre. Je ſuppoſe qu'une planète décrive une Fig. 315. orbite *APBD* (*fig.* 315) autour du centre *C*, & que je ſois placé au point *O* pour conſidérer ſon mouvement, cette planète en partant de la ligne des centres *A*, décrira un arc *AP*, elle ne me paroîtra éloignée de la ligne des centres que de la quantité *PE*, qui eſt le ſinus de l'arc *AP* décrit par la planète; lorſqu'elle aura fait 90°, ou *CB*, elle ſera la plus éloignée du centre *C* par rapport à mon œil, parce que le rayon, ou ſinus total *BC* ſera lui-même la diſtance apparente de la planète au centre *C* (en ſuppoſant la diſtance de l'œil extrêmément grande); au-delà du point *B* elle paroîtra revenir à la ligne des centres, parce que les ſinus, tels que *FG*, diminueront de la même manière qu'ils avoient augmenté dans le premier quart-de-cercle *AB*, juſqu'à ce qu'en *D* l'arc parcouru étant de 180°, le ſinus ou la perpendiculaire s'évanouiſſe comme en *A*.

La planète paſſant de l'autre côté de la ligne des centres au-delà du point *D*, le ſinus qui avoit diminué

jusqu'à zéro, recommence à augmenter dans l'autre sens, par les mêmes degrés que dans le premier quart. *Fig.* 315.

3603. Ainsi dans ce cas-là ce sont les sinus & non point les arcs parcourus par la planète, qui mesurent son mouvement vu du point *O*; il est donc essentiel alors de recourir aux tables des sinus pour savoir à quelle distance la planète paroîtra relativement à la ligne des centres *OACD* en différens temps de sa révolution ou a différens degrés de son orbite. Cet exemple suffit pour faire voir la nécessité d'employer les sinus dans l'astronomie; on en a vu bien d'autres dans le cours de cet ouvrage. Toutes les fois qu'une équation, ou un effet périodique, dépend de la longueur d'un arc, qu'on appelle *Argument* de cette équation, elle est ordinairement proportionnelle au sinus de cet arc; on en a vu plusieurs exemples (1472, 3495, &c.).

Argument d'une équation.

3604. Nous ferons à cette occasion deux remarques essentielles, qu'il faut bien concevoir & retenir avec soin, parce qu'elles sont d'un usage continuel dans les ouvrages modernes, & dans les formules où il entre des sinus; la première c'est que les sinus deviennent négatifs ou changent de signe au-delà de 180°, c'est-à-dire, dans le 3e & le 4e quart-de-cercle; en effet, le sinus *EP* augmente de valeur jusqu'à ce qu'il soit égal au rayon *CB*, il diminue ensuite jusqu'au point *D* où il devient nul, mais aussi-tôt il renaît de l'autre côté du point *B*; or toute quantité qui ayant diminué jusqu'à zéro, continue sa marche de la même manière qu'auparavant, doit augmenter dans un sens contraire; c'est-à-dire, qu'elle devient négative, si l'on suppose qu'elle étoit d'abord positive, puisqu'elle est en sens contraire de ce qu'elle étoit. Ainsi l'équation — 7″ sin. t (3495) nous apprend qu'il faut ôter 7″ de la longitude du soleil, lorsque l'angle t est de 3^s; mais il faudra les ajouter lorsque l'angle t sera de neuf signes; & cette équation sera toujours additive dès que l'angle t sera de plus de 180°.

Remarques essentielles sur les sinus.

Les sinus changent de signe à 180°.

3605. On doit faire une remarque semblable sur les cosinus; nous avons dit que si *PE* est le sinus de l'arc

Fig. 315. *AP*, *CE* s'appelle ſon coſinus ou le ſinus de ſon complément à 90°, c'eſt-à-dire, de l'arc *PB*; le coſinus *CE* diminue viſiblement à meſure que l'arc *AP* augmente, & il s'évanouit quand cet arc parvient à 90°, alors *CE* eſt réduite au ſeul point *C*, enſorte que coſ. 90° ou coſ. 3 ſignes = 0. Au-delà du point *B*, le coſ. paſſe de l'autre côté du centre *C*; car quand la planète eſt en *F* le coſinus de ſon élongation ou de l'arc *AF* eſt *CG*, qui eſt oppoſé à *CE*, & négatif par rapport à lui; le coſinus *CG* devient le plus grand lorſque la planète eſt en *D*, car il eſt égal alors au rayon même du cercle ou au ſinus total, en ſorte que coſ. 0 = 1 & coſ. 180° = — 1; ce coſinus diminue enſuite juſqu'à ce que la planète étant au point *H*, le coſinus redevienne égal à zéro; enſorte que coſ. 270° = 0, ou coſ. neuf ſignes = 0; enfin le coſinus depuis *H* juſqu'en *A*, ſe trouve de la même quantité & du même ſigne que dans le premier quart *AP* de la révolution, d'où ſuit la règle, ſuivante: *Les ſinus changent de ſigne dans le troiſième & le quatrième quart-de-cercle; les coſinus changent dans le ſecond & dans le troiſième.*

Règle eſſentielle.

3606. Il n'en eſt pas d'une tangente telle que *AT* comme du ſinus; lorſque ſon arc *AR* ſurpaſſe 90°, elle change de ſigne quoiqu'elle paroiſſe du même côté que le ſinus, parce que le point de rencontre *T* de la tangente *AT* & du rayon *CT* paſſe de l'autre côté, & ſe trouve ſur le rayon prolongé au-delà du centre, vers la partie oppoſée.

3607. Pour avoir le ſinus d'un arc *ABDK* qui ſurpaſſe 180°, il ſuffit de retrancher 180, & de prendre le ſinus de l'arc *DK*, parce que le ſinus de deux degrés ou celui de 182 eſt le même, comme on le voit par la figure, où la ligne *KG* eſt le ſinus de *DK*, de *KA* & de *ADK*; ainſi quand une quantité varie comme les ſinus, elle devient nulle à 180°, & recommence à croître après 180 de la même manière qu'elle croiſſoit vers zéro; par la même raiſon le ſinus de 380° eſt le même que celui de 20°.

Les ſinus ſont des fractions.

3608. La seconde remarque importante que nous avions à faire ſur les ſinus, eſt la manière de

les

les confidérer comme des fractions du rayon ; les tables des finus ne font proprement que des fuites de fractions décimales dont l'unité eft le rayon ou le finus total, c'eft-à-dire, le finus de 90° ; par exemple, je trouve dans les tables que pour 90° le finus eft 100 ; & que pour 30° il eft 50, c'eft-à-dire, la moitié de 100, je puis donc dire également que le finus total eft 1 & que le fin. de 30° eft $\frac{1}{2}$, ou 0, 5, pour l'exprimer dans la forme des décimales. De même le finus de 10° fera 0, 17, c'eft-à-dire, $\frac{17}{100}$ du rayon ou du finus total pris toujours pour unité.

3609. Ainfi toutes les fois qu'une quantité fe trouve multipliée par un finus ; comme quand nous difons 20″ fin. 30°, cela veut dire que ces 20″ font multipliées par une fraction ; & cette fraction, fin. 30°, n'eft autre chofe que une demie, parce qu'on fous-entend toujours que ce finus fe rapporte au finus total dont il eft une partie.

Les finus font les fractions du rayon.

Dans la *fig.* 315, fuppofons que la plus grande diftance de la planète au centre *C*, par exemple d'un fatellite par rapport à Jupiter, où le rayon *CB*, foit de 20″, on pourra dire en général que fa diftance apparente *PE* vue de la terre dans toute autre pofition du fatellite fur fon orbite, eft égale à 20″ fin. *AP*. En effet, lorfque le finus de l'arc *AP* où la perpendiculaire *PE* fera la moitié de *BC*, la diftance *PE* ne paroîtra que de 10″, parce que 20″ fin. *AP* feront 20″ multipliées par une demie ; quand le finus de *AP* fera la dixième partie du rayon, 20″. fin. *AP* fera 2″ ou la dixième partie de 20″. Telle eft la manière ufitée actuellement de confidérer les finus ; on fent bien qu'il en eft de même des cofinus, ainfi 20″ cof. 60° eft égal à $\frac{20''}{2}$ = 10″, parce que cof. 60° = fin. 30°, n'eft autre chofe que $\frac{1}{2}$.

Fig. 315.

3610. A l'égard des tangentes elles ne font des fractions proprement dites que jufqu'à 45° ; au-delà de ce terme ce font des nombres plus grands que l'unité. Ainfi 20″. tang. 56° 19′ = 30, parce que la tangente de 56° 19′ eft égale à 1 $\frac{1}{2}$; comme il eft aifé de s'en appercevoir en ouvrant les tables de finus.

3611. La troifième remarque effentielle fur les finus

Expreſſion des ſinus en lignes. *Fig.* 314.

a pour objet leur expreſſion en lignes, dont nous avons fait un uſage fréquent. Si l'on a un triangle rectangle ABC (*fig.* 314) dont l'hypothénuſe AB ſoit priſe pour rayon, le côté BC peut s'exprimer par AB. ſin. A, & le côté AC par AB. coſ. A; car ſuivant les premiers principes de la trigonométrie rectiligne on a cette proportion R : ſin. A : : AB : BC, ce qui revient à 1 : ſin. A : : AB : BC, puiſque par le mot de rayon nous entendons toujours l'unité (3608); donc on a $BC = \frac{AB.\text{ſin. } A}{1} = AB$ ſin. A. Par la même raiſon l'on a 1 : coſ. A : : AB : AC, c'eſt-à-dire, $AC = AB$. coſ. A. Si l'on décrit ſur le rayon AB un arc de cercle DBG, BC eſt viſiblement le ſinus de l'arc BD, AC égal à BE eſt le ſinus de l'arc BG ou le coſinus de l'arc BD, c'eſt-à-dire, de l'angle A; ſi donc le ſinus BC de l'angle A étoit la moitié du rayon BA, l'on auroit $BC = \frac{1}{2} AB$, donc en général quelle fraction que ſoit BC du rayon AB, elle ſera exprimée par AB. ſin. A, puiſque ſin. A, comme on l'a dit ci-deſſus, n'eſt jamais qu'une fraction du rayon, ou, ce qui revient au même, le rayon multiplié par une fraction. C'eſt-à-dire, enfin que la perpendiculaire d'un triangle rectangle eſt égale à l'hypothénuſe multipliée par une fraction, & que cette fraction ſe trouve dans les tables de ſinus.

3612. Delà il ſuit que ſi la même ligne droite répond à deux arcs de rayons différens, les fractions qui dans nos tables expriment les ſinus de ces arcs ſeront en raiſon inverſe des rayons; car ſin. BD étant égal à BC diviſée par le rayon, ſi BC eſt la même & que ce rayon change, ſin. B augmentera d'autant plus que le rayon diminuera (3151).

3613. Nous nous ſervons ſouvent d'une autre expreſſion pour les ſinus, par exemple, le ſinus de l'angle A ou de l'arc $BD = \frac{BC}{BA}$; cette expreſſion revient au même que celle des livres de trigonométrie ordinaire, car AB eſt à BC comme le rayon eſt au ſinus de l'arc BD, mais par le mot de rayon nous entendons toujours l'unité, donc

$AB : BC :: 1 :$ sin. BD, donc sin. $BD = \frac{BC}{AB}$, qui est une fraction de l'unité. Il en seroit de même des cosinus & des tangentes.

3614. C'est par le moyen de cette expression que nous démontrerons une propriéte des triangles rectilignes, dont nous avons fait usage à l'article 1197. Soit un triangle STV (*fig.* 63), & la perpendiculaire TX abaissée sur le prolongement de SV; on a $ST^2 = TX^2 + SX^2 = TX^2 + SV^2 + 2SV.VX + VX^2$, mais $TX^2 = TV^2 - VX^2$; donc $ST^2 = TV^2 + SV^2 + 2SV.VX$; ajoutant de part & d'autre $2SV.TV$, l'on aura $2SV.TV - 2SV.VX = SV^2 + 2SV.TV + TV^2 - ST^2$, d'où l'on tire la proportion $2SV.TV : 1 :: \overline{SV+TV}^2 - ST^2 : 1 - \frac{VX}{VT}$ ou $1 -$ cos. V; ou ce qui revient au même $4SV.TV : (SV+TV)^2 - ST^2 :: 2R :$ sin. verse V. Fig. 63.

3615. On trouvera dans les leçons d'astronomie de M. de la Caille, plusieurs formules de trigonométrie, qu'il a démontrées, & qui servent à substituer des sinus pour des tangentes, &c. dans différens calculs algébriques; mais elles ne m'ont pas paru d'un assez grand usage pour devoir les replacer ici; je vais seulement rappeller celles des produits des sinus & des cosinus, dont on a vu l'usage essentiel & continu dans les calculs des deux livres précédens.

3616. Je supposerai aussi comme des choses qui n'ont pas besoin de démonstration, quelques propriétés des triangles TDE, TAN (*fig.* 320): 1°. $TN : AN :: TE : ED$, c'est-à-dire, le rayon est à la tangente d'un arc, comme le cosinus est au sinus; 2°. $TA = \sqrt{TN^2 + AN^2} = \sqrt{1+tt}$, en nommant t la tangente AN; 3°. $TA : AN :: TD : DE$, ou $\sqrt{1+tt} : t :: 1 :$ sinus, donc le sinus est $\frac{t}{\sqrt{1+tt}}$. Le cosinus qui est égal au sinus divisé par la tangente devient $\frac{1}{\sqrt{1+tt}}$. La sécante est égale à $\frac{1}{\text{sin.}}$, la cosécante $= \frac{1}{\text{cos.}}$.

3617. CONNOISSANT *les sinus & les cosinus de deux*

arcs, trouver les ſinus & les coſinus de la ſomme & de la différence des deux arcs.

Fig. 316. Je ſuppoſe que AB & AD (*fig.* 316) ſoient les deux arcs donnés, dont les ſinus ſont AF & DG, & dont les coſinus ſont CF & CG; la ſomme de ces deux arcs eſt l'arc BD, dont le ſinus eſt DE & le coſinus CE; ayant abaiſſé la perpendiculaire GM ſur le ſinus DE, l'on aura deux triangles ſemblables ACF & DGM, qui donnent cette proportion, $CA : CF :: DG : DM$, donc $DM = \frac{CF.DG}{CA}$; de même en abaiſſant la perpendiculaire GH, on aura par les triangles ſemblables CAF, CGH, $CA : CG :: AF : GH$, donc $GH = \frac{AF.CG}{CA} = ME$; ajoutant enſemble les valeurs de DM & de ME, l'on aura DE, ou le ſinus de la ſomme

Sinus de la ſomme. DB, $= \frac{AF.CG + CF.DG}{CA}$; mais $\frac{AF}{CA}$ eſt le ſinus de l'arc AB (3613), & ainſi des trois autres lignes; donc ſi l'on appelle A & B les deux arcs donnés, l'on aura ſin. $(A+B)$ $=$ ſin. A. coſ. B + coſ. A ſin. B.

3618. Les triangles ſemblables CAF & DGM donnent encore cette proportion, $CA : AF :: DG : GM$; donc $GM = \frac{AF.DG}{CA} = EH$; par les triangles ſemblables CAF, CGH, l'on a auſſi $CA : CG :: CF : CH$; donc $CH = \frac{CF.CG}{CA}$, la différence entre les valeurs de CH & de EH, ſera la

Coſinus de la ſomme. valeur de $CE = \frac{CF.CG - AF.DG}{CA}$; donc faiſant $CA = 1$, l'on a coſ. $(A+B) =$ coſ. A. coſ. B — ſin. A. ſin. B.

3619. Si l'on prolonge DG juſqu'en N, & qu'on tire les perpendiculaires EN, EP, l'on aura des triangles ſemblables CAF, DEN; donc $CA : CF :: DE : DN$, & $DN = \frac{DE.CF}{CA}$. Par les triangles ſemblables CAF, CEP on a $CA : AF :: CE : EP$; donc $EP = \frac{AF.CE}{CA} = GN$; ſi l'on retranche la valeur de GN de celle de DN, on aura $DG = \frac{DE.CF - AF.CE}{CA}$; ſi l'on appelle A le plus grand arc DB, &

B le plus petit arc AB, leur différence est l'arc AD; la valeur de DG devient sin. $(A - B) =$ sin. A. cos. $B -$ sin. B. cos. A. Sinus de la différence. Fig. 316.

3620. Les triangles semblables CAF, CEP, donnent encore cette proportion, $CA : CF :: CE : CP$, donc $CP = \frac{CE.\,CF}{CA}$; mais à cause des triangles semblables CAF, DEN, on a aussi $CA : AF :: DE : EN$, ou $EN = \frac{DE.\,AF}{CA} = PG$, donc la somme $CG = CP + PG = \frac{CE.\,CF + DE.\,AF}{CA}$; nommant encore A & B les arcs DB & AB, on a CG, cosinus de leur différence AD, ou cos. $(A - B) =$ cos. A. cos. $B +$ sin. A. sin. B. Cosinus de la différence.

En considérant la somme, ou la différence des équations démontrées dans les quatre articles précédens, on en conclura aisément les quatre valeurs suivantes qui sont d'un usage continuel dans les calculs de l'attraction, pour résoudre les produits des sinus en sinus simples des arcs multiples.

3621. Sin. A.cos. $B = \frac{1}{2}$ sin. $(A + B) + \frac{1}{2}$ sin. $(A - B)$

3622. Sin. A. sin. $B = \frac{1}{2}$ cos. $(A - B) - \frac{1}{2}$ cos. $(A + B)$

3623. Cos. A. cos. $B = \frac{1}{2}$ cos. $(A + B) + \frac{1}{2}$ cos. $(A - B)$

3624. Cos. A. sin. $B = \frac{1}{2}$ sin. $(A + B) - \frac{1}{2}$ sin. $(A - B)$

Si l'on fait $B = A$, ces quatre équations produiront les trois suivantes, que nous avons aussi employées fort souvent dans les calculs de l'attraction; il suffit, pour les concevoir, de se rappeller que le cosinus de zéro $= 1$ (3605).

3625. Sin. A. cos. $A = \frac{1}{2}$ sin. $2A$.

3626. Sin. A^2 ou (sin. $A)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cos. $2A$. L'on voit par cette équation pourquoi nous avons pris à la place des carrés des sinus des latitudes, les sinus verses des latitudes doubles (2692, 3567).

3627. Cos. $A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cos. $2A$.

Si à la place de A l'on met $\frac{1}{2} A$, la formule 3626 devient :

3628. 2 (sin. $\frac{1}{2} A)^2 = 1 -$ cos. A.

3629. Cof. B — cof. $A = 2$ fin. $\frac{A+B}{2}$. fin. $\frac{A-B}{2}$; en effet, foit $a+b=A$, & $a-b=B$, c'eft-à-dire, $a = \frac{A+B}{2}$, & $b = \frac{A-B}{2}$; donc par la formule 3622, on aura fin. $\frac{A+B}{2}$. fin. $\frac{A-B}{2}$. $= \frac{1}{2}$ cof. $B - \frac{1}{2}$ cof. A; donc cof. B — cof. $A = 2$ fin. $\frac{A+B}{2}$. fin. $\frac{A-B}{2}$. Cette équation fervira à la démonftration d'un théorême fondamental de la trigonométrie fphérique (3743).

3630. Connoiffant la valeur de fin. $A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cof. $2\,A$, il eft aifé de trouver fin. A^3 ou le cube de fin. A; car il ne faut que multiplier fin. A^2 par fin. A, on aura fin. $A^3 = \frac{1}{2}$ fin. $A - \frac{1}{2}$ cofin. $2\,A$. fin. A; fi l'on développe le dernier terme du fecond membre, favoir $-\frac{1}{2}$ cof. $2\,A$. fin. A; par le moyen de la formule 3624, on aura $\frac{1}{4}$ fin. $3\,A - \frac{1}{4}$ fin. A, qui étant retranché de $\frac{1}{2}$ fin. A donnera fin. $A^3 = \frac{3}{4}$ fin. $A - \frac{1}{4}$ fin. $3\,A$.

3631. Pour trouver de même cof. A^3, l'on multipliera cof. A^2 ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cof. $2\,A$ (3627), par cof. A, l'on aura $\frac{1}{2}$ cof. $A + \frac{1}{2}$ cof. $2\,A$. cof. A; le fecond terme développé par la formule 3623, fera $\frac{1}{4}$ cof. $3\,A + \frac{1}{4}$ cof. A, qui ajouté à $\frac{1}{2}$ cof. A, donne $\frac{3}{4}$ cof. $A + \frac{1}{4}$ cof. $3\,A$.

3632. On aura par des opérations femblables, fin. A^4 & cof. A^4 : il ne s'agit que de multiplier les valeurs de fin. A^3 & de cof. A^3 par fin. A & cof. A, & de développer chacun des termes du produit par les formules précédentes.

Sin. $A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}$ cof. $2\,A + \frac{1}{8}$ cof. $4\,A$.
Cof. $A^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$ cof. $2\,A + \frac{1}{8}$ cof. $4\,A$.

Ces premiers termes fin. A, fin. A^2, fin. A^3, fin. A^4 fuffifent en faifant évanouir les fractions, pour faire appercevoir la loi fuivant laquelle ils augmentent, & pour continuer la férie; mais on a rarement befoin des termes ultérieurs. Voyez M. Euler, *Introd. in anal. infin. I.* 220.

3633. Après avoir démontré ces formules effentielles à nos calculs, je paffe à quelques autres propofitions de trigonométrie rectiligne, qui ne fe trouvent point dans

les livres ordinaires, & qui sont employées dans cette astronomie.

Si dans les formules 3617 & 3618, on fait $A = B$, on aura sin. $2A = 2$ sin. A. cos. A, cos. $2A =$ cos. $A^2 -$ sin. A^2; donc tang. $2A \left(= \frac{\text{sin. } 2A}{\text{cos. } 2A}\right) = \frac{2 \text{ sin. } A \text{ cos. } A}{\text{cos. } A^2 - \text{sin. } A^2}$. Nous en avons fait usage pour la nutation (3574).

Soit un arc $KD = KG$ (*fig.* 334) $= A$ & $RK = B$; ayant partagé RG & RD en deux parties égales en S & en P & tiré les tangentes RM, RL, on a $RM =$ tang. $\frac{1}{2}(A + B)$, $RL =$ tang. $\frac{1}{2}(A - B)$; l'angle RHG ayant pour mesure la moitié de RG est égal à l'angle RCM, donc les triangles rectangles GIH, CRM sont semblables; donc $IH : IG :: CR : RM$, ou cos. $A +$ cos. B : sin. $A +$ sin. B : : 1 : tang. $\frac{1}{2}(A + B)$. De même par les triangles semblables IGR, CRL, on a $IG : IR :: CR : RL$ ou sin. $A +$ sin. B : cos. $B -$ cos. A : : 1 : tang. $\frac{1}{2}(A - B)$, par conséquent $\frac{\text{sin. } A + \text{sin. } B}{\text{cos. } A + \text{cos. } B} =$ tang. $\frac{1}{2}(A + B)$ & $\frac{\text{sin. } A + \text{sin. } B}{\text{cos. } B - \text{cos. } A}$ $=$ cot. $\frac{1}{2}(A - B)$; divisant la première équation par la seconde, $\frac{\text{cos. } B - \text{cos. } A}{\text{cos. } A + \text{cos. } B} =$ tang. $\frac{1}{2}(A+B)$ tang. $\frac{1}{2}(A-B)$; nous en ferons usage (3733). Fig. 334.

Si l'on appelle n la tangente d'un arc KR, on aura la cosécante du double, ou $CB = \frac{1 + n^2}{2n}$; car puisque KR $= RP$, l'angle $RCB = BDC$, donc $CB = BD = AD$ $- AB =$ cot. $KR -$ cot. $2KR = \frac{1}{n} -$ cotang. $2KR$; mais si la tang. $= n$ la cot. du double est $\frac{1 - n^2}{2n}$ (3638) donc CB $= \frac{1}{n} - \frac{1 - n^2}{2n} = \frac{1 + n^2}{2n}$. Nous en ferons usage (3982). Cosécante d'un arc double.

On trouvera plusieurs autres formules semblables dans M. Euler, dans les leçons de M. de la Caille, pages 9 & suiv. dans M. Mauduit; mais nous n'en ferons aucun usage.

3634. Soient deux cercles concentriques $QARFQ$, $MKLNM$, (*fig.* 317) une ligne NQM tangente au cercle intérieur en Q, avec une perpendiculaire NE, une ligne QR tirée à volonté dans le petit cercle, une ligne Fig. 317.

Fig. 317. *NK* tirée de l'extrémité *N* de la ligne *MQN*, parallèlement à *QR*, & une autre ligne *NL* faiſant un angle *LNE* égal à l'angle *ENK*, avec la ligne *NE* parallèle au diamètre *QCF*; on aura $NK + NL = 2\,QR$; en effet *NK* eſt le double du ſin. de la demi-ſomme des arcs *NE* & *EK*, *NL* eſt le double du ſinus de leur demi-différence; ainſi l'on a $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} NL = \text{ſin.}\ (\frac{1}{2} NLE - \frac{1}{2} LE)$, donc on a (3619) $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} NL = \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE.\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE - \text{ſin.}\ \frac{1}{2} LE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} NLE$, $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLEK = \text{ſin.}\ (\frac{1}{2} NE + \frac{1}{2} EK) = \text{ſin.}\ (\frac{1}{2} NLE + \frac{1}{2} LE) = \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE + \text{ſin.}\ \frac{1}{2} LE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} NLE$, donc la ſomme des deux ſinus de $\frac{1}{2} NL$ & de $\frac{1}{2} NK = 2\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$, & la ſomme des deux cordes *NL* & $NK = 4\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$. Mais $QO = CQ\ \text{coſ.}\ CQO$ (3611) $= CQ\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} FR = CQ\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$, $QR = 2\,CQ\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$, & parce $CQ = \frac{1}{2} NK = \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE$, $QR = 2\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$; $2\,QR = 4\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2} NLE\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} LE$, c'eſt-à-dire, la même choſe que la ſomme des deux cordes; ainſi $NK + NL$ ſont égales à $2\,QR$.

3635. Delà il ſuit que ſi ces deux cercles devenoient des ellipſes comme dans la *fig.* 310, la même propriété auroit lieu; car ſi l'on incline ſur le plan des deux ellipſes des cercles dont les diamètres ſoient égaux aux grands axes des ellipſes, & que le ſinus de l'inclinaiſon ſoit au ſinus total, comme le petit axe de chaque ellipſe eſt au grand axe, ce qui a lieu toutes les fois que ces cercles ſe meuvent autour de la même ligne, on pourra conſidérer ces ellipſes comme les projections de ces cercles (1827), & les lignes *QR NK* (*fig.* 317) formeront par leurs projections des lignes qui auront entre elles le même rapport; puiſque toutes les lignes diminueront dans le ſens du petit axe, ſuivant le rapport du ſinus total au ſinus de l'inclinaiſon; donc ce qui eſt vrai des cercles ſera également vrai pour les ellipſes, & l'on aura $NK + NL = 2\,QR$, nous en avons fait uſage pour la figure de la terre (3580).

Tangente de la moitié d'un angle. Fig. 318.

3636. Soit un triangle rectangle *MPF* (*fig.* 318), dont l'angle *PFM* ſoit diviſé en deux parties égales, la tangente

tangente de la moitié de l'angle *PFM* sera égale à $\frac{PM}{PF+FM}$. Fig. 318.
Car ayant pris $FA = FM$, on aura l'angle *A* égal à la moitié de l'angle *MFP*, & la tangente de l'angle $A = \frac{PM}{PA}$ (3611) $= \frac{PM}{PF+FA} = \frac{PM}{PF+FM}$. Nous en avons fait usage (1240).

Delà il suit que $\frac{\text{sin. } F}{1+\text{cos. } F} = \text{tang. } \frac{1}{2} F$; mais $\frac{\text{sin. } F}{1+\text{cos. } F} = \frac{1-\text{cos. } F}{\text{sin. } F}$; donc $\frac{1-\text{cos. } F}{\text{sin. } F} = \text{tang. } \frac{1}{2} F$; & $\frac{1}{\text{sin. } F} - \text{tang. } \frac{1}{2} F = \text{cotang. } F$ (3990).

3637. Dans un triangle rectiligne tel que *FOM* dont on connoît deux côtés *FO*, *FM*, & l'angle compris *OFM*, le 3e côté *OM* est égal à $\sqrt{FO^2 - 2\,OF.\,FM.\,\text{cos.} F + FM^2}$; car ayant abaissé la perpendiculaire *MH* sur le côté *FO* prolongé en *H*, l'on a $FH = FM \text{ cos. } F$, & $OH = FM. \text{ cos. } F - FO$; on a aussi $MH = FM \text{ sin. } F$, donc $MO^2 = FM^2 \text{ cos. } F^2 - 2\,FM.\,FO.\,\text{cos. } F + FO^2 + FM^2 \text{ sin.} F^2$; mais $\text{sin. } F^2 + \text{cos. } F^2 = 1$, donc $MO^2 = FM^2 + FO^2 - 2\,FM.\,FO.\,\text{cos. } F$, & $MO = \sqrt{FM^2 + FO^2 - 2\,FM.\,FO.\,\text{cos. } F}$; nous nous sommes servi de cette propriété (1197, 3290).

3638. Si les tangentes de deux arcs *A* & *B* sont *T* & *t*, on aura tang. $(A \pm B) = \frac{T \pm t}{1 \mp Tt}$; car tang. $(A \pm B) = \frac{\text{sin. } A \pm B}{\text{cos. } A \mp B} = \frac{\text{sin. } A.\text{cos. } B \pm \text{cos. } A.\text{sin. } B}{\text{cos. } A.\text{cos. } B \mp \text{sin. } A.\text{sin. } B}$ (3617 & suiv.), (divisant le numérateur & le dénominateur par cos. *A* cos. *B*) $= \frac{\text{tang. } A \pm \text{tang. } B}{1 \mp \text{tang.} A.\text{tang. } B} = \frac{T \pm t}{1 \mp Tt}$. Ceci servira pour la proposition suivante, & pour l'art. 3985. Nous avons déja supposé (3633) que la tangente d'un arc étant *t*, la cotante du double étoit $\frac{1-t^2}{2t}$, c'est une suite de ce qui précède.

Tangente de la somme & de la différence de deux arcs.

3639. TROUVER la différence entre l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle & le plus grand côté, en supposant que le petit angle ne surpasse pas huit ou dix degrés; en sorte que la différence cherchée soit un arc sensiblement égal à sa tangente. Soit le triangle sphérique *BCD*

Réduction à l'écliptique.

fig. 323. (*fig.* 323) rectangle en *D*, dans lequel on cherche la différence entre *BC* & *BD*; on a d'abord cette proportion (3668) *R* : cos. *B* : : tang. *BC* : tang. *BD*; ainsi tang. *BD* = cos. *B* tang. *BC*; & si l'on appelle s le sin. verse de l'angle *B*, $1 - s$ son cosinus, z la tangente de l'arc *BC*, l'on aura tang. $BD = (1 - s)z$; donc la tangente de la différence entre les arcs *BC* & *BD*, ou la différence elle-même, si elle est fort petite, & qu'elle soit égale à sa tangente, sera (3638) $\frac{z-(1-s)z}{1+z(1-s)z} = \frac{sz}{1+zz-szz} = \frac{sz}{(1+zz)} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{szz}{1+zz}\right)}$; mais $1 - \frac{szz}{1+zz}$ en faisant la division actuelle est $= 1 + \frac{szz}{1+zz}$; car on peut négliger les termes suivans (3288) à cause de la petitesse de s & de $\frac{szz}{1+zz}$; donc la différ. des deux arcs *BC* & *BD* est $\frac{sz}{1+zz}\left(1+\frac{szz}{1+zz}\right)$ ou $\frac{sz}{1+zz} + \frac{sz.szz}{(1+zz)(1+zz)} = \frac{sz}{\sqrt{1+zz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+zz}} + \frac{s^2zz}{1+zz} \cdot \frac{z}{\sqrt{1+zz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+zz}}$; mais lorsque z est la tangente d'un arc *BC*, que j'appellerai *A*, son sinus est $\frac{z}{\sqrt{1+zz}}$, & $\frac{1}{\sqrt{1+zz}}$ en est le cosinus (3616); donc la différence des arcs *BC* & *BD* sera s. cos. *A*. sin. $A + s^2$. sin. A^2. sin. *A*. cos. *A*. & développant ces produits (3625, 3626), l'on a $\frac{1}{2}s$ sin. $2A + \frac{1}{4}s^2$ sin. $2A - \frac{1}{8}s^2$ sin. $4A$; c'est la réduction à l'écliptique, en supposant que *BC* soit l'argument de latitude (1133).

Si l'on abaisse un arc *DK* perpendiculaire sur *BC*, *BK* sera plus petit que *BD* par la même raison que *BD* est plus petit que *BC*; ainsi la différence entre *BC* & *BK*, où l'arc *CK* sera sensiblement le double de la réduction, sur-tout si l'angle *B* est fort petit; il sera donc égal à s sin. $2A$; c'est la différence entre la conjonction & le milieu de l'éclipse, qui a lieu pour les éclipses de lune, & mêmes pour celles des satellites de Jupiter, en la diminuant de moitié (2911).

3640. On aura par la même méthode une expression du cosinus de CD, dont on a besoin dans les calculs de la théorie de la lune, & que je vais y appliquer immédiatement. Soit TNS (*fig.* 319) le plan de l'écliptique, & TNV le plan de l'orbite de la lune, sur lequel on abaisse du centre S du soleil la perpendiculaire SV; supposons SN & VN perpendiculaires à TN, l'angle SNV sera égal à l'inclinaison des deux plans (3651), l'angle STV sera égal à la latitude du soleil par rapport à l'orbite de la lune, $\frac{TV}{TS}$ en sera le cosinus (3613); supposant $TN = 1$, $NS = z$, cos. $SNV = 1 - s$, on a $TS = \sqrt{1 + zz}$, $NV = (1 - s)z$, car $R : \text{cos.} N :: NS : NV$ (3611); donc l'hypothénuse $TV = \sqrt{1 + (1 - s)^2 zz} = \sqrt{1 + zz - (2s - s^2)zz} = \sqrt{1 + zz} . \sqrt{1 - \frac{(2s - ss)zz}{1 + zz}}$; donc $\frac{TV}{TS} = \sqrt{1 - \frac{(2s - ss)zz}{1 + zz}}$ & réduisant ce binome en série (3287) $= 1 - \frac{(s - \frac{1}{2}s^2)zz}{1 + zz} - \frac{\frac{1}{2}s^2 z^4}{(1 + zz)^2}$; mais lorsque z est la tangente d'un angle STN, que j'appellerai A, son sinus est $\frac{z}{\sqrt{1 + zz}}$ & son cosinus $\frac{1}{\sqrt{1 + zz}}$ (3616); donc $\frac{z}{1 + zz} = \text{sin.} A . \text{cos.} A = \frac{1}{2} \text{sin.} 2A$, & $\frac{z^4}{(1 + zz)^2} = \text{sin.} A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \text{cos.} 2A + \frac{1}{8} \text{cos.} 4A$ (3632); donc $\frac{TV}{TS}$ ou le cosinus de l'angle STV, c'est-à-dire, le cosinus du petit côté d'un triangle sphérique dont A seroit l'hypothénuse & $1 - s$ le cosinus du petit angle, sera $= 1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{16}s^2 + \frac{1}{2}s \text{ cos.} 2A - \frac{1}{16}s^2 \text{ cos.} 4A$. M. Clairaut a fait usage de ce théorême dans sa théorie de la lune, c'est pourquoi j'ai cru devoir en donner ici la démonstration, que l'auteur avoit supprimée pour abréger. J'en ai moi-même indiqué l'usage (3472).

3641. Dans un triangle rectiligne rectangle STN, si l'angle T est supposé très-petit, la différence entre le grand côté TN & l'hypothénuse TS sera égale à la moitié du carré de la fraction qui exprime SN par rapport à

TN. Soit $TN = 1$, $SN = \alpha$, enforte que α foit une petite fraction de l'unité ou de *TN*, on aura $TS^2 = 1 + \alpha^2$, & élevant $1 + \alpha^2$, à la puiffance $\frac{1}{2}$ (3287), l'on aura $TS = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2$ en négligeant les autres termes qui feroient beaucoup plus petits que α^2. Si par exemple, *SN* eft $\frac{1}{10}$ de *TN* on aura $\frac{1}{200}$ de *TN* pour l'excès de l'hypothénufe *TS* fur le côté *TN*. Delà il fuit que fi *NS* eft infiniment petite par rapport à *TS*, la différence de *TS* à *TN* fera un infiniment petit du fecond ordre, & devra fe négliger totalement.

Fig. 320. 3642. Si les finus *BC* & *DE* (*fig.* 320) de deux arcs *BN* & *DN*, font dans un rapport conftant, leurs cofinus feront en raifon compofée de celle de leurs finus, & de la raifon inverfe des petites variations de ces deux arcs. Suppofons que *BF* & *DH* font les changemens infiniment petits furvenus à ces deux arcs, enforte que *BC* foit infiniment proche de *FL*, & *DE* infiniment proche de *HM*: on a vu ci-devant (3307) que $DH : DI :: TD : TE$, & $BG : BF :: TC : TB$ ou *TD*; donc $\frac{TC}{TE} = \frac{DH.BG}{DI.BF}$; mais $\frac{BG}{DI} = \frac{BC}{DE}$; car puifque les finus reftent dans le même rapport, leurs décroiffemens leur font proportionnels; donc $\frac{TC}{TE} = \frac{BC}{DE} \cdot \frac{DH}{BF}$. Ceci fe rapporte à l'art. 1187.

Fig. 318. 3643. Etant données deux quantités inégales *MP*, *PF* (*fig.* 318), fi l'on fait cette porportion : la plus petite eft à la plus grande, comme le rayon eft à la tangente d'un angle *PMF*, & qu'on ôte 45° de l'angle *PMF*, en prenant $PN = PM$ & tirant la ligne *MN*, le rayon fera à la tangente du refte ou de *NMF*, comme la fomme des deux quantités eft à leur différence. Ayant tiré par le point *F* une perpendiculaire *FI* fur *MN* prolongée en *I*, & tiré *MD* parallèle à *PF*, *MD* fera la fomme des deux quantités dont *FN* eft la différence; or $DM : FN :: ID : IF$, donc, &c.

On démontre dans tous les livres de trigonométrie que dans un triangle rectiligne, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, la fomme des côtés eft à leur diffé-

rence comme la tangente de la demi-ſomme des angles inconnus eſt à la tangente de leur demi-différence ; ainſi la tangente de l'angle *FMI* étant multipliée par celle du demi-ſupplément de l'angle compris entre les deux côtés donnera la tang. d'un angle, qui ajouté à ce demi-ſupplément formera le plus grand des deux angles inconnus. Nous en avons fait uſage pour trouver les lieux des planètes (1143, 3043), & dans les tables, *pag.* 105 & 118.

3644. *LA SOMME de deux ſinus eſt à leur différence comme la tangente de la demi-ſomme des arcs eſt à la tangente de la demi-différence.* En effet, la ſomme des côtés d'un triangle eſt à leur différence comme la tangente de la demi-ſomme des angles oppoſés à ces côtés eſt à la tangente de leur demi-différence ; mais dans tout triangle les côtés ſont entre eux comme les ſinus des angles oppoſés & peuvent être pris pour ces ſinus, donc la ſomme des ſinus de deux angles eſt à la différence de ces ſinus comme la tangente de la demi-ſomme des angles dont ils ſont les ſinus eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles. Nous avons fait uſage de cette propoſition dans la théorie de la réfraction (2210).

Toutes les propoſitions précédentes appartiennent plutôt à des élémens de géomètrie qu'à un traité d'aſtronomie, cependant comme on ne les trouve point expreſſément dans les livres, j'ai cru qu'il étoit utile d'en donner ici les démonſtrations pour ne rien ſuppoſer qu'un lecteur attentif ne puiſſe trouver, avec les élémens ordinaires de la géométrie & du calcul.

DE LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE.

3645. NOUS ſommes obligés en donnant un traité complet d'aſtronomie d'y comprendre la trigonométrie ſphérique, mais nous l'abrégerons, en paſſant ſous ſilence tout ce qui n'intéreſſe pas ſpécialement l'aſtronomie : nous ſupprimerons le détail de pluſieurs propriétés des triangles ſphériques, dont les livres ordinaires ſont remplis ; ces détails ſervent à exercer ceux qui commencent, & à

leur rendre la trigonométrie plus familière ; mais comme un calculateur ne ſauroit ſe paſſer des tables de logarithmes & de ſinus, auxquelles on joint preſque toujours un traité de trigonométrie, on y aura recours ſi les notions ſuivantes paroiſſent ne pas ſuffire.

Définition. 3646. UNE FIGURE PLANE eſt celle dont la ſurface peut être traverſée en tout ſens par une ligne droite. Je ne ſaurois trouver une définition plus exacte du mot de *plan* ou de figure plane (1119).

Prolongement des plans. 3647. Le plan d'un cercle ou d'une figure plane quelconque, eſt proprement la ſurface de cette figure ; dans l'aſtronomie on conçoit tous les plans prolongés infiniment dans l'immenſité du ciel ; alors le *plan* d'un cercle eſt formé par l'aſſemblage de tous les diamètres de ce cercle prolongés ſans bornes au delà de ſa circonférence ; le plan eſt une ſurface infinie qui eſt le prolongement de la ſurface propre du cercle, & dont celle-ci fait partie.

Fig. 315. 3648. Suppoſons que *DBA* (*fig.* 315), ſoit l'étendue de l'équateur terreſtre, bornée par la grandeur de la terre *DHAPF*, ſon plan doit ſe concevoir ſans bornes : une étoile *O* à une diſtance quelconque de la terre ſera toujours dans le plan de l'équateur de la terre pourvu qu'il y ait un des diamètres de l'équateur qui aille paſſer par l'étoile, & l'on dira que cette étoile eſt dans l'équateur. Si cette étoile *O* au lieu d'être dans la ſurface, dans le plan même de notre figure, ſe conçoit relevée d'un demi-pouce au-deſſus de la figure, alors le diamètre *DA* ne pourra point paſſer par l'étoile, & l'étoile ne ſera plus dans le plan de l'équateur.

3649. Lorſqu'on dit en aſtronomie qu'un aſtre eſt dans l'équateur, dans l'écliptique, dans l'horizon, il faut toujours entendre les plans de tous ces cercles ; ainſi quand le ſoleil & la lune ſe lèvent enſemble, ils ſont tous deux dans l'horizon, parce que le même plan qui borne notre vue, s'étend juſqu'à eux, quoique le ſoleil ſoit 380 fois plus loin de nous que la lune.

3650. Il faut cependant excepter de cette règle les parallèles ou petits cercles de la ſphère dont les plans

ne peuvent ainſi ſe prolonger, dans l'aſtronomie, & occaſionneroient des idées fauſſes ſi l'on vouloit s'en ſervir : ce ſont des cônes qui ont leur ſommet au centre de la ſphère (3653).

3651. Parmi les premières définitions du onzième livre d'Euclide, on trouve celle-ci : l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre plan, eſt l'angle aigu que renferment les deux lignes tirées ſur les deux plans, & perpendiculaires à leur commune ſection. Puiſque cette vérité a paru aſſez claire aux anciens géomètres pour n'avoir pas même beſoin d'explication, je pourrois me diſpenſer d'en parler plus au long; cependant comme c'eſt une vérité eſſentielle, un principe fondamental auquel nous renverrons ſouvent, il eſt néceſſaire de le bien concevoir, & il me paroît qu'on peut le démontrer d'une manière plus ſatisfaiſante. Préſentons une feuille de papier ſur une autre, dans une ſituation inclinée; la commune ſection de ces deux plans eſt la ligne ſur laquelle une des feuilles rencontre & touche l'autre; pour juger de l'angle d'inclinaiſon l'on verra bien qu'il faut former un angle dont les deux lignes ſoient l'une dans un plan & l'autre dans l'autre plan, mais toutes deux perpendiculaires à la commune ſection; car ſi l'on tiroit ces lignes obliquement l'on formeroit des angles plus petits, ſans aucune règle, qui n'auroient aucun rapport déterminé avec l'angle des deux plans, & qui n'auroient point une marche uniforme, ou égale à celle des deux plans. Enfin ſi l'on imagine les deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, enſorte qu'ils faſſent un angle droit, les lignes qui doivent meſurer leur angle doivent être perpendiculaires entre elles, ce qui n'arriveroit pas ſi elles n'étoient perpendiculaires à la commune ſection des deux plans; donc pour meſurer l'angle de deux plans il faut tirer dans chaque plan une ligne perpendiculaire à la commune ſection; ces lignes feront dans leur point de rencontre avec cette commune ſection, un angle égal à l'inclinaiſon des deux plans (1121).

Meſure des angles que forment des plans.

3652. La trigonométrie ſphérique conſiſte à réſoudre les triangles formés ſur la ſurface d'un globe par trois

On ne conſidère que les grands cercles,

arcs de grands cercles; elle ſe réduit preſque toute à trois théorêmes que nous démontrerons de la manière la plus ſimple, après que nous aurons donné quelques notions des propriétés générales des triangles ſphériques.

3653. On ne conſidère dans la trigonométrie que les arcs de grands cercles, comme nous l'avons dit (30), parce que la plus courte diſtance d'un point à un autre ſur la ſurface d'une ſphère eſt un arc de grand cercle, au lieu qu'on pourroit par deux points donnés tirer une infinité d'arcs de petits cercles, de toutes les grandeurs, & d'un nombre quelconque de degrés, ſans qu'il y eût jamais aucune règle pour connoître la longueur des côtés & la grandeur des angles, ſi l'on ne s'étoit pas borné à ne conſidérer que les grands cercles.

Poles d'un cercle.

3654. Nous avons expliqué au commencement de cet ouvrage, ce que c'eſt que l'axe d'un grand cercle (17 & 18); nous avons dit que les poles ſont les extrémités de l'axe; ainſi les poles ſont également éloignés de tous les points de la circonférence de leur cercle, & lorſqu'on a pris un point comme pole, on peut avec un compas ordinaire décrire le cercle dont il eſt le pole, pourvu qu'on prenne une ouverture de compas qui ſoit de 90°, ou d'un quart de la circonférence du globe, ſur lequel on veut décrire le cercle.

Les grands cercles ſe coupent en deux parties égales.

3655. Deux grands cercles quelconques décrits ſur la ſurface d'une ſphère ſe coupent néceſſairement en deux parties égales (30).

3656. Si deux grands cercles ſe coupent à angles droits, chacun des deux cercles paſſe par les poles de l'autre; car les poles ſont ſur un axe perpendiculaire au plan de leur cercle, donc ils ſont dans un plan perpendiculaire au plan du cercle, & qui paſſe par ſon centre, donc ils ſont ſur le cercle qui lui eſt perpendiculaire. Il en eſt de même de deux ou de pluſieurs arcs qui ſeroient perpendiculaires à un autre arc, car ils iroient tous concourir au pole de celui-ci, ou à 90° de diſtance de cet arc. Réciproquement un arc qui coupe deux ou pluſieurs autres arcs, à 90° de diſtance de leur interſection, les coupe tous perpendiculairement

perpendiculairement, puiſque tous ces cercles paſſent par ſes poles. Ces propriétés des triangles ſphériques ſont importantes.

3657. Soit *BCF* (*fig.* 322), le diamètre d'un globe ou d'une ſphère, ſur la circonférence de laquelle on ait décrit deux grands cercles *BLF*, *BMF*, qui ſe coupent en deux parties égales en *B* & en *F*; ſi l'on décrit un autre arc *LM*, à 90° des points *B* & *F*, cet arc aura pour poles les points *B* & *F*, il ſera la meſure de la diſtance des points *L* & *M*, il ſera égal à l'angle que formeroient au centre *C* de la ſphère les rayons menés aux points *L* & *M*; il ſera donc égal à l'angle que forment les plans des deux cercles *BAFCB*, *BLFCB*, ou égal à l'angle que formeroient au point *B* deux tangentes aux cercles *BM* & *BL*, c'eſt-à-dire, à l'angle ſphérique *LBM*; donc pour avoir la meſure d'un angle ſphérique *LBM*, il faut décrire un cercle à 90° de diſtance du ſommet *B* de l'angle donné; l'arc *LM* compris entre les côtés de l'angle, en ſera la meſure, en même temps qu'il aura pour pole le ſommet *B* du même angle.

Meſure des angles ſphériques.

Fig. 322.

3658. DANS *tout triangle ſphérique rectangle, les angles ſont de même eſpèce que les côtés oppoſés*, c'eſt-à-dire, qu'un angle aigu eſt toujours oppoſé à un côté aigu, & un angle obtus à un côté obtus. Soit le triangle *FKI* rectangle en *K*, dont le côté *FK* & l'hypothénuſe *FI* ſoient prolongés juſqu'au point *B* oppoſé au point *F*; les arcs *FKB*, *FIB* ſeront de 180° chacun; ſi *FK* eſt aigu, *KB* ſera obtus; ainſi l'angle *FIK* aigu eſt oppoſé au côté aigu *FK* dans le triangle *FKI*, & l'angle obtus *BIK* eſt oppoſé au côté obtus *BK* dans le triangle *BIK* auſſi rectangle en *K*; ainſi l'on voit aſſez ſans autre démonſtration que ſi le côté *FK* qui eſt donné, dans un triangle ſphérique rectangle, ſurpaſſe 90°, l'angle oppoſé ſurpaſſera auſſi 90°, & *viciſſim*. M. de la Caille en donne une démonſtration plus longue & plus rigoureuſe, art. 147 & 148.

3659. SI LES CÔTÉS d'un triangle ſphérique rectangle ſont de même eſpèce, c'eſt-à-dire, tous deux aigus ou tous deux obtus, l'hypothènuſe ſera toujours aigue,

Fig. 322. & s'ils sont de différente espèce, l'hypothènuse sera toujours plus grande que 90°.

Démonstration. Dans le triangle spérique *FIK* rectangle en *K*, dont les côtés *FK* & *KI* sont aigus; il est clair que l'hypothénuse *FI* est aussi aiguë; car ayant pris *FM* de 90° on aura *FL* aussi de 90°, parce que l'arc *LM* aura pour pole le point *F*, donc *FI* est plus petite que 90°. Supposons que dans le triangle *BIK* les côtés *BK* & *BI* soient obtus, & que l'angle *B* devienne un angle droit, alors l'hypothénuse *KI* sera aiguë, car si *BK* & *BI* surpassent 90°, leurs supplémens *FK* & *FI* seront moindres que 90°, donc dans le triangle *FIK* également rectangle en *F*, on aura l'hypothénuse *IK* plus petite que 90° suivant la première partie de notre démonstration: or l'hypothénuse *KI* est commune aux deux triangles; donc le triangle *BKI* rectangle en *B* & dont les côtes sont tous deux obtus, a aussi son hypothénuse aiguë.

3660. Si les côtés sont de différente espèce, comme dans le triangle *BIK* supposé rectangle en *K*, où *BK* est plus grand que 90°, & *KI* plus petit, l'hypothènuse *BI* est nécessairement plus grande que 90°, puisqu'alors son supplément *IF* est aigu, comme nous l'avons démontré.

3661. En considérant de même les triangles *FKI*, *BKI* rectangles en *K*, on voit aisément, au moyen de ce qui précède, les six vérités suivantes. 1°. Si les deux angles obliques sont de même espèce, l'hypothénuse est moindre que 90°, comme dans le triangle *FKI* où les deux angles sont aigus. 2°. Si les deux angles obliques sont d'espèce différente, comme dans le triangle *BKI*, l'hypothénuse *BI* est plus grande que 90°, car les deux côtés seront aussi de différente espèce. 3°. Si l'hypothénuse est aiguë les angles & les côtés sont de même espèce. 4°. Si l'hypothénuse est plus grande que 90°, les angles & les côtés sont d'espèce différente, comme dans le triangle *BIK*, dont l'angle *I* est obtus, aussi bien que le côté *BK* & l'hypothénuse *BI*, tandis que l'angle *B* & le côté *IK* sont aigus. 5°. Si l'hypothénuse & l'un des côtés sont de même espèce, l'autre côté avec son angle opposé sont nécef-

ſairement aigus, comme dans le triangle *BIK*. 6°. L'hypothénuſe & l'un des côtés étant d'eſpèces différentes, l'autre côté avec ſon angle oppoſé feront toujours plus grands que 90°; ainſi dans le triangle *BIK* l'hypothénuſe *BI* étant obtuſe, & le côté *IK* aigu, il faut que l'autre côté *BK* ſoit obtus, auſſi bien que ſon angle oppoſé *BIK*.

3662. La même figure ſuffit pour reconnoître dans les triangles ſphériques rectangles tous les cas douteux, c'eſt-à-dire, ceux où l'on ne peut trouver un côté & un angle à moins qu'on ne ſache auparavant s'ils ſont aigus ou obtus; les triangles *IKI*, *FKI* tous deux rectangles en *K* ont le côté *IK* commun; l'angle *F* de l'un eſt égal à l'angle *B* de l'autre; mais quoique ces deux quantités ſoient les mêmes de part & d'autre, toutes les autres diffèrent, car l'hypothénuſe *FI* eſt aiguë, l'hypothénuſe *BI* eſt obtuſe; le côté *FK* eſt aigu, le côté *BK* eſt obtus; l'angle *FIK* eſt aigu, l'angle *BIK* eſt obtus; ainſi *étant donnés un angle & ſon côté oppoſé, on ne ſauroit trouver les trois autres parties d'un triangle ſphérique rectangle, ſans ſavoir ſi elles ſont au-deſſus ou au-deſſous de 90°*; c'eſt à quoi ſe réduiſent tous les cas douteux dans les triangles rectangles (3685 & ſuiv.). Au reſte on ſait preſque toujours en aſtronomie, par l'état de la queſtion qu'on ſe propoſe de réſoudre, ſi les quantités qu'on cherche ſont plus petites que 90°; par exemple, ſi l'on cherche le lieu du ſoleil par le moyen de ſa déclinaiſon obſervée, & de l'obliquité de l'écliptique, on ſait bien ſi le ſoleil étoit dans le premier ou dans le dernier quart de l'écliptique. Il y a auſſi des cas douteux dans les triangles obliques (3698, 3703), mais ils ſont analogues à ceux que je viens d'expliquer. Cas douteux.

3663. On peut transformer un triangle ſphérique en un autre, tel que les angles de celui-ci ſoient les ſupplémens des côtés du premier, & réciproquement. Soit le triangle *ABC* (*fig.* 326), dont les côtés ſoient prolongés de manière que *ACG*=90°=*ABH*, =*BAI*, =*BCL*, =*CAN*=*CBM*; par les extrémités de ces ſix quarts de cercles, on tirera des arcs *FE*, *ED*, *DF* qui formeront un triangle *DFE*, appellé *triangle polaire*; le point *A* eſt Triangle polaire. *Fig.* 326.

le pole de l'arc *FGHE*, puisque *AG* & *AH* sont l'un & l'autre de 90°; de même le point *B* est le pole de l'arc *DILF*, & le point *C* est le pole de l'arc *DNME*; de-là il suit que le point *F* est le pole du côté *AB*, car le point *A* est éloigné de 90° des points *F*, *G*, *H*, & le point *B* est éloigné de 90° des points *F*, *L*, *I*; donc les points *A* & *B* sont éloignés de 90° du point *F*, donc le point *F* est le pole de l'arc *IAFH* (3656); l'arc *FH* est donc de 90°. On démontreroit de même que le point *E* est le pole de *GCAN*, d'où il suit que *EG* est de 90°, donc $EG + FH = 180° = EG + FG + GH = EF + GH$; or *GH* est la mesure de l'angle *A* (3656), donc l'angle *A* ajouté avec le côté *EF* est égal à 180°, donc l'angle *A* du triangle donné est le supplément du côté *EF* du triangle polaire; on trouvera de même que l'angle *B* est le supplément de *DF*, & l'angle *C* supplément de *DE*. Par la même raison l'angle *E* du triangle polaire, mesuré par l'arc *GCAN* est le supplément du côté *CA*, car $AG = 90° = CN$, dont $GN = 180° - CA$. Ainsi le triangle polaire *DEF* est tel que ses côtés sont les supplémens des angles, & ses angles les supplémens des côtés donnés.

Origine de la Trigonométrie sphérique.

3664. Aussi-tôt que les premiers astronomes eurent imaginé deux ou trois cercles dans le ciel, l'horizon, le méridien, l'équateur & l'écliptique (art. 11, 15, 19, 64); ils dûrent chercher un moyen de mesurer l'écartement de ces cercles, à diverses distances des points de réunion; & delà naquit la trigonométrie sphérique. Soient deux arcs *BE* & *BF* (*fig.* 323), de l'écliptique & de l'équateur, chacun de 90°, & dont la plus grande distance *EF* parut être de 24°, les anciens astronomes se demandèrent d'abord de combien devoit être la distance *GH* de ces deux cercles, à moitié chemin, ou à 45° de leur intersection *B*, ce fut là le premier problême de trigonométrie sphérique; c'est même encore le problême fondamental, & le premier dont je vais donner la solution, par une méthode plus simple qu'on ne le fait dans les livres ordinaires.

Fig. 323.

Ier théorême fondamental.

3665. *Dans tout triangle sphérique* BAD

(fig. 321), *rectangle en* A *le rayon est au sinus de l'hypothénuse* BD, *comme le sinus d'un des angles* B, *est au sinus de son côté opposé* AD. Fig. 321.

Démonstration. Soit C le centre de la sphère; sur la surface de laquelle sont tracés les arcs BA, AD, & DB; soit CB la commune section des deux plans CBD & CBA; du point D on concevra une ligne DF abaissée perpendiculairement sur le plan BCA du côté BA, cette perpendiculaire tombera en un point F, & du point F on tirera une ligne FE perpendiculaire sur la commune section CB; du point D on tirera au point E une troisième ligne DE. Le plan du triangle DFE est perpendiculaire à la commune section CB, puisqu'une de ses lignes FE est perpendiculaire à CB, & que le triangle lui-même est perpendiculaire au plan CAB, à cause de la ligne DF abaissée perpendiculairement sur ce plan CAB; ainsi la ligne DE est aussi perpendiculaire à CB, donc l'angle DEF est égal à l'angle des deux plans CBA & CBD, par conséquent égal à l'angle sphérique DBA (3651, 3657). Dans le triangle DFE rectiligne rectangle en F, on a par les principes de la trigonométrie rectiligne la proportion suivante: le sinus total est à ED comme le sinus de l'angle E est à DF; mais ED est le sinus de l'arc BD, puisque c'est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité D de l'arc, sur le rayon CB qui passe par l'autre extrémité, & DF est le sinus de l'arc DA par la même raison; enfin l'angle DEF est égal à l'angle sphérique B, donc la proportion se réduit à celle-ci R : sin. BD : : sin. B : sin. DA, c'est-à-dire, *que le sinus total est au sinus de l'hypothénuse* BD, *comme le sinus de l'angle* B *est au sinus du côté opposé* AD. C. Q. F. D. Cette analogie a servi dans les articles 900, 906, 914, &c.

3666. Delà il suit que la distance DA de deux cercles BA & BD en différens points, mesurée perpendiculairement à l'un des cercles comme BA, est proportionnelle au sinus de la distance BD au point d'intersection, mesurée sur l'autre cercle; ainsi que nous l'avons supposé (2925).

Cela revient encore au théorême de l'article 892, dont nous avons fait usage tant de fois.

Second théorême fondamental.

3667. *Dans tout triangle sphérique rectangle le rayon est au sinus d'un côté comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à la tangente du côté opposé.* C'est ici le second théorême fondamental de la trigonométrie sphérique.

Fig. 322.

Démonstration. Soit le triangle sphérique *BAD* (*fig.* 322) rectangle en *A*, du point *A* l'on abaissera la perpendiculaire *AE* sur la commune section *CEB* des deux plans *CBA* & *CBD* : on concevra aussi une ligne *AG* élevée du point *A* perpendiculairement sur les lignes *AE* & *AC*, jusqu'à la rencontre du rayon *CDG*, qui passe par l'autre extrémité *D* du côté *AD*; alors *AG* sera la tangente de l'arc *AD*, qui est l'un des côtés du triangle. Il faut concevoir cette ligne *AG* redressée perpendiculairement sur le plan de la figure; du sommet *G* de cette tangente on tirera une ligne au point *E*; cette ligne *GE* sera aussi perpendiculaire à la commune section *CB*, puisque le triangle *GAE* lui est perpendiculaire. Le point *G* étant sur le rayon *CD* prolongé, est aussi dans le plan du cercle *CBD*; ainsi la ligne *GE* est dans le même plan *CBDG*, l'angle *GEA* est donc formé par deux lignes qui sont perpendiculaires à la commune section des plans *CBA*, *CBD*, & qui sont chacune dans un de ces plans; donc cet angle *GEA* est égal à l'angle des deux plans (3651), ou à l'angle sphérique *B*. Dans le triangle rectiligne *AEG* rectangle en *A*, si l'on prend *EA* pour rayon le côté *AG* devient la tangente de l'angle *AEG* ou de l'angle sphérique *B*; donc on a cette proportion *AE* : *AG* : : *R* : tang. *AEG*, ou *R* : *AE* : : tang. *AEG* : *AG*, c'est-à-dire, que le rayon est au sinus du côté *AB* comme la tangente de l'angle *B* est à la tangente du côté opposé *AD*. On s'est servi de cette proposition dans les articles 898, 900, 914, &c. Le troisième théorême fondamental sera démontré plus bas (3743); il ne sert que dans un seul cas (3706).

3668. Par le moyen des deux théorêmes (3665, 3667),

on démontre facilement quatre autres analogies nécessaires pour la résolution des triangles sphériques rectangles. Soit le triangle *BCD fig.* 323 rectan. en *D* dont l'hypoth. & les côtés soient prolongés jusqu'à la valeur de 90°, en sorte que *BE*, *BF*, & *DA* soient des quart-de-cercles; par les points *A* & *F* l'on tirera l'arc *AEF*; alors on aura le triangle *ACE* rectangle en *E*, dans lequel *AC* est le complément de *CD*, *CE* le complément de *BC*, *AE* le complément de *EF* ou de l'angle *B*; enfin l'angle *A*, qui a pour mesure *DF* est le complément de *BD*. Ce triangle *AEC* sert à démontrer les quatre autres propriétés du triangle donné *BCD*. Fig. 323.

Le nouveau triangle *AEC* rectangle en *E* donne cette proportion (3667) *R* : sin. *AE* :: tang. *A* : tang. *CE*, c'est-à-dire, *R* : cos. *B* :: cot. *BD* : cot. *BC*, donc dans le triangle primitif *BCD*, *le rayon est au cosinus d'un angle, comme la cotangente du côté adjacent est à la cotangente de l'hypothènuse*, ou comme la tangente de l'hypothénuse est à la tangente du côté adjacent. On en fait usage dans les articles 898, 900, 908, 914, 2706 & 3560.

3669. Le triangle *AEC* donne cette proportion (3665) *R* : sin. *AC* :: sin. *C* : sin. *AE*; donc *R* : cos. *CD* :: sin. *C* : cos. *B*; donc *le rayon est au cosinus d'un côté, comme le sinus de l'angle adjacent à ce côté est au cosinus de l'autre angle.* On s'en est servi dans les articles 898, 1661, 2837, 2841, 2845, 3064.

3670. Dans le triangle *AEC* l'on a par la même raison (3665) *R* : sin. *AC* :: sin. *A* : sin. *CE*, donc *R* : cos. *CD* :: cos. *BD* : cos. *BC*, c'est-à-dire, que *le rayon est au cosinus d'un côté comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypothènuse.* On l'a employée dans les art. 900, &c.

3671. Dans le triangle *AEC* l'on a encore cette proportion (3667) *R* : sin. *CE* :: tang. *C* : tang. *AE*; ou *R* : cos. *BC* :: tang. *C* : cot. *B*; donc *le rayon est au cosinus de l'hypothénuse comme la tangente d'un des angles est à la cotangente de l'autre angle.* Cette analogie est en usage dans les articles 908. &c.

Ces quatre proportions réunies à celles des deux pre-

miers théorêmes (3665, 3667) suffisent pour les seize cas qui peuvent se présenter dans la solution des triangles sphériques rectangles, & que je vais détailler, de la manière qui est la plus commode pour l'usage : on en trouvera un exemple à l'article des logarithmes (3911).

Table des Analogies qui satisfont aux seize cas des triangles sphériques rectangles.

3672. CONNOISSANT les deux côtés, trouver l'hypothénuse. Le rayon est au cosinus d'un côté, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypothénuse (3670).

3673. Connoissant les deux côtés, trouver les angles. Le rayon est au sinus du côté adjacent à l'angle cherché, comme la cotangente de l'autre côté est à la cotangente de l'angle cherché (3667).

3674. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'hypothénuse. Le rayon est au cosinus de l'angle, comme la cotangente du côté est à la cotangente de pothénuse (3668).

3675. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'autre côté. Le rayon est au sinus du côté comme la tangente de l'angle adjacent est à la tangente du côté opposé à cet angle (3667).

3676. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'autre angle. Le rayon est au cosinus du côté connu, comme le sinus de l'angle adjacent est au cosinus de l'angle opposé à ce côté (3669).

3677. Connoissant l'hypothénuse & un côté, trouver l'angle opposé à ce côté. Le sinus de l'hypothénuse est au rayon, comme le sinus du côté connu est au sinus de l'angle opposé (3665).

3678. Connoissant l'hypothénuse & un côté, trouver l'angle adjacent à ce côté. Le rayon est à la cotangente de l'hypothénuse comme la tangente du côté est au cosinus de l'angle adjacent (3668).

3679. Connoiſſant l'hypothénuſe & un côté, trouver l'autre côté. Le coſinus du côté connu eſt au rayon, comme le coſinus de l'hypothénuſe eſt au coſinus de l'autre côté (3670).

3680. Connoiſſant l'hypothénuſe & un angle, trouver l'autre angle. Le rayon eſt au coſinus de l'hypothénuſe comme la tangente de l'angle connu, eſt à la cotangente de l'autre angle (3671).

3681. Connoiſſant l'hypothénuſe & un angle, trouver le côté oppoſé à cet angle. Le rayon eſt au ſinus de l'hypothénuſe comme le ſinus de l'angle eſt au ſinus du côté oppoſé à cet angle (3665).

3682. Connoiſſant l'hypothénuſe & un angle, trouver le côté adjacent à cet angle. Le rayon eſt au coſinus de l'angle, comme la tang. de l'hypothénuſe eſt à la tang. du côté adjacent à l'angle donné (3668).

3683. Connoiſſant les deux angles, trouver l'hypothénuſe. Le rayon eſt à la cotang. d'un des angles, comme la cotang. de l'autre eſt au coſ. de l'hypothénuſe (3671).

3684. Connoiſſant les deux angles, trouver les côtés. Le ſinus de l'angle adjacent au côté cherché eſt au rayon, comme le coſ. de l'autre angle eſt au coſ. du côté cherché (3669).

3685. Connoiſſant un côté & ſon angle oppoſé, trouver l'hypothénuſe. Le ſinus de l'angle connu eſt au rayon, comme le ſinus du côté connu eſt au ſinus de l'hypothénuſe (3665). Il faut ſavoir d'ailleurs ſi elle eſt plus ou moins grande que 90° (3662). Trois cas douteux.

3686. Connoiſſant un côté & ſon angle oppoſé, trouver l'autre côté. Le rayon eſt à la tangente du côté donné, comme la cotangente de l'angle connu eſt au ſinus du côté cherché (3667); mais il faut ſavoir d'ailleurs s'il eſt aigu ou obtus (3662).

3687. Connoiſſant un côté & ſon angle oppoſé, trouver l'autre angle. Le coſ. du côté connu eſt au rayon, comme le coſin. de l'angle connu eſt au ſinus de l'autre angle (3669); mais il faut ſavoir d'ailleurs ſi cet angle eſt aigu ou obtus (3662).

DES TRIANGLES SPHERIQUES OBLIQUANGLES.

3688. Les six propriétés des triangles sphériques rectangles démontrées jusqu'ici, sont suffisantes pour démontrer six propriétés des triangles sphériques en général, c'est-à-dire, des triangles obliques, & pour résoudre les douze problêmes qui peuvent se présenter dans un triangle. Parmi les douze cas de la trigonométrie sphérique, il y en a dont je ne connois aucune application dans l'astronomie ; tel est le cas des trois angles donnés (*3707*). Je ne laisserai pas de les expliquer tous succinctement, mais je ferai remarquer ceux dont l'usage est le plus fréquent.

3689. C'est souvent en divisant un triangle rectangle par le moyen d'une perpendiculaire qu'on parvient à le résoudre. Il n'y a que quatre cas où la perpendiculaire soit inutile (*3698*, *3703*, *3706*, *3707*) ; mais il y en a huit où il faut l'employer.

Première propriété générale. *Fig.* 324.

3690. *Dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont comme les comme les sinus des côtés opposés.* Soit le triangle *MON* (*fig.* 324) divisé en deux triangles rectangles par un arc perpendiculaire *OP*, l'on aura (art. *3665*).

R : sin. OM : : sin. M : sin. OP } ; donc sin. OM : sin.
R : sin. ON : : sin. N : sin. OP } ON : : sin. M : sin. N,

& si l'on abaissoit la perpendiculaire de chacun des autres angles, on démontreroit la même chose pour tous les côtés comparés deux à deux avec les angles. On s'est servi de cette proportion dans les art. *914*, &c.

3691. L'arc perpendiculaire *OP* tiré du sommet d'un angle *O* sur le côté opposé *MN*, forme deux segmens *MP*, *PN* sur ce côté *MN*, & l'angle duquel on abaisse la perpendiculaire, se trouve divisé en deux parties *MOP*, *PON*, que nous appellerons les *angles verticaux*. Si la perpendiculaire *OP* tombe au-dehors du triangle, comme dans la *fig.* 325, la somme des deux angles verticaux ne sera pas égale à l'angle donné *MON*, mais ce sera leur différence ; les angles formés par la perpendiculaire *OP*

Fig. 325.

avec les deux côtés *OM* & *ON* feront également compris fous le nom d'angles verticaux, & les démonftrations fuivantes s'y appliqueront également. On appelle *angles à la bafe* les angles *M* & *N* adjacens au côté fur lequel tombe la perpendiculaire *OP*, foit que ce côté foit prolongé, ou non.

3692. Dans les triangles rectangles *MOP*, *PON* (*fig.* 324 & 325), on a les proportions fuivantes (3670) *R* : cof. *OP* :: cof. *PM* : cof. *OM*; *R* : cof. *OP* :: cof. *PN* : cof. *ON*, donc cof. *PN* : cof. *PM* :: cof. *ON* : cof. *OM*; c'eft-à-dire, que *les cofinus des fegmens font comme les cofinus des côtés.* Seconde propriété générale. *Fig.* 324, 325.

3693. Dans les triangles *MOP*, *PON*, on a les proportions fuivantes (3667) *R* : fin. *PM* :: tang. *M* : tang. *OP*; ou *R* : cot. *OP* :: fin. *PM* : cot. *M*; & *R* : cot. *OP* :: fin. *PN* : cot. *N*; donc fin. *PN* : fin. *PM* :: cot. *N* : cot. *M*, c'eft-à-dire, que *les finus des fegmens font comme les cotangentes des angles à la bafe*, ou en raifon inverfe des tangentes. Troifième.

3694. Par les mêmes triangles on a auffi (3669). Quatrième.

R : cof. *OP* :: fin. *POM* : cof. *M* } ; donc fin. *POM* : fin.
R : cof. *OP* :: fin. *PON* : cof. *N* } *PON* :: cof. *M* : cof. *N*.

Donc les finus des angles verticaux font comme les cofinus des angles à la bafe.

3695. Enfin l'on a ces deux proportions (3668), Cinquième.

R : cof. *POM* :: cotang. *OP* : cot. *OM*
R : cof. *PON* :: cotang. *OP* : cot. *ON*

donc cof. *POM* : cof. *PON* :: cot. *OM* : cot. *ON*; donc *les cofinus des angles verticaux font comme les cotangentes des côtés.*

3696. Connoissant *deux côtés & l'angle compris, trouver le troifième côté.* L'on abaiffera la perpendiculaire de l'extrémité du plus petit côté donné, fur l'autre côté donné, en le prolongeant, fi cela eft néceffaire; & l'on fera cette proportion (3668). Solution des douze cas des triangl. obliques.

Le rayon
Eft au cofinus de l'angle donné,
Comme la tangente du plus petit côté

Est à la tangente du premier segm nt.

Ce premier segment étant ôté du grand côté, ou ajouté si l'angle donné est obtus, on aura le second segment, & l'on fera cette autre proportion (3692).

Le cosinus du premier segment
Est au cosinus du second segment
Comme le cosinus du petit côté donné,
Est au cosinus du côté cherché.

Il sera obtus, si le segment adjacent est obtus, pourvu que la perpendiculaire ne le soit pas, ou si la perpendiculaire & le segment adjacent au côté cherché sont de différente espèce (3661), & l'on est sûr que la perpendiculaire n'est pas obtuse, si le côté de l'extrémité duquel on a abaissé la perpendiculaire est aigu. On trouve des usages de ce problême dans les articles 1034, &c. C'est un des plus utiles dans l'astronomie, parce qu'il sert à trouver la hauteur d'un astre pour un moment quelconque; la distance de la lune aux étoiles (3978), celle d'un lieu à un autre, le mouvement d'une comète sur son orbite (3057), &c. Ces analogies qui renferment des cosinus, sont sujettes à quelque défaut de précision, quand par un cosinus fort petit, on en cherche un qui est très-grand; voici donc une formule qui ne renferme que des sinus, & que nous appliquerons au triangle *PZS* (*fig.* 35), pour trouver la distance au zénit, (*Murdoch*, *philos. trans.* 1758, *pag.* 540): $\text{sin.} \frac{1}{2} ZS^2 = \text{sin.} PZ \ \text{sin.} PS \ \text{sin.} \frac{1}{2} P^2 + \text{sin.} \frac{1}{2} (PZ - PS)^2$, on en verra un exemple à l'art. 3979.

3697. Connoissant *deux côtés & l'angle compris; trouver l'un des deux autres angles opposés aux côtés donnés.* Abaissez la perpendiculaire sur le côté adjacent à l'angle cherché; & calculez le premier segment par cette proportion (3668).

Le rayon
Est au cosinus de l'angle donné,
Comme la tangente du côté opposé à l'angle cherché
Est à la tangente du premier segment.

Prenez la *somme* ou la *différence* de ce premier segment, & du côté adjacent à l'angle cherché, sur lequel on a abaissé

la perpendiculaire. Il faudra prendre la *ſomme* ſi l'angle donné eſt obtus ; la *différence*, ſi l'angle donné eſt aigu ; on aura ainſi le ſecond ſegment, & l'on fera cette proportion (3693).

Le ſinus du ſecond ſegment
Eſt au ſinus du premier ſegment,
Comme la tangente de l'angle donné
Eſt à la tangente de l'angle cherché.

Si l'un des ſegmens eſt plus grand que le côté dont il faut le ſouſtraire, c'eſt-à-dire, ſur lequel tombe la perpendiculaire, alors l'angle cherché ne ſera pas de même eſpèce que l'angle donné. On trouvera des applications de ce problême dans les articles 1036, &c. pour trouver l'angle parallactique dans le calcul des éclipſes.

3698. CONNOISSANT *deux côtés & l'angle oppoſé à l'un d'eux, trouver l'angle oppoſé à l'autre côté.* On fera cette proportion (3690).

Le ſinus du côté oppoſé à l'angle connu
Eſt au ſinus du côté adjacent à l'angle connu,
Comme le ſinus de l'angle connu
Eſt au ſinus de l'angle cherché.

Cet angle peut être aigu ou obtus ; & il n'eſt pas déterminé par les données ſeules (3662).

3699. CONNOISSANT *deux côtés & l'angle oppoſé à l'un d'eux, trouver le troiſième côté.* Abaiſſez la perpendiculaire ſur le côté cherché, & faites ces deux proportions (3668, 3692).

1° *Le rayon*
Eſt au coſinus de l'angle donné
Comme la tangente du côté adjacent à cet angle
Eſt à la tangente du premier ſegment.

2° *Le coſinus du côté adjacent à l'angle donné*
Eſt au coſinus du côté oppoſé à l'angle donné,
Comme le coſinus du premier ſegment
Eſt au coſinus du ſecond ſegment.

Si les deux côtés donnés ſont de même eſpèce, on ajoutera les deux ſegmens pour avoir le côté cherché. S'ils

ſont d'eſpèce différente, on retranchera le plus petit ſegment du plus grand, parce que dans ce cas, la perpendiculaire tombe au dehors du triangle.

3700. *Connoissant deux côtés & l'angle oppoſé à l'un deux, trouver l'angle compris par les côtés donnés.* Abaiſſez la perpendiculaire de l'angle cherché, & faites ces deux proportions (3671, 3695).

1° *Le rayon*
Eſt au coſinus du côté adjacent à l'angle donné,
Comme la tangente de l'angle donné
Eſt à la cotangente du premier des angles verticaux.

2° *La cotangente du côté adjacent à l'angle donné*
Eſt à la cotangente du côté oppoſé à l'angle donné,
Comme le coſinus du premier des angles verticaux.
Eſt au coſinus du ſecond angle vertical.

On ajoutera les deux angles verticaux, ſi les deux côtés donnés ſont de même eſpèce; on prendra leur différence, ſi les côtés donnés ſont l'un aigu & l'autre obtus, & l'on aura l'angle cherché. Ces analogies ont ſervi pour trouver l'heure par le moyen des étoiles (1049).

3701. *Connoissant deux angles & le côté compris, trouver un des autres côtés.* Abaiſſez la perpendiculaire d'un des angles donnés adjacens au côté cherché, & faites cette proportion (3671).

Le rayon
Eſt au coſinus du côté connu,
Comme la tangente de l'angle oppoſé au côté cherché
Eſt à la cotangente du premier angle vertical.

Si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle, du côté de l'angle donné, il faut prendre la ſomme de ce premier angle vertical & de l'angle adjacent au côté cherché; ſinon leur différence; & l'on aura le ſecond angle vertical, formé par la perpendic. & le côté cherché, & l'on dira (3695).

Le coſinus du premier angle vertical
Eſt au coſinus du ſecond angle vertical,
Comme la cotangente du côté donné
Eſt à la cotangente du côté cherché.

Si le ſecond angle vertical eſt de même eſpèce que l'angle oppoſé au côté cherché, celui-ci ſera aigu ; ſinon obtus.

3702. *Connoissant deux angles & le côté compris, connoître le troiſième angle.* On abaiſſera la perpendiculaire d'un des angles connus ſur le côté oppoſé que nous appellerons la baſe, & l'on fera cette analogie (3671).

Le rayon
Eſt au coſinus du côté connu ;
Comme la tangente de l'angle ſur la baſe
Eſt à la cotangente du premier angle vertical.

On ajoutera ce premier angle vertical avec l'angle connu d'où eſt abaiſſée la perpendiculaire, ſi elle tombe hors du triangle, c'eſt-à-dire, ſi le premier angle vertical eſt plus grand que l'angle d'où l'on a abaiſſé la perpendiculaire, & encore ſi l'angle connu ſur la baſe eſt d'une autre eſpèce que le côté donné ; mais dans les autres cas, on prendra leur différence, la perpendiculaire tombant au-dedans du triangle : l'on aura ainſi le ſecond angle vertical ; alors on fera cette ſeconde proportion (3694).

Le ſinus du premier angle vertical
Eſt au ſinus du ſecond angle vertical,
Comme le coſinus de l'angle donné ſur la baſe
Eſt au coſinus de l'angle cherché.

Si l'un des deux angles verticaux eſt moindre que l'angle donné d'où l'on a abaiſſé la perpendiculaire, c'eſt-à-dire, ſi la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle, l'angle cherché ſera de même eſpèce que l'angle donné ſur la baſe.

3703. *Connoissant deux angles & un côté oppoſé à l'un d'eux, trouver le côté oppoſé à l'autre angle connu.* On fera cette proportion (3690).

Le ſinus de l'angle oppoſé au côté connu
Eſt au ſinus de l'autre angle connu,
Comme le ſinus du côté connu
Eſt au ſinus du côté cherché.

Ce côté peut être aigu ou obtus ; les données ne ſuffiſent pas pour l'indiquer (3662).

3704. *Connoissant deux angles & un côté opposé à l'un d'eux, trouver le troisième angle.* On abaissera la perpendiculaire de l'angle cherché sur son côté opposé, que j'appelle la base, & l'on fera ces deux proportions (3671, 3694).

1° *Le rayon*
Est au cosinus du côté donné,
Comme la tangente de l'angle donné sur la base adjacente au côté connu
Est à la cotangente du premier angle vertical.

2° *Le cosinus de l'angle donné sur la base, adjacent au côté connu,*
Est au cosinus de l'angle opposé au côté connu,
Comme le sinus du premier angle vertical
Est au sinus de l'autre angle vertical.

On ajoutera ces deux angles verticaux, si les deux angles donnés sont de même espèce, c'est-à-dire, si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle, sinon l'on prendra leur différence, & l'on aura l'angle cherché.

3705. *Connoissant deux angles & le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre les deux angles.* On abaissera la perpendiculaire de l'angle inconnu sur le côté cherché, & l'on fera ces deux proportions (3668, 3693)

1° *Le rayon*
Est au cosinus de l'angle adjacent au côté donné,
Comme la tangente de ce côté
Est à la tangente du premier segment.

2° *La tangente de l'angle opposé au côté donné*
Est à la tangente de l'angle adjacent au côté donné,
Comme le sinus du premier segment.
Est au sinus du second segment.

Si les deux angles donnés sont de même espèce, on ajoutera ensemble les deux segmens; car alors la perpendiculaire tombera au-dedans du triangle; sinon l'on prendra leur différence, pour avoir le côté cherché.

3706. *Connoissant les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver un des angles.* On prendra la demi-somme des trois côtés & l'on en retranchera successivement les deux côtés qui comprennent l'angle cherché, on aura deux différences. Après quoi l'on fera cette proportion; *Le produit des sinus des deux côtés* qui comprennent l'angle cherché, *est à* 1, *comme le produit des sinus des deux différences est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché.* Voyez la démonstration (3743), & l'exemple (1015). Ce problême est d'un très-grand usage en astronomie pour calculer le lever & le coucher des astres, & pour connoître l'heure par le moyen de la hauteur d'un astre. Connoissant trois côtés.

3707. Connoissant les trois angles, on trouveroit un côté par cette analogie qui se déduit de la précédente, quand on transforme le triangle donné (3663): le produit des sinus des angles adjacens au côté cherché est au produit des cosinus des deux excès de la demi-somme des trois angles sur chacun des angles adjacens au côté cherché, comme l'unité est au carré du cosinus de la moitié du côté cherché. Mais cette analogie n'a été employée dans aucun problême de notre astronomie.

3708. Delà on peut conclure facilement un autre théorême qui sert à résoudre les triangles rectilignes, dont on connoît les trois côtés: le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est à 1, comme le produit des deux différences est au carré du sinus de la moitié de l'angle compris. Nous en avons fait usage (3151).

Autres propriétés des Triangles sphériques.

3709. Je n'ai démontré jusqu'ici que les propriétés nécessaires pour la résolution des triangles; il y en a beaucoup d'autres dont on fait usage dans l'astronomie & dans les recherches de calcul algébrique; je vais les rapporter ici, à l'exemple de M. de la Caille; mais ensuite j'y ajouterai les démonstrations que cet auteur avoit omises dans son livre.

Fig. 326. Dans un triangle ſphérique *ABC* (*fig.* 326), l'on a toujours les équations ſuivantes :

3710. Sin. $A = \frac{\text{ſin.}\,BC.\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,AB} = \frac{\text{ſin.}\,BC.\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,AC}$.

3711. Sin. $B = \frac{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,BC} = \frac{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,AB}$.

3712. Sin. $C = \frac{\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,AC} = \frac{\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,BC}$.

3713. Sin. $AB = \frac{\text{ſin.}\,BC.\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,A} = \frac{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,C}{\text{ſin.}\,B}$.

3714. Sin. $AC = \frac{\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,B}{\text{ſin.}\,C} = \frac{\text{ſin.}\,BC.\,\text{ſin}\,B}{\text{ſin.}\,A}$.

3715. Sin. $BC = \frac{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,B} = \frac{\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,A}{\text{ſin.}\,C}$.

3716. Coſ. $A = \frac{\text{coſ.}\,BC - \text{coſ.}\,AC.\,\text{coſ.}\,AB}{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,AB} = \text{coſin.}\,BC.\,\text{ſin.}\,B.\,\text{ſin.}\,C - \text{coſ.}\,B.\,\text{coſ.}\,C$. Nous l'avons employée (2267); la démonſtration ſe trouvera ci-après (3734).

3717. Coſ. $B = \frac{\text{coſ.}\,AC - \text{coſ.}\,AB.\,\text{coſ.}\,BC}{\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,BC} = \text{coſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,C.\,\text{ſin.}\,A - \text{coſ.}\,C.\,\text{coſ.}\,A$. Nous l'avons employée (2945).

3718. Coſ. $C = \frac{\text{coſ.}\,AB - \text{coſ.}\,AC.\,\text{coſ.}\,BC}{\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,BC} = \text{coſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,A.\,\text{ſin.}\,B - \text{coſ.}\,A.\,\text{coſ.}\,B$.

3719. Coſ. $AB = \text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,BC.\,\text{coſ.}\,C + \text{coſ.}\,AC.\,\text{coſ.}\,BC = \frac{\text{coſ.}\,C + \text{coſ.}\,A.\,\text{coſ.}\,B}{\text{ſin.}\,A.\,\text{ſin.}\,B}$. Voy. l'uſage, 3153, 3193.

3720. Coſ. $AC = \text{coſ.}\,B.\,\text{ſin.}\,AB.\,\text{ſin.}\,BC + \text{coſin.}\,AB.\,\text{coſ.}\,BC = \frac{\text{coſ.}\,B + \text{coſ.}\,C.\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,C.\,\text{ſin.}\,A}$.

3721. Coſ. $BC = \text{coſ.}\,A.\,\text{ſin.}\,AC.\,\text{ſin.}\,AB + \text{coſin.}\,AB.\,\text{coſ.}\,AC = \frac{\text{coſ.}\,A + \text{coſ.}\,B.\,\text{coſ.}\,C}{\text{ſin.}\,B.\,\text{ſin.}\,C}$.

3722. Tang. $A = \frac{\text{ſin.}\,B}{\text{cot.}\,BC.\,\text{ſin.}\,AB - \text{coſin.}\,B.\,\text{coſin}\,AB.} = \frac{\text{ſin.}\,C}{\text{cot.}\,BC.\,\text{ſin.}\,AC - \text{coſ.}\,AC.\,\text{coſ.}\,C}$. Cette expreſſion eſt d'un grand uſage (2706, 3826, &c.).

3723. Tang. $B = \frac{\text{ſin.}\,C}{\text{cot.}\,AC.\,\text{ſin.}\,BC - \text{coſin.}\,C.\,\text{coſin.}\,BC.} = \frac{\text{ſin.}\,A}{\text{cot.}\,AC.\,\text{ſin.}\,AB - \text{coſ.}\,AB.\,\text{coſ.}\,A}$.

3724. Tang. $C = \frac{\text{fin. } B}{\text{cot. } AB. \text{ fin. } BC - \text{cofin. } B. \text{ cofin. } BC} = \frac{\text{fin. } A}{\text{cot. } AB. \text{ fin. } AC - \text{cof. } AC. \text{ cof. } A}$.

3725. Tang. $AB = \frac{\text{fin. } BC}{\text{cotang. } C. \text{ fin. } B + \text{cofin. } B. \text{ cofin. } BC} = \frac{\text{fin. } AC}{\text{cot. } C. \text{ fin. } A + \text{cof. } AC. \text{ cof. } A}$.

3726. Tang. $AC = \frac{\text{fin. } BC}{\text{cot. } B. \text{ fin. } C + \text{cofin. } C. \text{ cofin. } BC} = \frac{\text{fin. } AB}{\text{cot. } B. \text{ fin. } A + \text{cof. } AB. \text{ cof. } A}$.

3727. Tang. $BC = \frac{\text{fin. } AC}{\text{cof. } AC. \text{ cof. } C - \text{fin. } C. \text{ cotang. } A} = \frac{\text{fin } AB}{\text{cof. } B. \text{ cof. } AB - \text{fin. } B. \text{ cot. } A}$. Nous en avons fait uſage (2945).

3728. Cot. $A = \frac{\text{cot. } BC. \text{ fin. } AB}{\text{fin. } B} - \text{cof. } AB. \text{ cot. } B = \frac{\text{cot. } BC. \text{ fin. } AC}{\text{fin. } C} - \text{cof. } AC. \text{ cot. } C$.

3729. Cot. $B = \frac{\text{cot. } AC. \text{ fin. } BC}{\text{fin. } C} - \text{cof. } BC. \text{ cot. } C = \frac{\text{cot. } AC. \text{ fin. } AB}{\text{fin. } A} - \text{cof. } AC. \text{ cot. } A$.

3730. Cot. $C = \frac{\text{cot. } AB. \text{ fin. } AC}{\text{fin. } A} - \text{cof. } AC. \text{ cot. } A = \frac{\text{cot. } AB. \text{ fin. } BC}{\text{fin. } B} - \text{cof. } BC. \text{ cot. } B$.

3731. Cot. $AB = \frac{\text{cot. } C. \text{ fin. } B}{\text{fin. } BC} + \text{cof. } B. \text{ cot. } BC = \frac{\text{fin. } A. \text{ cot. } C}{\text{fin. } AC} + \text{cot. } AC. \text{ cof. } A$.

3732. Cot. $AC = \frac{\text{cot. } B. \text{ fin. } C}{\text{fin. } BC} + \text{cof. } C. \text{ cot. } BC = \frac{\text{cot. } B. \text{ fin. } A}{\text{fin. } AB} + \text{cot. } AB. \text{ cof. } A$.

Par la même raiſon, cot. $BC = \frac{\text{cot. } A. \text{ fin. } C}{\text{fin. } AC} + \text{cof. } C. \text{ cot. } AC = \frac{\text{cot. } A. \text{ fin. } B}{\text{fin. } AB} + \text{cot. } AB. \text{ cof. } B$.

3733. Dans un triangle ſphérique *ABC* (*fig.* 326) où l'on a abaiſſé une perpendiculaire *AX*, le milieu de la baſe *CB* étant en *P*; l'on a tang. $\frac{1}{2}(AB + AC)$. tang. $\frac{1}{2}(AB - AC)$ = tang. $\frac{1}{2} BC$. tang. *PX*; en effet, cof. *BX* + cof. *CX* : cof. *BX* — cof. *CX* : : cof. *AB* + cof. *AC* : cof. *Fig.* 326.

AB — cos. AC (3692) : : cot. $\frac{1}{2}$ ($BX - CX$) : tang. $\frac{1}{2}$ ($BX + CX$) : : cotang. $\frac{1}{2}$ ($AB - AC$) : tang. $\frac{1}{2}$ ($AB + AC$) (3633); mais PX est la moitié de la différence des segmens BX & CX, & $\frac{1}{2} BC$ est leur demi-somme $= \frac{1}{2}$ ($BX + CX$), donc cot. $\frac{1}{2} PX$. tang. $\frac{1}{2}$ ($AB + AC$) $=$ tang. $\frac{1}{2} BC$. cot. $\frac{1}{2}$ ($AB - AC$); donc, &c.

Démonstrations de ces propriétés.

3734. La démonstration des six premières équations 3710.....3715, se réduit à une proportion démontrée, (3690); ainsi je passe aux formules 3716..3721. Pour les démontrer j'abaisse une perpendiculaire CX (*fig.* 327) sur un des côtés adjacens à l'angle A, j'ai cette proportion (3692) cos. BX : cos. AX : : cos. BC : cos. AC; donc cos. $BC = \frac{\text{cos. } AC \text{. cos. } BX}{\text{cos. } AX}$; mais cos. BX = cosin. ($AB - AX$) = cos. AB. cos. AX + sin. AB. sin. AX, (3620); donc cos. $BC = \frac{\text{cos. } AC \text{. cos. } AB \text{. cos. } AX + \text{sin. } AB \text{. sin. } AX \text{. cos. } AC}{\text{cos. } AX}$ = cos. AC cos. AB + sin. $AB \frac{\text{sin. } AX}{\text{cos. } AX}$ cos. AC; mais tang. AC. cos. A = tang. AX (3668) $= \frac{\text{sin. } AC}{\text{cos. } AC}$ cos. A $= \frac{\text{sin. } AX}{\text{cos. } AX}$; donc cos. BC = cos. AC. cos. AB + sin. AB. sin. AC. cos. A. C'est la première partie de la formule 3721. On démontreroit de même les articles 3719 & 3720.

Fig. 327.

De cette équation l'on tire cosin. $A = \frac{\text{cos. } BC - \text{cos. } AC \text{. cos. } AB}{\text{sin. } AB \text{. sin. } AC}$; c'est la première partie de la formule 3716; on démontreroit de même la première partie des formules 3717 & 3718.

3735. La formule 3716, en ajoutant de part & d'autre sin. AB. sin. AC se réduit à celle-ci : sin. AB. sin. AC — sin. AB. sin. AC. cos. A = sin. AB. sin. AC. + cos. AB. cos. AC — cos. BC, & substituant cos. ($AB - AC$) à la place des deux produits on en tire cettte proportion; sin. AB. sin. AC : 1 : : cos. ($AB - AC$) — cos. BC : 1 — cos. A; ou sin. AB. sin. AC : 1 : : sin. verse BC — sin. verse ($AB - AC$) : sin. verse A. Nous en ferons usage (3990).

3736. Pour démontrer la feconde partie de l'article 3716, où cof. $A =$ cof. BC. fin. B. fin. $C -$ cof. B cofin. C. Soit la tangente de $BCX = h$, fon finus fera $\frac{h}{\sqrt{1+hh}}$, & fon cofinus $\frac{1}{\sqrt{1+hh}}$; foit le finus de l'angle $C = a$, & fon cof. égal à b, on aura (3619) fin. $XCA =$ fin. ACB. cof. $XCB -$ fin. XCB. cof. $ACB = \frac{a-hb}{\sqrt{1+hh}}$; mais fin. BCX : fin. XCA : : cof. B : cof. A (3694), ou $\frac{h}{\sqrt{1+hh}} : \frac{a-hb}{\sqrt{1+hh}}$: : cof. B : cof. A; donc cof. $A = \frac{a-hb}{h}$ cof. $B = \frac{\text{fin.} ACB.\ \text{cof.} B}{\text{tang.}\ BCX}$ $-$ cof. B. cof. C; mais $\frac{\text{cof.} B}{\text{tan.} BCX} =$ cof. BC. fin. C; car dans le triangle CBX l'on a cof. BC : 1 : : cot. B : tang. BCX, (3671) donc tang. $BCX = \frac{\text{cot.}\ B}{\text{cof.}\ BC} = \frac{\text{cof.}\ B}{\text{cof.}\ BC\ \text{fin.}\ B}$; donc $\frac{\text{cof.}\ B}{\text{tan.}\ BCX}$ $=$ cof. BC. fin. B; fubftituant cette valeur dans l'expreffion de cof. A, elle deviendra fin. ACB. cof. BC. fin. B $-$ cof. B. cof. C.

3737. On démontreroit de même la feconde partie des formules 3717 & 3718. Cette expreffion du cofinus d'un angle par le moyen des deux autres angles & de leur côté compris, a été employée avec fuccès pour la nutation (3566); mais les fignes étoient changés, parce que la perpendiculaire tomboit hors du triangle.

3738. Pour démontrer la 2e partie de l'art. 3719, il fuffit de dégager cof. AB dans la 2e partie de l'art. 3718; car puifque cof. $C =$ cof. AB. fin. A. fin. $B -$ cof. A. cof. B, on a cof. $AB = \frac{\text{cof.}\ C + \text{cof.}\ A.\ \text{cof.}\ B}{\text{fin.}\ A.\ \text{fin.}\ B}$; on démontreroit de même la 2e partie des art. 3718 & 3720.

3739. La formule 3722, tang. $A =$ &c. eft comprife dans la démonftration que j'ai donnée d'une formule femblable (2706), & par conféquent les art. 3723, 3724.

3740. Les formules 3725, &c. fe démontrent au moyen des art. 3722, &c. par la transformation des triangles (3663). Par exemple, imaginons autour du triangle ABC

un triangle polaire *abc*, dont l'angle *b* réponde du même côté que l'angle *B* du triangle *ABC*; alors au lieu de tang. $A = \frac{\text{ſin. } B}{\text{cot. } BC \text{. ſin. } AB - \text{coſ. } B \text{. coſ. } AB}$ (3722), on aura tang. $bc = \frac{\text{ſin. } ac}{\text{cot. } a \text{. ſin. } c - \text{coſ. } ac \text{. coſ. } c}$; c'eſt la formule 3727, dans laquelle il faut ſeulement changer les ſignes du dénominateur, parce que dans le triangle polaire les côtés ſont les ſupplémens des angles du triangle donné; d'où il ſuit que les coſinus changent de ſigne (3605).

3741. La formule 3728, cot. *A*, &c. eſt l'inverſe de 3722, en mettant cot. *B* à la place de $\frac{\text{coſ. } B}{\text{ſin. } B}$; car cot. $A = \frac{1}{\text{tang. } A} = \frac{\text{cot. } BC \text{. ſin. } AB}{\text{ſin. } B} - \frac{\text{coſ. } B \text{. coſ. } AB}{\text{ſin. } B} = \frac{\text{cot. } BC \text{. ſin. } AB}{\text{ſin. } B}$ $-$ coſin. *AB*. cot. *B*. On démontreroit de même 3729 & 3730.

3742. La formule 3731 eſt l'inverſe de 3725, en mettant cot. *BC* à la place de $\frac{\text{coſ.}}{\text{ſin.}}$. Cette formule 3731 pourroit auſſi ſe mettre ſous la forme ſuivante, cot. $AB = \frac{\text{ſin. } A \text{. coſ. } C \text{. coſ. } A \text{. ſin. } C \text{. coſ. } AC}{\text{ſin. } C \text{. ſin. } AC}$, en mettant au lieu de cot. *C* ſa valeur $\frac{\text{coſ. } C}{\text{ſin. } C}$, & au lieu de ſin. *AC*. cot. *AC* ſa valeur coſ. *AC*. C'eſt celle qui eſt employée pour la nutation (3568), comme il ſeroit aiſé de s'en aſſurer en mettant *A*, *B*, *C*, au lieu de ♈, *E*, *N*, & ſubſtituant les dénominations de l'art. 3564.

Troiſième théorême fondamental.

3743. Il me reſte à démontrer une formule qui a été employée pour réſoudre les triangles dont on connoît trois côtés (3706), & qui eſt le troiſième & dernier théorême de la trigonométrie ſphérique, & la ſixième propriété des triangles ſphériques en général. Dans tout triangle *ABC* l'on a ſin. $\frac{1}{2} A^2 = \frac{\text{ſin. } (\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AC) \text{. ſin. } (\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC)}{\text{ſin. } AB \text{. ſin. } AC}$; car 2 ſin. $\frac{1}{2} A^2 = 1 - \text{coſ. } A$ (3629); ſi l'on met à la place de 1 la quantité $\frac{\text{ſin. } AB \text{. ſin. } AC}{\text{ſin. } AB \text{. ſin. } AC}$, qui revient au même, & à la place de coſ. *A* ſa valeur (3716), on aura 2 ſin. $\frac{1}{2} A^2 =$

$$\frac{\text{fin. } AB \,.\, \text{fin. } AC + \text{cof. } AB \,.\, \text{cof. } AC - \text{cof. } BC}{\text{fin. } AB \,.\, \text{fin. } AC} = \frac{\text{cof. } (AB - AC) - \text{cof. } BC}{\text{fin. } AB \,.\, \text{fin. } AC}$$

(3620), cela revient au même que l'expreffion propofée, car la différence des cofinus de $AB - AC$ & de BC eft la même chofe, que deux fois le produit des fin. de la demi-fomme & de la demi-différence de $AB - AC$ & BC (3629); cette équation nous fert à réfoudre un triangle dont les trois côtés font donnés (3706).

3744. *Connoissant deux hauteurs d'un aftre, & l'intervalle des deux obfervations, trouver la déclinaifon & l'angle horaire.* Ce problême feroit facile à réfoudre par des formules analytiques, mais la méthode indirecte me paroît la plus commode, parce que l'on fait toujours à très-peu-près quelle eft la déclinaifon de l'aftre que l'on obferve; foit P le pole (*fig.* 272) E le zénit, AB le parallèle de l'aftre; fuppofons d'abord fa diftance PA au pole à peu-près connue, on a donc les trois côtés du triangle PEA on cherchera l'angle P. Avec la même diftance au pole, augmentée s'il eft néceffaire du mouvement en déclinaifon dans l'intervalle des deux obfervations, c'eft-à-dire PB, l'on réfoudra le triangle EPB, dont on connoît encore les trois côtés, & l'on trouvera l'angle au pole; la fomme ou la différence de cet angle & du précédent, convertie en temps, doit être égale à l'intervalle des obfervations; fi l'on trouve quelque erreur, on fera varier la déclinaifon, ou la diftance au pole, & l'on verra bientôt quelle eft celle qui fatisfait à l'intervalle obfervé. *Fig.* 272.

Le cas le plus avantageux pour cette efpèce d'obfervation eft celui où l'une des hauteurs eft voifine du méridien, & l'autre vers le point où la hauteur change le plus (949).

Si l'on étoit en mer, & qu'on voulût déterminer la latitude du lieu, en fuppofant connue la déclinaifon de l'aftre, on fe ferviroit de la même méthode, en faifant varier PE au lieu de PA ou de PB. Dans le *Nautical Almanac* de 1771, il y a une table fort ample par laquelle on trouve plus facilement, que par la méthode précédente, la hauteur du pole au moyen de deux hauteurs du foleil, & de

l'intervalle des deux obſervations, quand on a la déclinaiſon du ſoleil, & la hauteur du pole eſtimée. Voyez les obſervations de M. Maskelyne ſur cette méthode. (*British Mariner's* guide, *pag.* 76).

Il y a un problême plus général, mais qui n'eſt d'aucun uſage; il conſiſte à trouver la latitude du lieu & la déclinaiſon de l'aſtre, par le moyen de trois hauteurs, à des intervalles connus; on en trouve cinq ſolutions différentes, par MM. Daniel Bernoulli, Herman, Euler, Mayer & Krafft, dans le 4e vol. des mémoires de Péterſbourg pour 1729. Ce problême eſt de même eſpèce que celui de la rotation du ſoleil, dont j'ai donné pluſieurs ſolutions (3150).

Il y a quelques autres propriétés des triangles ſphériques dont je n'ai pas fait mention, & que l'on trouvera dans les *Principes d'Aſtronomie ſphérique*, par M. *Mauduit*, publiés en 1765, & traduits en Anglois par M. Crakelt, en 1768.

DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES.

3745. Nous nous ſommes ſervis en pluſieurs endroits de ce livre des formules par leſquelles on détermine les rapports des petits changemens qui arrivent dans les côtés & dans les angles des triangles; M. Côtes les donna le premier dans un petit mémoire de 22 pages, qui a pour titre: *Æſtimatio errorum in mixta matheſi, per variationes partium trianguli plani & ſpherici, auctore Rogero* Cotes; ce mémoire ſe trouve avec d'autres opuſcules de ce célèbre auteur, à la ſuite d'un très-bel ouvrage intitulé: *Harmonia menſurarum*, qui parut à Cambridge en 1722. M. de la Caille donna enſuite ces formules en plus grand nombre & d'une manière plus appropriée à l'aſtronomie (*Mém. acad.* 1741, *pag.* 238); enfin on les retrouve dans ſes Leçons d'Aſtronomie, *pag.* 28 *& ſuiv.*); mais il n'a donné les démonſtrations dans aucun de ces deux ouvrages; d'ailleurs il s'eſt gliſſé pluſieurs fautes eſſentielles dans cette partie de ſes Leçons d'Aſtronomie;

c'eſt

c'est ce qui m'a déterminé à placer ici ces analogies avec leurs démonstrations ([a]) ; j'y ai ajouté l'indication des principales circonstances auxquelles on les applique dans l'astronomie ; & j'en ai ajouté plusieurs qui n'avoient point été données.

3746. LORSQU'UN ANGLE *& son côté adjacent sont supposés constans, la différentielle de l'autre côté adjacent à l'angle constant est à la différ. du côté opposé comme le rayon est au cos. de l'angle opposé au côté constant.* L'angle & son côté adjacent supposés constans.

DÉMONSTRATION. Soit le triangle *BAC* (*fig.* 327), dont l'angle *A* & le côté adjacent *CA* sont constans, la différentielle de *AB* sera à celle de *CB* comme le rayon est au cos de *B* ; en effet, lorsque le côté *AB* augmente d'une petite quantité *BD*, le triangle *ACB* se change en un autre triangle *ACD*, ayant fait $CE = CB$ & tiré l'arc *BE* perpendiculaire sur *CED*, on a *DE* pour la différentielle du côté *CB*, puisque *CD* est plus grand que *CB* de cette quantité *DE*; de plus l'angle *EDB* est égal à l'angle *CBA*, car le triangle *EDB* est supposé infiniment petit & par conséquent rectiligne, l'arc *EB* est aussi bien perpendiculaire sur *CB* que sur *CE* (3347), ainsi l'angle *CBE* est droit, donc *CBA* est le complément de *EBD* ; mais dans le petit triangle rectiligne *EBD*, l'angle *EBD* est le complément de *EDB*, donc l'angle *EDB* est égal à l'angle *CBA*. Cela étant, il s'agit de démontrer seulement que $BD : DE :: R : \cos. EDB$ ou *CBA* ; or c'est la propriété ordinaire d'un triangle rectiligne *BED* rectangle en *E*, que l'hypothénuse *BD* soit à un côté *DE* comme le rayon est au cosinus de l'angle *D* adjacent à ce côté. Donc si l'on appelle *dCB* la différentielle *ED* du côté *CB*, suivant la marque ordinaire du calcul différentiel, on aura la proportion dont il s'agit. C. Q. F. D. Fig. 327.

3747. Ainsi $dAB : dCB :: R : \cos. B$; l'on en tirera les analogies suivantes, en considérant les propriétés qui ont été démontrées ci-dessus; par exemple, en mettant

([a]) M. Mauduit les a aussi données dans ses principes d'Astronomie sphérique, imprimés vers le même temps que la première édit. de cette Astronomie.

Fig. 327. à la place de cos. B. ses deux valeurs (3717), on trouvera :

3748. $dAB : dCB :: \text{sin.} AB. \text{sin.} CB : R. \text{cos.} CA - \text{cos.} AB \text{ cos.} CB$.

3749. $dAB : dCB :: R : \text{cos.} CA. \text{sin.} C. \text{sin.} A - \text{cos.} C. \text{cos.} A$.

3750. Si le côté CA est de 90°, l'on aura $dAB : dCB ::$ tang. BC : tang. BA, car alors cos. $CA = 0$, donc $dAB : dBC ::$ sin. AB. sin. BC : cos. AB. cos. BC :: $\frac{\text{sin.} AB}{\text{cos.} AB} : \frac{\text{cos.} BC}{\text{sin.} BC}$ :: tang. BC : tang. AB.

3751. Quand l'arc BC est de 90°, la proportion de l'article 3747 est toujours exacte, quelque grandes que soient les différentielles de AB & de BC, c'est-à-dire, les arcs BD & DE, pourvu qu'on emploie les sinus, & qu'on dise sin. dAB : sin. dBC :: R : cos. B ; car c'est la propriété ordinaire d'un triangle sphérique BED (3665). Au contraire plus l'arc BC sera petit, & plus l'angle ABC approchera de 90°, moins l'analogie précédente sera exacte quand BD & DE auront une certaine étendue, parce que si CE est égal à CB, l'angle E ne sera pas un angle droit.

Lorsque l'angle B sera droit, on aura exactement R : cos. BD :: cos. BC : cos. CD ou R : cos. dAB :: cos. BC : cos. CD, (au lieu de la formule 275 de M. de la Caille).

3752. *Si un angle & le côté adjacent sont constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant est à la différentielle de l'angle opposé comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.*

Démonstration. Soit le triangle sphérique ABC
Fig. 326. (*fig.* 326), dont l'angle A & le côté AC soient constans ; des points A, B, C, comme poles, on décrira les arcs FE, FD, DE (3663) qui formeront le triangle polaire FED, dans lequel l'angle F sera le supplément du côté AB, le côté FD sera le supplément de l'angle B, le côté FE sera le supplément de l'angle A, &c. ainsi dans le triangle polaire EFG, on pourra considérer comme constans l'angle E & le côté adjacent FE ; en y appliquant

le théorême de l'art. 3746, on verra que la différentielle du côté *DE* eſt à celle du côté *FD* comme le rayon eſt au coſinus de l'angle *D*; donc ſubſtituant aux termes de cette proportion les termes qui leur correſpondent dans le triangle *ABC*, qui ont les mêmes ſinus & les mêmes différentielles, on trouve que la différentielle de l'angle *C* eſt à la différentielle de l'angle *B*, comme le rayon eſt au coſinus du côté *BC*. C. Q. F. D.

3753. Ainſi $dB : dC :: \text{coſ.}\ BC : R$.

3754. $dB : dC :: \text{coſ.}\ A + \text{coſ.}\ B.\ \text{coſ.}\ C : \text{ſin.}\ B.\ \text{ſin.}\ C$.

3755. $dB : dC :: \text{coſ.}\ A.\ \text{ſin.}\ AC.\ \text{ſin.}\ AB + \text{coſ.}\ AC.\ \text{coſ.}\ AB : R$, en ſubſtitant pour coſ. *BC* ſes valeurs (3721).

3756. Si $A = 90°$, l'on a $dB : dC :: \text{cot.}\ C : \text{tang.}\ B$, parce que dans un triangle rectangle, on a $\text{coſ.}\ BC = \frac{\text{cot.}\ C}{\text{tang.}\ B}$ (3671).

3757. Si $B = 90°$, la variation de l'angle *B* eſt nulle.

3758. *Si un angle & le côté adjacent ſont conſtans, la différentielle de l'angle adjacent au côté conſtant ſera à la différentielle du côté oppoſé à l'angle conſtant, comme la tangente de l'angle oppoſé au côté conſtant, eſt au ſinus du côté oppoſé à l'angle conſtant.*

Démonstration. Soient *A* & *AC* conſtans (*fig.* 327), que l'on prolonge le côté *CB* juſqu'à ce qu'on ait $CF = 90°$, & de même *CD* juſqu'à ce que *CG* ſoit de 90°, le petit arc *FG* ſera la meſure de l'angle *ECB*, & par conſéquent ſera la différentielle de l'angle *C*, tandis que *DE* eſt la différentielle du côté *CB*, il faut donc démontrer que $FG : DE :: \text{tang.}\ B : \text{ſin.}\ BC$; on conſidérera que $FG : BE :: R : \text{ſin.}\ BC$ (892); mais $DE : BE :: R : \text{tang.}\ BDE$ ou *CBA*; donc $FG : DE :: \text{tang.}\ B : \text{ſin.}\ BC$. *Fig.* 327.

3759. C'eſt-à-dire, $dBC : dC :: \text{ſin.}\ BC : \text{tang.}\ B$.

3760. $dBC : dC :: \text{ſin.}\ A.\ \text{ſin.}\ AC : \text{tang.}\ B.\ \text{ſin.}\ B$. en mettant à la place de ſin. *BC* ſa valeur (3715).

3761. $dBC : dC :: \text{ſin.}\ BC^2.\ \text{cotang.}\ AC - \text{ſin.}\ BC.$

cof. BC. cof. C : fin. C, en mettant à la place de tang. B fa valeur 3723.

3762. Si $BC = 90°$, on a $dBC : dC :: R$: tang. B, puifque fin. $BC = R$.

3763. *Si un angle & un côté adjacent à cet angle font fuppofés conftans, la différentielle du côté variable adjacent à l'angle conftant fera à la différentielle de l'angle oppofé au côté conftant, comme la tang. du côté oppofé à l'angle conftant eft au finus de l'angle oppofé au côté conftant.*

Fig. 327. Démonstration. Soit un triangle ACL (*fig.* 327) dont le côté AC & l'angle A font conftans : S le centre de la fphère LT & KT deux tangentes qui font entre elles un angle T égal à la variation de l'angle L, ou à la différence des angles CKL, CLA ; $ML = LK$ fin. K eft la mefure de l'angle S au centre ; mais cet angle S eft à l'angle T, comme LT : LS :: tang. CL : R ; donc LK. fin. K : T :: tang. CL : 1 donc $T = LK \frac{\text{fin.} K}{\text{tang.} CL}$. Cette démonftration eft plus directe que celle de M. Cotes qui emploie le triangle polaire comme ci-devant (3752). Donc dans le triangle ABC l'on a $dAB : dB$ :: tang. CB : fin. B.

3764. $dAB : dB$ :: tang. BC : fin. B. Nous avons fait ufage de celle-ci pour la préceffion des équinoxes (2707) pour les variations des étoiles (2743) & pour la nutation en afcenfion droite (2870).

3765. $dAB : dB$ :: tang. BC. fin. BC : fin. AC. fin. A ; en mettant pour fin. B fa valeur $\frac{\text{fin.} AC. \text{fin.} A}{\text{fin.} BC}$ (3711).

3766. *Si un angle & un côté adjacent à cet angle font fuppofés conftans, la différentielle de l'angle adjacent au côté conftant eft à celle du côté adjacent à l'angle conftant, comme le finus de l'angle oppofé au côté conftant eft au finus du côté oppofé à l'angle conftant.*

Fig. 327. Démonstration. Dans le triangle ABC (*fig.* 327) dont l'angle A & le côté AC font conftans, il faut démontrer que $FG : BD$ :: fin. B : fin. BC ; or $BE = FG$. fin. BC (892), & dans le triangle rectiligne BED on a BE :

BD : : ſin. B : R, (car l'angle CBA eſt égal à l'angle EDB) ; donc $BE = BD$. ſin. B ; ainſi égalant les deux valeurs de BE, nous aurons FG. ſin. $BC = BD$ ſin. B, convertiſſant cette équation en proportion, on a FG : BD : : ſin. B : ſin. BC.

3767. $dAB : dC$: : ſin. BC : ſin. B.

3768. $dAB : dC$: : ſin. BC^2 : ſin. AC. ſin. A, en mettant pour ſin. B ſa valeur $\frac{\text{ſin. } AC. \text{ ſin } A}{\text{ſin. } BC}$ (3711).

3769. $dAB : dC$: : ſin. AC. ſin. A : ſin. B^2, en mettant pour ſin. BC ſa valeur $\frac{\text{ſin. } AC. \text{ ſin. } A}{\text{ſin. } B}$ (3715).

3770. $dAB : dC$: : ſin. BC. ſin. AB : ſin. C. ſin. AC ; en mettant pour ſin. B ſa valeur $\frac{\text{ſin. } C. \text{ ſin. } AC}{\text{ſin. } AB}$ (3711).

3771. $dAB : dC$: : ſin. A. ſin. AB^2 : ſin. AC. ſin. C^2, en mettant les valeurs de ſin. $BC = \frac{\text{ſin. } A. \text{ ſin. } AB}{\text{ſin. } C}$ (3715), & de ſin. $B = \frac{\text{ſin. } C. \text{ ſin. } AC}{\text{ſin. } AB.}$ (3711).

3772. Si $B = 90^\circ$. $dAB : dC$: : ſin. BC : R ou : : tang. BA : tang. C. Il me ſemble qu'on ne ſauroit faire uſage de la formule 278 de M. de la Caille (*pag.* 28).

3773. *Si un angle* A (Fig. 327) *& un côté* AC *adjacent à cet angle ſont ſuppoſés conſtans, la différentielle de l'angle* B *oppoſé au côté conſtant ſera à la différentielle du côté* BC *oppoſé à l'angle conſtant, comme la tangente de l'angle* B *oppoſé au côté conſtant* AC *eſt à la tangente du côté* BC *oppoſé à l'angle conſtant* A. *Fig.* 327.

Démonstration. Sin. A : ſin. BC : : ſin. B : ſin. AC (3690), or dans cette proportion les deux extrêmes ſont conſtans ; ainſi le ſinus de l'angle B ſera toujours en raiſon inverſe du ſin. du côté BC ; donc leurs différentielles seront auſſi dans la même proportion (3296), c'eſt-à-dire, que la différentielle du ſin. de B ſera à celle du ſinus de BC, comme ſin. B : ſin. BC ; mais d ſin. $B = dB$. coſ. B (3307), & d ſin. $BC = dBC$. coſ. BC ; donc dB. coſ. B : dBC. coſ. BC : : ſin. B : ſin. BC ; & dB. coſ. B ſin. $BC = dBC$. coſ. BC. ſin. B ; donc dB : dBC : : coſ. BC. ſin.

B : cos. B. sin. BC; (divisant les deux derniers termes par cos. BC) : : $\frac{\text{sin.}B}{\text{cos.}B}$: $\frac{\text{sin.}BC}{\text{cos.}BC}$: : tang. B : tang. BC.

3774. C'est-à-dire, $dBC : dB$: : tang. BC : tang. B.

3775. Si $B = 90°$, la variation de B & de BC est nulle.

3776. *Dans tout triangle sphérique tel que* ABC (Fig. 329), *si un côté* BC *& l'angle* A *qui lui est opposé sont constans, la différentielle d'un des autres angles* C *sera à celle du côté* AB *opposé à cet angle* C, *comme la tangente de ce même angle* C *est à la tangente du même côté* AB *opposé à cet angle.*

Fig. 329.

Un côté & l'angle opposé constans.

Démonstration. Supposons le triangle ABC changé en un autre triangle ADE qui en diffère infiniment peu, & qui soit tel que DE soit égal à BC, c'est-à-dire, que le côté opposé à l'angle constant A soit constant; on aura cette proportion; sin. C : sin. AB : : sin. A : sin. BC, & comme les deux derniers termes de la proportion sont constans, le sin. de C sera au sinus de AB en raison constante, donc d sin. C : d sin. AB :: sin. C : sin. AB (3296); mais d sin. $C = dC$ cos. C, & d sin. $AB = dAB$. cos. AB, (3307); ainsi dC. cos. C : dAB. cos. AB : : sin. C : sin. AB; dC. cos. C. sin. $AB = d. AB$. cos. AB. sin. C; donc dC : dAB : : cos. AB. sin. C : cos. C. sin. AB; divisant les deux derniers termes par cos. C cos. AB, on a enfin $dC : d. AB$: : $\frac{\text{sin.}C}{\text{cos.}C}$: $\frac{\text{sin.}AB}{\text{cos.}AB}$: : tang. C : tang. AB.

3777. $dAB : dC$: : tang. AB : tang. C.

3778. Si $A = 90°$, l'on aura $dAB : dC$ :: sin. AC : R parce qu'alors R : sin. AC : : tang. C : tang. AB (3667).

3779. Si $B = 90°$, $dAB : dC$: : sin. BC : R; car alors R : sin. BC : : tang. C : tang. AB (3667).

3780. Si à la place du côté AB & de l'angle C qui lui est opposé, nous prenons le côté AC & l'angle B qui lui est opposé, nous aurons par la même raison $dAC : dB$: : tang. AC : tang. B.

3781. Si $A = 90°$, $dAC : dB$: : sin. AB : R.

3782. Si $C = 90°$, $dAC : dB$: : sin. BC : R. Cette

formule, ainsi que celle de l'art. 3780, sert à trouver le changement de déclinaison qui a lieu pour chaque variation dans l'obliquité de l'écliptique.

3783. *Si un côté* BC (Fig. 329) *& l'angle opposé* A *sont constans, la différentielle d'un des côtés variables* AB *est à la différentielle de l'autre côté* AC, *comme le cosinus de l'angle* C *opposé au premier côté* AB *est au cosinus de l'angle* B *opposé au second côté* AC.

Démonstration. Puisque le côté *BC* est supposé égal au côté *DE*, ces deux côtés se coupent nécessairement en un point *H* soit au-dedans du triangle, comme dans la *fig.* 329, soit au-dehors, en supposant les côtés *BC* & *DE* prolongés. Du point d'intersection *H*, on décrira par les points *B* & *C* de petits arcs *BF* & *CG*, qui couperont sur *DE* les arcs $HG = HC$ & $HF = HB$, les différences *FD*, *GE* seront égales, puisqu'elles doivent se détruire pour rendre égaux les arcs *BC* & *DE*. Dans le petit triangle rectiligne *BDF* on aura $BD : FD :: R :$ sin. *FBD*, ou cos. *BDF*, ou cos. *ABC*; & dans le triangle *GCE*, $CE : GE$ (ou *FD*) :: $R :$ sin. *GCE*, ou cos. *ACB*; d'où l'on tire les deux équations $FD = BD$. cos. *ABC*, & $FD = CE$. cos. *ACB*; donc *BD*. cos. $ABC = CE$. cos. *ACB*. Fig. 329.

3784. C'est-à-dire, $dAB : dAC ::$ cos. $C :$ cos. B.

3785. $dAB : dAC ::$ cos. *AB*. sin. *AB* — cos. *AC*. cos. *BC*. sin. *AB* est à cos. *AC*. sin. *AC* — cos. *AB* cos. *BC*. sin. *AC*. En mettant pour cos. *C* & cos. *B* leurs valeurs (3718 & 3717).

3786. *Si un côté* BC (Fig. 326) *& l'angle opposé* A *sont constans, la différentielle de l'angle* B *sera à la différentielle de l'angle* C, *comme le cosinus du côté* AC *opposé à l'angle* B *est au cosinus du côté* AB *opposé à l'angle* C. Fig. 326.

Démonstration. Des points *A*, *B*, *C* comme poles, on décrira le triangle polaire *DEF* (3663) dont les angles *E* & *F* seront les supplémens des côtés *AC* & *AB* du triangle donné *ABC*, & ainsi des autres parties. Alors l'angle *D* & le côté *FE* seront constans; & l'on aura cette proportion (3783) $d. FD : d. ED ::$ cos. $E :$ cos. F; substituant à ces quatre termes ceux qui en sont les supplé-

mens dans le triangle ABC, la proportion se réduit à celle qu'il falloit démontrer.

3787. $dB : dC :: $ cosinus AC : cos. AB.

3788. $dB : dC ::$ cos. B. tang. AB. sin. BC + cos. BC : R; en mettant pour cos. AC la valeur (3720) & mettant pour $\frac{\text{sin. } AB}{\text{cos. } AB}$ sa valeur tang. AB.

Fig. 329. 3789. *Si un côté* BC (Fig. 329) *& l'angle* A *opposé à ce côté sont constans, la différentielle d'un des côtés variables* AB *est à la différentielle de l'angle* B *adjacent à ce côté, comme le sinus de ce côté* AB *est à la tangente de l'angle* C *opposé à ce côté multipliée par le cosinus du troisième côté* AC.

Démonstration. $dAB : dB :: dAB . dC : dC . dB$; mais $dAB : dC ::$ tang. AB : tang. C (3777) & $dC : dB ::$ cos. AB : cos. AC (3786); donc $dAB . dC : dC . dB ::$ tang. AB. cos. AB : tang. C. cos. AC :: sin. AB : tang. C. cos. AC; donc $dAB : dB ::$ sin. AB : tang. C. cos. AC.

3790. $dAB : dB ::$ cos. C. tang. AC : sin. B; car $dAB : dB :: dAB . dAC : dB . dAC$; dans les deux derniers termes on substituera les rapports tirés des démonstrations précédentes; $dAB : dAC ::$ cos. C : cos. B (3784), $dAC : dB ::$ tang. AC : tang. B (3780); donc $dAB . dAC : dB . dAC ::$ cos. C. tang. AC : cos. B. tang. B, ou sin. B; donc enfin $dAB : dB ::$ cos. C. tang. AC : sin. B.

3791. $dAB : dB ::$ sin. AB : tang. C. cos. AC; parce que cos. C. tang. $AC = \frac{\text{sin. } C}{\text{tang. } C} . \frac{\text{sin. } AC}{\text{cos. } AC}$ & $\frac{\text{sin. } C . \text{sin. } AC}{\text{sin. } AB} =$ sin. B (3711).

Si $A = 90°$ l'on aura $dAB : dB ::$ tang. AC. cos. AB : R; en mettant au lieu de tang. C sa valeur $\frac{\text{tang. } AB}{\text{sin. } AC}$ (3567), pour $\frac{\text{sin. } AB}{\text{tang. } AB}$ sa valeur cos. AB (3616), & pour $\frac{\text{sin. } AC}{\text{cos. } AC}$ sa valeur tang. AC. Cette formule sert pour trouver le changement d'ascension droite qui répond aux variations de l'obliquité de l'écliptique, (*Connoiss. des mouv. célest.* 1766, *pag.* 188).

3792. $dAB : dB ::$ tan. AC. sin. AB : tan. C. sin. AC,

en

en mettant dans la précédente, au lieu de cos. AC sa valeur $\frac{\text{sin. } AC}{\text{tang. } AC}$.

3793. $dAB : dB ::$ tan. AC. cos. AB — sin. AC. cos. BC : sin. B. sin. AC. sin. BC. en mettant dans la formule 3790 pour cos. C. la première valeur de l'article 3718.

3794. Si au lieu du côté AB & de son angle adjacent B, on met le côté AC & son angle adjacent C, on aura par la même raison $dAC : dC ::$ sin. AC : tang. B. cos. AB.

3795. $dAC : dC ::$ tang. AB. cos. B : sin. C; en mettant au lieu de cos. AB sa valeur $\frac{\text{sin. } AB}{\text{tang. } AB}$, au lieu de tan. B sa valeur $\frac{\text{sin. } B}{\text{cos. } B}$, & ensuite au lieu de $\frac{\text{sin. } B \text{. sin. } AB}{\text{sin. } AC}$ sa valeur sin. C (3712).

3796. Si $A = 90^\circ$, $dAC : dC :: \frac{1}{2}$ sin. 2 AC : cot. C. En effet, on a pour lors tang. $B = \frac{\text{tang. } AC}{\text{sin. } AB}$ (3667); donc (3794) $dAC : dC ::$ sin. AC : $\frac{\text{tang. } AC \text{. cos. } AB}{\text{sin. } AB}$ ou $\frac{\text{tang. } AC}{\text{tang. } AB}$ :: sin. AC : $\frac{\text{sin. } AC}{\text{cos. } AC \text{. tang. } AB}$ :: sinus AC. cosin. AC : $\frac{\text{sin. } AC}{\text{tang. } AB}$, mais $\frac{\text{sin. } AC}{\text{tang. } AB} =$ cotang. C (3667); donc $dAC : dC ::$ sin. AC. cos. AC : cot. $C :: \frac{1}{2}$ sin. 2 AC : cot. C (3625).

3797. Dans un triangle *sphérique* ABC (Fig. 328) *où deux côtés* AB, AC, *sont constans, la différentielle de l'angle compris* A *sera à la différentielle d'un des autres angles* B, *comme le sinus du troisième côté* BC *opposé à l'angle* A *est au sinus du côté* AC *opposé à l'angle* B, *multiplié par le cosinus du troisième angle* C. Fig. 328. Deux côtés constans.

Démonstration. Que le triangle ABC se change en un autre triangle ABD qui ait le même côté AB, & dont le côté AD soit égal à AC; la différentielle de l'angle A sera l'angle CAD ou l'arc FG tiré à 90° du point A, & la différentielle de l'angle B sera DBC ou l'arc IH tiré à 90° du point B; ayant tiré l'arc CE perpendiculaire à BCH, on observera que $FG : HI :: FG . CD . CE : HI . CD . CE$; puisque je ne fais que multiplier chaque terme

de la 1re raison par la même quantité, pour former les termes de la seconde raison; donc $FG = \frac{HI.FG.CD.CE}{HI.CD.CE}$; mais $\frac{FG}{CD} = \frac{1}{\text{sin. } AC}$ (892); $\frac{CD}{CE} = \frac{1}{\text{cos. } DCE} = \frac{1}{\text{cos. } ACB}$ (3613), & $\frac{CE}{HI} = \text{sin. } BC$; donc $FG = \frac{HI.\text{sin. } BC}{\text{sin. } AC.\text{cos. } ACB}$, ce qui revient à notre énoncé.

3798. $dA : dB ::$ sin. BC : sin. AC. cos. C. Nous en avons fait usage (2714 & 2732).

3799. $dA : dB ::$ sin. A : sin. B. cos. C, parce que sin. BC : sin. AC :: sin. A : sin. B. (3690).

3800. $dA : dB ::$ sin. BC. tang. C : sin. AC. sin. C, en multipliant la prop. 3798 par tang. C.

3801. $dA : dB ::$ tang. C. sin. A : sin. B. sin. C, parce que sin. BC : sin. AC :: sin. A : sin. B.

3802. $dA : dB ::$ sin. BC. tan. C : sin. B. sin. AB, en mettant dans l'art. 3800 sin. B. sin. AB à la place de son égal sin. AC. sin. C.

3803. $dA : dB ::$ sin. BC^2 : cos. AB — cos. AC cos. BC, en mettant dans l'art. 3798 à la place de cos. C sa valeur 3718.

3804. $dA : dB ::$ sin. AB. sin. A : sin. AC. $\frac{1}{2}$ sin. $2C$; car sin. BC : sin. AC. cos. C. :: $\frac{\text{sin. } AB.\text{sin. } A}{\text{sin. } C}$ (3715) : sin. AC. cos. C :: sin. AB. sin. A : sin. AC. sin. C. cos. C, ou sin. AC. $\frac{1}{2}$ sin. $2C$ (3625).

3805. $dA : dB :: R$: sin. B^2 cos. AB — sin. B. cos. B. cot. A, en mettant à l'art. 3799 la seconde valeur de cos. C (3718).

3806. $dA : dB ::$ sin. BC^2 : cos. AB — cos. BC. cos. AC; car mettant dans l'article 3799, à la place de cos. C la première valeur de l'article 3718, & substituant pour $\frac{\text{sin. } B}{\text{sin. } A.\text{sin } AC}$ sa valeur $\frac{1}{\text{sin. } BC}$ (3715), pour $\frac{\text{sin. } B.\text{sin } BC}{\text{sin. } AC}$ sa valeur sin. A (3710), & pour sin. BC. cot. BC sa valeur cos. BC.

3807. Si au lieu de l'angle B & du côté AC qui lui est opposé, on prend l'angle C & le côté opposé AC, l'on aura par la même raison les analogies suivantes;

$dA : dC$: : ſin. BC : ſin. AB. coſ. B.

3808. $dA : dC$: : ſin. A : ſin. C. coſ. B.

3809. $dA : dC$: : ſin. BC. tang. B : ſin. AB. ſin. B.

3810. $dA : dC$: : tang. B. ſin. BC : ſin. AC. ſin. C.

3811. $dA : dC$: : tang. B. ſin. A : ſin. C. ſin. B.

3812. $dA : dC$: : ſin. BC^2 : coſ. AC — coſin. AB. coſ. BC.

3813. SI DEUX COTÉS AB, AC (Fig. 328) *ſont conſtans, la différentielle de l'angle compris* A *eſt à la différentielle du côté* BC *qui lui eſt oppoſé, comme le rayon eſt au ſinus de l'un ou de l'autre des deux autres angles, tel que* C, *multiplié par le ſinus du côté conſtant* AC, *contigu à ce même angle.* Fig. 328.

DÉMONSTRATION. Il faut prouver que $FG : ED$: : 1 : ſin. C ſin. AC; il ſuffit de conſidérer que $FG = \frac{ED.FG.CD}{CD.ED}$, puiſque dans cette fraction le dénominateur détruit le numérateur à l'exception de FG, mais $\frac{FG}{CD} = \frac{R}{\text{ſin.} AC}$ (892), & $\frac{CD}{ED} = \frac{R}{\text{ſin.} ECD} = \frac{R}{\text{ſin.} ACB}$; donc $FG = \frac{ED}{\text{ſin.} ACB.\, \text{ſin.} AC}$; c'eſt-à-dire, que $FG : ED$: : 1 : ſin. C. ſin. AC. L'on ſe ſert de cette proportion pour trouver le changement de hauteur des aſtres en une minute de temps = 15′ *coſ. amplit. coſ. haut. du pole* (3994).

3814. $dA : dBC$: : 1 : ſin. AC. ſin. C. Nous avons fait uſage de cette proportion pour trouver le changement de l'obliquité de l'écliptique (2733).

3815. $dA : dBC$: : 1 : ſin. AB. ſin. B; parce que ſin. AC : ſin. AB : : ſin. B : ſin. C.

3816. $dA : dBC$: : 1. ſin. BC. ſin. C : ſin. A. ſin. B. ſin. AB^2; en multipliant le premier terme par ſin. BC. ſin. C & le ſecond par ſin. A ſin. AB qui a la même valeur.

3817. Si le côté $BC = 90°$, on a cette équation $dA = \frac{dBC}{\sqrt{\text{ſin.} AC^2 - \text{coſ.} AB^2}}$. Pour la démontrer j'élève un arc CL perpendiculaire ſur BC & ſur BL, dont le pole eſt en B, enſorte que $BL = 90°$. A cauſe du triangle ACL, dans

lequel ſin. $AC : 1 ::$ ſin. AL ou coſ. AB : ſin. ACL ou coſ. ACB, on a coſ. $C = \frac{\text{coſ. } AB}{\text{ſin. } AC}$; donc ſin. $ACB = \sqrt{1 - \frac{\text{coſ. } AB^2}{\text{ſin. } AC^2}}$, mais $DC = \frac{DE}{\text{ſin. } DCE} = \frac{DE}{\text{ſin. } ACB}$ & $\frac{DE}{\text{ſin. } AC} = dA$, donc $\frac{DE}{\text{ſin. } ACB \,.\, \text{ſin. } AC} = dA$; & ſubſtituant la valeur de ſin. ACB, l'on aura $dA = \frac{dBC}{\sqrt{\text{ſin. } AC^2 - \text{coſ. } AB^2}}$, je me ſuis ſervi de cette formule pour trouver la quantité dont la réfraction & la parallaxe changent le lever & le coucher des planètes (1028).

3818. On peut ſimplifier cette formule & l'approprier encore mieux à l'uſage des logarithmes en mettant $\frac{dBC}{\text{ſin. } AC \sqrt{1 - \frac{\text{coſ. } AB^2}{\text{ſin. } AC^2}}}$; car ſi l'on prend un arc X, dont le ſinus ſoit $= \frac{\text{coſ } AB}{\text{ſin. } AC}$, & qu'on en cherche tout de ſuite le coſinus, on aura pour la formule $dA = \frac{dBc}{\text{ſin. } AC \,.\, \text{coſ. } X}$ dont l'uſage eſt plus commode (1028).

Fig. 328. 3819. *Si deux côtés* AB, AC (Fig. 328), *ſont conſtans, la différentielle de l'un ou de l'autre des angles oppoſés aux côtés conſtans, tel que* B, *ſera à la différentielle du troiſième côté* BC, *comme le rayon eſt à la tangente de l'autre angle* C *oppoſé à l'un des côtés conſtans* AB, *multipliée par le ſinus du troiſième côté, ou du côté variable* BC.

Démonstration. La différentielle de l'angle B eſt le petit angle CBD, ou l'arc HI qui en eſt la meſure, & la différentielle du côté BC eſt le petit arc DE ; la différentielle $HI = \frac{ED \,.\, HI \,.\, EC}{ED \,.\, EC}$; or $\frac{HI}{EC} = \frac{R}{\text{ſin. } BC}$ (892), $\frac{EC}{ED} = \frac{R}{\text{tan. } ECD} = \frac{R}{\text{tan. } ACB}$, & comme $R = 1$, on a $HI = \frac{ED}{\text{ſin. } BC \,.\, \text{tan. } ACB}$, c'eſt-à-dire, que $HI : ED :: 1 :$ ſin. BC. tan. C. Nous en avons fait uſage (933).

3820. $dB : dBC :: 1 :$ ſin. BC . tan. C.

3821. $dB : dBC ::$ cot. C : ſin. BC.

3822. $dB : dBC :: \text{cof. } C : \text{fin. } A . \text{ fin. } AB$: parce que $\text{cot. } C = \frac{\text{cof. } C}{\text{fin. } C}$, & que $\text{fin. } BC . \text{ fin. } C = \text{fin. } A . \text{ fin. } AB$.

3823. Si $BC = 90°$ l'on a $dB = \frac{dBC . \text{ cof. } AB}{\sqrt{\text{fin. } AC^2 - \text{cof. } AB^2}}$. Car on a $dB = \frac{dBC . \text{cof. } C}{\text{fin. } A . \text{ fin. } AB}$ (3822) ; mais cofinus $C = \frac{\text{cof. } AB}{\text{fin. } AC}$ (3816), donc $dB = \frac{dBC \text{ cof. } AB}{\text{fin. } A . \text{ fin. } AB . \text{ fin. } AC}$; de plus $\text{fin. } A : 1 :: \text{fin. } B : \text{fin. } AC$, donc $dB = \frac{dBC . \text{cof. } AB}{\text{fin. } AB \text{ fin. } B}$, & parce que $\text{fin. } AC : \text{fin. } B :: \text{fin. } AB : \text{fin. } C$, $dB = \frac{d . BC . \text{ cof. } AB}{\text{fin. } AC . \text{ fin. } C}$. Mais fin. ACB ou $\text{fin. } C = \sqrt{1 - \frac{\text{cof. } AB^2}{\text{fin. } AC^2}}$ (3817) $= \frac{1}{\text{fin. } AC} \sqrt{\text{fin. } AC^2 - \text{cof. } AB^2}$, donc $\text{fin. } AC . \text{ fin. } C = \sqrt{\text{fin. } AC^2 - \text{cof. } AB^2}$; & $dB = \frac{dBC . \text{ cof. } AB}{\text{fin. } AC . \text{ fin. } C} = \frac{dBC . \text{ cof. } AB}{\sqrt{\text{fin. }^2 AC - \text{cof. }^2 AB}}$. C'eft la formule que j'ai déjà indiquée pour trouver la correction de l'amplitude, occafionnée par la réfraction ou par la parallaxe (1041).

3824. Cette formule peut fe mettre fous cette forme $dBC . \frac{\text{cof. } AB}{\text{fin. } AC \sqrt{1 - \frac{\text{cof. } AB^2}{\text{fin. } AC^2}}}$ donc fi l'on cherche un arc X dont le finus foit $\frac{\text{cof. } AB}{\text{fin. } AC}$, & qu'on en cherche tout de fuite le cofinus, on aura $dB = \frac{d . BC \text{ cof. } AB}{\text{fin. } AC . \text{ cof. } X}$, dont l'ufage eft plus commode ; c'eft la formule que j'ai indiquée (1042).

3825. Dans le triangle ABC l'on a encore $dB : dBC :: \text{cot. } C . \text{ fin. } B : \text{fin. } A . \text{ fin. } AC$, en mettant dans l'art. 3820, au lieu de fin. BC fa valeur $\frac{\text{fin. } A . \text{ fin. } AC}{\text{fin. } B}$ (3715).

3826. $dB : dBC :: \frac{\text{cot. } AB}{\text{fin. } B} - \frac{\text{cot. } BC}{\text{tang. } B} : R$, en mettant dans l'article 3821 au lieu de cot. C l'unité divifée par la première valeur de tang. C (3724) ; au lieu de $\frac{\text{cof. } B}{\text{fin. } B}$ fa valeur $\frac{1}{\text{tang. } B}$, & à la place de $\frac{\text{cof. } BC}{\text{fin. } BC}$ fa valeur cot. BC, cette Equation des hauteurs.

analogie a été employée pour l'équat. des hauteurs (929).

3827. $dB : dBC$: : cot. AB — cof. B. cot. BC : fin. B, en multipliant la formule précédente par fin. B.

3828. $dB : dBC$: : cof. AB. fin. B — cot. A cof. B : fin. AB, en mettant dans l'article 3822, à la place de cof. C la feconde valeur de l'art. 3718.

3829. Si $AC = 90°$, $dB : dBC$: : cot. C. fin. B : fin. A.

Si au lieu d'un des angles B oppofé au côté conftant AC, l'on confidère l'autre angle C oppofé au côté conftant AB, l'on aura de même les analogies fuivantes.

3830. $dC : dBC$: : 1 : fin. BC. tang. B.

3831. $dC : dBC$: : cot. B : fin. BC.

3832. $dC : dBC$: : cof. B : fin. A. fin. AC.

3833. $dC : dBC$: : cot. B. fin. C : fin. AB. fin. A

3834. $dC : dBC$: : $\frac{\text{cot. } AC}{\text{fin. } C} - \frac{\text{cot. } BC}{\text{tang. } C}$: 1.

3835. $dC : dBC$: : cof. AC. fin. C — cof. C. cot. A : fin. AC.

3836. Si $AB = 90°$, $dC : dBC$: : cot. B. fin. C : fin. A.

3837. *Si deux côtés font conftans, tels que* AB, AC
Fig. 328. (Fig. 328), *les différentielles des angles oppofés aux côtés conftans font entre elles comme les tangentes de ces mêmes angles.*

Démonstration. Les finus des angles oppofés à des côtés conftans font en raifon conftante, ainfi les différentielles de ces finus font dans le même rapport que les finus eux-mêmes (3296), c'eft-à-dire, que d fin. B : d fin. C : : fin. B : fin. C, mais d fin. $B = dB$. cof. B (3307), & d fin. $C = dC$. cof. C; donc dB. cof. $B : dC$. cof. C : : fin. B : fin. C, & $dB : dC$: : $\frac{\text{fin. } B}{\text{cof. } B} : \frac{\text{fin. } C}{\text{cof. } C}$: : tang. B : tang. C.

3838. $dB : dC$: : tang. B : tang. C.

3839. $dB : dC$: : fin. B. cof. C : fin. C cof. B, parce que tang. B : tang. C : : $\frac{\text{fin. } B.}{\text{cof. } B.} : \frac{\text{fin. } C}{\text{cof. } C.}$

3840. $dB : dC$: : fin. AC. cof. C : fin. AB. cof. B, car tang. B : tang. C : : $\frac{\text{fin. } B}{\text{cof. } B} : \frac{\text{fin. } C}{\text{cof. } C}$, & fin. B : fin. C : : fin. AC : fin. AB.

3841. *Si deux angles sont supposés constans, la différentielle du côté compris entre les deux angles constans sera à la différentielle d'un des autres côtés comme le sinus du troisiéme angle est au produit du sinus de l'angle opposé à ce côté & du cosinus du troisième côté.* Deux angles constans.

Démonstration. Supposons le triangle *ABC* (*fig.* 326), dont les angles *A* & *B* sont constans, ayant décrit le triangle polaire *EFD* (3663), l'on aura les côtés *FE* & *FD* constans ; alors la différentielle de l'angle compris *F* est à celle de l'angle *D*, comme le sinus du troisième côté *ED* est au produit du sinus du côté *EF* & du cosinus du troisième angle *E* (3797). Substituant dans cette proportion les quantités qui correspondent à chaque terme dans le triangle *ABC*, on aura la proportion cherchée. *Fig.* 326.

3842. C'est-à-dire, $dAB : dBC :: \text{sin. } C : \text{sin. } A . \text{cos. } AC$. Nous avons fait usage de cette proportion pour trouver le mouvement des nœuds des planètes (1352), & pour le changement des étoiles en longitude (2729). Usages de cette analogie.

3843. $dAB : dBC :: \text{sin. } AB : \text{sin. } BC . \text{cos. } AC$, parce que $\text{sin. } C : \text{sin. } A :: \text{sin. } AB : \text{sin. } BC$.

3844. Si $A = 90°$.... $dAB : dBC :: \text{sinus } C : \text{cos. } AC$; il suffit d'effacer sin. *A* dans l'art. 3842. Nous avons fait usage de cette analogie pour l'équation du temps (971).

3845. Si $A = 90°$.... $dAB : dBC :: \text{sin. } B . \text{sin. } AB : \frac{1}{2} \text{sin. } 2 AC$, car $\text{sin. } AB : \text{sin. } BC . \text{cos. } AC :: \text{sin. } AB : \frac{\text{sin. } AC . \text{sin. } A}{\text{sin. } B} . \text{cos. } AC$ (3715), & effaçant sin. *A*, qui est = 1, comme $\text{sin. } B . \text{sin. } AB : \text{sin. } AC . \text{cos. } AC$ ou $\frac{1}{2} \text{sin. } 2 AC$ (3625).

3846. Si au lieu du côté *BC* on considère le côté *AC*, l'on aura par la même raison :

$dAB : dAC :: \text{sin. } C : \text{sin. } B . \text{cos. } BC$.

3847. $dAB : dAC :: \text{sin. } AB : \text{sin. } AC . \text{cos. } BC$.

3848. *Si deux angles* A & B (Fig. 326), *sont constans, la différentielle du côté* AB *compris entre ces deux angles est à la différentielle de l'angle* C *opposé à ce côté compris* AB, *comme le rayon est au sinus d'un des côtés* BC *mul-* *Fig.* 326.

tiplié par le sinus de l'angle constant B *adjacent à ce côté.*

DÉMONSTRATION. Ayant décrit le triangle polaire *EFD* (3663), dans lequel *FE* supplément de l'angle *A*, & *FD* supplément de l'angle *B* seront constans ; on aura cette proportion (3813), la différentielle de l'angle *F* compris entre les deux côtés constans est à la différentielle de son côté opposé *ED*, comme le rayon est au sinus d'un des angles *D* multiplié par le sinus du côté constant *FD* contigu à cet angle ; & substituant dans cette proportion les supplémens pris dans le triangle *ABC*, elle se changera en celle-ci : la différentielle de *AB* est à celle de l'angle *C* comme le rayon est à sin. *BC*. sin. *B*.

3849. Donc $dAB : dC :: R : \text{sin.}\, BC.\, \text{sin.}\, B$. Nous avons emploié cette proportion pour trouver le changement d'inclinaison des orbites planétaires (1378).

3850. $dAB : dC :: R : \text{sin.}\, A.\, \text{sin.}\, AC$, car $\text{sin.}\, B : \text{sin.}\, A :: \text{sin.}\, AC : \text{sin.}\, BC$.

3851. Si $A = 90^\circ$, $dAB : dC :: R : \text{sin.}\, AC$, puisque alors $\text{sin.}\, A = 1$.

Fig. 326. 3852. *Si deux angles* A & B (Fig. 326) *sont constans, la différentielle d'un des côtés* BC *opposé à l'un des deux angles constans* A, *sera à la différentielle du troisième angle* C *comme le rayon est à la tangente de l'autre côté* AC *opposé à l'autre angle constant* B, *multipliée par le sinus du troisième angle* C.

DÉMONSTRATION. Ayant décrit le triangle polaire *EFD* (3663), on aura les côtés *FE* & *FD* constans, donc (3819) $dD : dED :: R : \text{tang.}\, E.\, \text{sin.}\, DE$; & lorsqu'on substituera à la place de l'angle *D* son supplément *BC*, à la place de *ED* son supplément *C*, à la place de *E* le côté *AC*, la proportion deviendra celle qu'il falloit démontrer.

3853. $dBC : dC :: 1 : \text{tang.}\, AC.\, \text{sin.}\, C$.

3854. $dBC : dC :: \text{cot.}\, AC : \text{sin.}\, C$.

3855. $dBC : dC :: R.\, \text{cos.}\, AC : \text{sin.}\, AB.\, \text{sin.}\, B$, en mettant $\frac{\text{sin.}\, AB.\, \text{sin.}\, B}{\text{sin.}\, AC}$ à la place de sin. *C*, & cos. *AC* au lieu de cotang. *AC*. sin. *AC*.

3856.

3856. Si au lieu du côté BC, l'on considère l'autre côté AC opposé à l'autre angle constant, on aura par la même raison.

$dAC : dC :: 1 :$ tang. BC. sin. C.

3857. $dAC : dC ::$ cotang. BC : sin. C.

3858. $dAC : dC ::$ cos. BC : sin. AB. sin. A.

3859. *Si deux angles* A *&* B (Fig. 326), *sont constans, les différentielles des côtés opposés aux angles constans seront entre elles comme les tangentes de ces mêmes côtés.* Fig. 326.

Démonstration. des points A, B, C, comme poles, on décrira à 90° de distance les arcs FE, DF, ED, qui formeront le triangle polaire EFD (3663); les différentielles des angles D & E seront les mêmes que celles des côtés BC & AC, car quand un arc est le supplément de l'autre il ne peut varier d'une quantité quelconque sans que le supplément varie exactement de la même quantité. Or par l'art. 3838, on aura $dD : dE ::$ tang. D : tang. E, d'où suit la proportion suivante qu'il s'agissoit de démontrer.

3860. $dBC : dAC ::$ tang. BC : tang. AC.

3861. Si $A = 90°$, $dBC : dAC :: R$: cos. C; car dans un triang. rect. R : cos. C :: tang. BC : tang. AC (3668).

3862. Je joindrai à ces théorêmes une proposition qui est d'un assez grand usage dans l'astronomie (2567, 3988, &c.); elle a pour objet des quantités qui sont d'un ordre inférieur, c'est-à-dire, beaucoup plus petites que les quantités que nous avons traitées comme infiniment petites; mais il est bien des cas où ces quantités deviennent sensibles, sur-tout lorsqu'on veut donner une étendue de 30 ou 40′ aux variations infiniment petites, dont nous avons parlé dans les articles précédens.

3863. *Dans un triangle rectangle sphérique dont un angle de même que le côté opposé sont très-petits par rapport aux autres côtés, la difference entre l'hypothénuse & le grand côté est égale à la moitié du carré du petit côté multipliée par la cotangente de l'hypothénuse.* Différence entre l'hypothénuse & le côté. Fig. 321.

Soit BAD (*fig.* 321), un triangle sphérique rectangle

en *D*, dont le côté *AD* ſoit comme une ligne droite très-petite ; *DH* & *AH* deux tangentes en *D* & en *A* ; du point *H* où ces deux tangentes rencontrent le rayon de la ſphère prolongé, ou *CEBH*, on décrira par le point *A* un petit arc de cercle *AG*, dont *HA* & *HG* ſont les rayons, dont la petite perpendiculaire *AD* ſera le ſinus, & dont *GD* eſt le ſinus verſe, alors on aura $GD = \frac{AG^2}{2\,AH}$ (3353) ; mais *AH* eſt la tangente de l'arc B*A* ou B*D* & *AG* ne diffère pas de *AD*, donc $DG = \frac{AD^2}{2\,\text{tang.}BD} = \frac{AD^2}{2}\,\text{cot.}BD$. Cela ſuppoſe que les lignes *DG* & *AD* ſont exprimées dans les tables en parties ſemblables, c'eſt-à-dire, ou en décimales du rayon ou en ſecondes, mais les tangentes qu'on prend dans les tables ſont en décimales du rayon, il faut donc auſſi que l'arc *AD* ſoit en décimales ; s'il eſt donné en ſecondes, il faut diviſer AD^2 deux fois par 57° (3359) pour avoir AD^2 en décimales, & après évalué ainſi la formule, il faudra pour avoir *DG* multiplier par 57° ou 206264″, pour le réduire en ſecondes ; ainſi *DG* ou la différence entre l'hypothénuſe *AB* & le côté *DB* du triangle *ADB*, exprimée en ſecondes, eſt $\frac{AD^2.\ \text{cot.}\ BD.}{2.\ 57^\circ.}$.

Réſoudre le Triangle avec la règle & le compas.

3864. La projection ortographique dont nous avons parlé à l'occaſion des éclipſes (1825), eſt très-commode pour réſoudre les triangles ſphériques avec la règle & le compas, à un quart de degrés près ; cette méthode eſt ſouvent fort utile dans l'aſtronomie pour diminuer la longueur des opérations, quand on n'a beſoin que d'une médiocre préciſion, comme cela arrive très-ſouvent.

Projection de la ſphère ſur le méridien. *Fig.* 330.

Pour en comprendre la démonſtration quand on eſt bien accoutumé à la ſphère, il ſuffit des conſidérations ſuivantes. Soit *OM* (*fig.* 330), la méridienne ou le diamètre de l'horizon du nord au ſud ; *CB* l'axe du monde, *B* le pole, *A* le zénit, *AB* la diſtance du pole au zénit,

ou le complément de la latitude ; *KN* est le diamètre d'un almicantarat ou d'un petit cercle parallèle à l'horizon (191) ; *GD* le rayon du parallèle diurne que décrit un astre, dont *GB* est la distance au pole ; considérons cet astre au moment où il répond perpendiculairement au point *F*, sa projection sur le plan du méridien étant en *F*; alors *FH* est le sinus de sa hauteur, *FD* le cosinus de son angle horaire pour le rayon *GD*; *CH* le sinus de son azimut compté du point d'orient sur l'almicantarat ; *CD* le sinus de sa déclinaison, ou le cosinus de sa distance au pole. Si l'on tire le rayon *CG*, la ligne *FE* perpendiculaire à *GD* & la ligne *EL* perpendiculaire a *CEG*, l'arc *GL* sera l'angle horaire, car *FD* étant le cosinus de l'angle horaire pour le rayon *GD*, on aura *CE* égale au cosinus du même angle pour le rayon *CG* qui est le rayon du cercle *OGM*, donc l'arc *GL* est l'angle horaire. De même si l'on tire *CK* & qu'on porte *CR* le long de *CT*, on aura le cosinus de l'azimut sur le grand cercle. Concevons un triangle triangle formé au pole, au zénit, & au soleil, que j'appellerai *PZS*, comme dans les *fig.* 35, 42, 89, &c. ces trois côtés sont *PZ*, *ZS*, *SP* ; or *PZ* est représenté dans la *fig.* 330 par *BA*; *ZS* y est représentée par *AK*, *SP* y est représenté par *BG*, l'angle *P* par *GL*, & l'angle *Z* a son cosinus exprimé par *CT*; ainsi il n'est pas bien difficile de ramener tous les cas des triangles sphériques à la figure 330.

3865. Connoissant *deux côtés & l'angle compris, trouver le troisième côté & l'un des autres angles.* On décrira un demi-cercle *OAM*, (*fig.* 330), dont *C* est le centre, *Fig.* 330.
A le sommet ; on prendra l'arc *AB* égal au côté adjacent à l'angle cherché, *BG* égal au côté opposé à l'angle cherché, *GL* égal à l'angle donné, compris entre ces deux côtés ; on tirera le rayon *CB* & la perpendiculaire *GD*, le rayon *CG* & *LE* perpendiculaire sur *CG* ; par le point *E* on tirera *EF* perpendiculaire sur *GD*, & par le point *F* la ligne *KIN*, parallèle au diamètre *OCM*, celle-ci coupera les arcs *KA* ou *NA* égaux au côté cherché opposé à l'angle qui est exprimé par *GL*. C'est une suite naturelle des

Fig. 330. principes de la ſphère ; car ſi *B* eſt le pole, *A* le zénit ; *GD* le rayon du parallèle d'un aſtre, *OK* ſa hauteur, *KN* le diamètre de ſon almicantarat, l'aſtre répondra perpendiculairement au point *F*, *FD* ſera le coſinus de l'angle horaire pour le rayon *DG*, & *CE* pour le rayon *CG* ; ainſi l'arc *GL* ſera l'angle *P* du triangle *PZS* ſi ſouvent employé dans ce livre, en ſuppoſant $AK = PS$, $AB = PZ$, $BG = PS$.

Pour avoir l'angle qui eſt oppoſé au côté exprimé par *BG*, ou adjacent au côté repréſenté par *AB*, on tirera au point *K* la ligne *CRK*, & par le point *F* la ligne *IFH* perpendiculaire à *CO*, le point d'interſection de *CK* & de *IH* ſera en *R* ; on prendra $CT = CR$, & ayant élevé la perpendiculaire *TV* on aura l'arc *VO* égal à l'angle cherché. Cela ſerviroit à trouver l'azimut ou l'angle *Z* dans le triangle *PZS*.

3866. Lorſqu'on connoît les trois côtés, on peut trouver de même un des angles, en prenant *AB*, *BG*, & *AK* égaux aux trois côtés du triangle, *AK* repréſentant le côté oppoſé à l'angle cherché ; on tirera les lignes *CB*, *GD*, *CG*, *KN*, *FE*, *EL*, & l'on aura *GL* pour la meſure de l'angle cherché, oppoſé au côté dont *AK* eſt la valeur. On trouvera ci-après (3992) un exemple utile de ces opérations graphiques dans la méthode des longitudes ; ſoit pour avoir l'heure en mer, ſoit pour trouver les angles à la lune & à l'étoile, qui donnent les corrections dépendantes de la parallaxe & de la réfraction. Je vais en donner ici un autre exemple, qui peut être d'uſage pour un aſtronome.

3867. *Connoissant la longitude & la latittude d'un aſtre, trouver ſon aſcenſion droite & ſa déclinaiſon.* Il s'agit
Fig. 223. de réſoudre le triangle *PES* (*fig.* 223), dans lequel on connoît l'angle *E* formé au pole de l'écliptique avec *EP*
Fig. 330. & *ES* (2705) ; on prendra *AB* (*fig.* 330) égal à l'obliquité de l'écliptique $= 23° \frac{1}{2}$; *BG* égal à la diſtance de l'étoile au pole boréal de l'écliptique, & *GL* égal au complément de la diſtance à l'équinoxe le plus prochain, comptée ſur l'écliptique, c'eſt-à-dire, égal à la diſtance de l'aſtre

au colure des solstices prise par le plus court chemin; ayant tiré les lignes *CB*, *CG*, *GD*, *LE*, *EF*, *KFN*, *IFH*, *CK*, on aura *OK* égal à la déclinaison cherchée, qui sera boréale quand le point *K* sera au-dessus du point *O*. On prendra $CT = CR$, & ayant élevé la perpendiculaire *TV*, l'arc *AV* sera l'ascension droite cherchée, ou plutôt la distance au plus prochain équinoxe; puisque c'est le complément de l'angle *P* du triangle *PES* (*fig.* 223), dont les trois côtés sont représentés *AB*, *BG* & *AK* le côté qu'exprime *BG* lui étant opposé. Si le point *F* étant au-dessus du point *D*, le point *T* se trouve par rapport au centre *C* du même côté que le point *B*, c'est une preuve que l'ascension droite & la longitude sont de différens côtés par rapport à l'équinoxe duquel on est parti, lorsqu'on a pris *GL* égal au complément de la distance à l'équinoxe le plus voisin; c'est le cas de l'art. 904.

Des Projections et des Cartes Géographiques.

3868. Lorsqu'on veut représenter sur un plan une portion du globe (234), on éprouve une difficulté qui vient de la différence essentielle entre une surface courbe & un plan. Il est même impossible que la situation respective des différens points d'une carte soit la même que dans un globe, en prenant des longitudes & des latitudes pareilles; mais on s'efforce d'en approcher. Les plus anciennes cartes étoient projettées fort grossiérement; les méridiens étoient des lignes droites parallèles & égales entre elles, & les degrés de longitudes égaux par-tout aux degrés de latitude : c'est ce qu'on appelle des *Cartes plates*. Plusieurs auteurs remarquerent le défaut de cette imitation; Ptolomée lui-même, ensuite Martin Cortèse, Pierre Nonius, Coignet; & l'on a cherché à y remédier par le moyen de différentes projections (1823), on peut voir sur les projections en général Guide Ubalde, Clavius,

Aguillon, Tacquet, & M. de la Caille dans les *Mémoires de* 1744.

3869. La projection la plus simple de toutes est la projection *Ortographique* (1823), mais elle est très-défectueuse pour les cartes d'une certaine étendue, parce que les sinus verses devenant très-petits vers les bords de l'hémisphère, les arcs y sont représentés par de trop petites lignes : on ne s'en peut servir que pour les cartes des régions circompolaires, ou pour les pays qui ont peu d'étendue.

3870. La forme la plus commode pour les cartes qui doivent contenir une grande partie du globe, & surtout pour les Mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continens, est la *Projection Stéréographique* (1824); c'est celle dont Ptolomée s'est servi dans son astrolable, on en voit un exemple dans la Mappemonde de la *fig.* 133 (*Planche XV*), on s'en sert également dans les planisphères célestes. Les quatre parties du Monde de M. de l'Isle, & beaucoup d'autres cartes importantes, sont faites sur cette projection; les méridiens & les parallèles y sont représentés par des cercles qui se coupent à angles droits comme sur le globe, mais les distances linéaires y sont toutes diminuées ou raccourcies, excepté seulement à la circonférence de la projection. Les degrés aux environs du centre de la carte sont réduits à la moitié; ensorte que les surfaces qui devroient être les mêmes, comme sur le globe, y sont quatre fois moindres que sur les bords.

On suppose que l'œil est placé à la circonférence même du globe dans la partie supérieure, & qu'il regarde l'hémisphère inférieur en rapportant tous les points de cet hémisphère sur le plan du grand cercle, perpendiculaire au diamètre sur lequel l'œil est placé.

3871. Par exemple, l'astrolable de Ptolomée ou l'astrolable polaire est une projection du globe faite sur un plan parallèle à l'équateur, par des lignes tirées d'un des poles; les méridiens y deviennent des lignes droites;

mais dans les Mappemondes le plan de projection est le premier méridien, l'œil est supposé dans l'équateur à 90° de longitude pour le continent de l'Amérique, & à 270° pour l'ancien continent. M. Robert de Vaugondy a fait des cartes de Russie, où l'œil est supposé au pole, & dont le plan de projection est l'équateur; alors tous les parallèles sont concentriques, & les méridiens sont des lignes droites, divisées inégalement.

3872. Soit l'œil placé en *Q* (*fig.* 317), *BD* le diamètre du cercle de projection, *BFD* le demi-cercle, qu'il s'agit de projetter sur le diamètre *BD*; on conçoit des rayons visuels menés de l'œil *Q* aux différens points de cette concavité; ils rencontrent le diamètre *BD* en autant de points, qui en sont les projections. Du milieu *F* de la projection soit pris un arc *FR* de 40°, dont la projection est *CG*, l'angle *CQG* sera de 20°, c'est-à-dire, la moitié de l'arc *FR*, & puisque *QC* est le rayon du cercle, *CG* sera égal à la tangente de 20° : ainsi *dans la projection stéréographique un arc compté du centre, a pour projection la tangente de la moitié de l'arc.*

Propriétés de cette projection.

Fig. 317.

3873. La plus belle propriété de la projection stéréographique consiste à représenter par des cercles tous les cercles de la sphère, grands ou petits, & nous avons fait usage de cette propriété pour les passages de Vénus (2111). Soit un arc *RF* dans une position quelconque, sur lequel nous concevrons un petit cercle de la sphère qui ait pour diamètre *FR*, & qui soit la base d'un cône oblique scalène *FQR*; je dis que la section *CG* de ce cône par le plan de projection, sera encore un cercle. Les triangles *QFR*, *QCG* sont semblables; car ayant tiré *HR* parallèle à *BD*, on aura l'arc *QDR* égal à l'arc *QBH*, la moitié de *QDR* sera la mesure de l'angle *QFR*, la moitié de l'arc *QBH* sera la mesure de l'angle *QRH*, ou de son égal *QGB*, donc l'angle *QGC* est égal à l'angle *QFR*; les triangles *QCG*, *QFR* ont encore un angle commun en *Q*, donc ils sont parfaitement semblables, de même que les cônes dont ils sont les sections; donc la base du cône *QFR* étant un cercle, la

Tous les cercles du globe paroissent des cercles sur cette projection.

baſe du cône *QCO* eſt également circulaire, quoique d'une grandeur fort différente; on verroit, en faiſant d'autres figures ſemblables avec les mêmes lettres, que la grandeur de *FR* & ſa ſituation, même dans le demi cercle ſupérieur *BQD* ne change rien à la vérité de cette propoſition. Ainſi *dans la projection ſtéréographique tous les cercles du globe, quelle que ſoit leur poſition, ſont repréſentés par des cercles.*

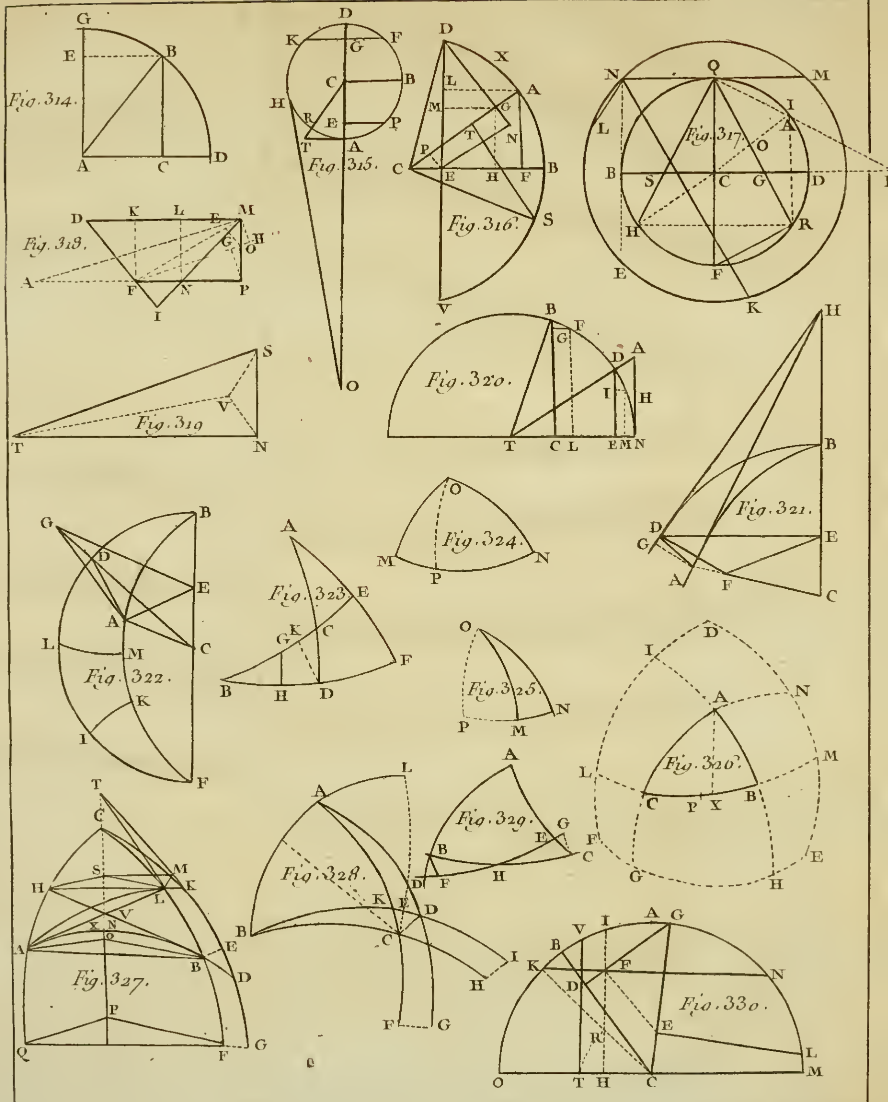
Rayon d'un méridien.

3874. Les méridiens dans cette projection ſont des cercles qui ſont d'autant moins courbes, c'eſt-à-dire, dont les diamètres ſont d'autant plus grands, que l'on ſe rapproche du centre; pour connoître la valeur de leurs diametres, ſoit la longitude *BH* ou *DI*, d'un méridien qui paſſe par les points *H* & *I* diamétralement oppoſés; la projection du demi-cercle *HRI*, ſera la ligne droite $SP = SC + CP$; *SC* eſt la tangente de la moitié de *HF*, ou de la moitié du quart-de-cercle *BF*, moins la moitié de la longitude *BH*; *PC* eſt la tangente de la moitié de l'arc *FI*, ou de 45° plus la demi-longitude; ainſi prenant la moitié de *SP*, uo la moitié de la ſomme de ces deux tangentes, l'on en inſère aiſément cette règle générale: *Le rayon d'un méridien dans la projection ſtéréographique eſt égal à la demi-ſomme de la tangente & de la cotangente de la différence entre 45° & la demi longit. de ce méridien.* Par exemple, le rayon du méridien qui paſſe à 80° de longitude, ſera la moitié de la ſomme des tangentes de 5° & de 85°; celui du méridien qui a 60° de longitude, ſera la demi-ſomme des tangentes de 15° & de 75°, qui en eſt le complément.

Fig. 317.

Rayon d'un parallèle.

3875. La projection d'un parallèle à l'équateur devant être un cercle, il nous eſt aiſé d'en déterminer le diamètre. Soit *IR* le diamètre du parallèle, *QF* celui de l'équateur, le point *R* aura pour projection le point *G*, & *CG* eſt la tangente de la moitié de la latitude *FR* ou de l'angle *FQR*, égal à l'angle *MQP*, le point *I* a pour projection le point *P*, & *CP* eſt égale à la tangente de l'angle *CQP* qui eſt le complément de *MQI* ou *RQF*, ainſi *CP* eſt la cotangente


Fig. 314.
Fig. 315.
Fig. 316.
Fig. 317.
Fig. 318.
Fig. 319
Fig. 320.
Fig. 321.
Fig. 322.
Fig. 323.
Fig. 324.
Fig. 325.
Fig. 326.
Fig. 327.
Fig. 328.
Fig. 329.
Fig. 330.

cotangente de la moitié de la latitude, & la différence *GP* sera le diamètre du parallèle. Ainsi le rayon d'un parallèle à l'équateur sur la projection stéréographique est égal à la moitié de la différence entre la cotangente & la tangente de la moitié de la latitude.

3876. L'horizon d'un lieu quelconque rapporté sur un planisphère céleste étant aussi un cercle, l'on peut le tracer pour servir à trouver le lever le coucher des astres sur le planisphère mobile. Pour trouver le rayon de ce cercle, soit *Q* le pole du monde, où l'œil est supposé fixe dans la projection stéréographique des planisphères; *ICH* l'horizon du lieu donné, dont les extrémités se rapportent en *S* & en *P* sur le plan de projection; la ligne *SP* est le diamètre de l'horizon, elle est composée de deux parties *CS* & *CP* qui sont la tangente & la cotangente de la moitié de la latitude. Pour Paris le demi-diamètre est de $132\frac{1}{2}$ en supposant le rayon de 100, ou de $397\frac{1}{2}$ en supposant le rayon de 300, comme M. Robert de Vaugondy dans la description de ses hémisphères, il a donné une table des rayons de l'horizon pour différentes latitudes où il s'est glissé quelques petites fautes; en voici une autre qui suppose le rayon de 10000 parties; on y voit que le rayon est infini pour les pays situés sous l'équateur, parce que leur horizon est un méridien, & que dans nos planisphères tous les méridiens sont des lignes droites qui se coupent au pole. Pour faire usage de cette espèce d'horizon, il faut le former en carton, mettre son centre au point du méridien qui marque la latitude du lieu sur le planisphère.

Latit.	Rayons.
0	Infini.
10	57588
20	29238
30	20000
40	15557
50	13054
60	11547
90	10000

3877. M. de la Hire proposa une autre projection immobile où les divisions sont moins inégales, l'œil étant supposé à $\frac{7}{20}$ du diam. ou à une dist. du plan de projection égale au sinus de 45°. (*Hist. de l'acad.* 1701, *pag.* 98).

3878. Les cartes réduites, c'est-à-dire, les cartes marines de Wright ou de Mercator sont les plus Cartes réduites.

utiles qu'il y ait, à cause de leur usage pour la navigation; on peut en regarder l'invention comme une des découvertes importantes du 15e siècle. Gérard Mercator publia vers l'an 1550 une carte, ou les degrés de latitude alloient en augmentant vers les poles, mais il n'en expliqua point les principes; ce fut Edward Wright, Anglois qui vers l'an 1590 découvrit les vrais principes sur lesquels ces cartes devoient être construites, il en fit part à Jodocus Hondius, Graveur, qui s'en attribua l'invention, mais elle fut revendiquée en 1599 par Wright, dans son livre intitulé : *Correction of errors in navigation*, où il rend justice d'ailleurs à Mercator.

Dans ces cartes réduites les degrès de longitude sont supposés tous égaux; mais pour que les degrés de latitude soient dans un juste rapport aux degrés de longitude, on les augmente en raison inverse des cosinus, ou en raison directe des sécantes des latitudes, ensorte qu'à 60° de latitude où les degrés des parallèles devroient être la moitié seulement de ceux de l'équateur, les degrés de latitude sont doublés, & les degrés des parallèles restent les mêmes. Par ce moyen les rumbs de vent sont représentés sur ces cartes par des lignes droites, car les méridiens étant parallèles ils sont tous coupés sous le même angle, & c'est une extrême commodité pour les opérations du pilotage.

3879. Pour faciliter la construction de ces cartes, on a calculé des tables des latitudes croissantes, en Anglois *Tables of meridional parts*, que l'on peut voir dans les traités de navigations, par exemple, celui de M. Bouguer (édition de M. de la Caille, imprimé en 1760 & 1769). Cette table suppose que les degrés de longitudes soient par tout de 60′ de l'équateur, & l'on y trouve pour chaque degré de latitude la longueur du méridien comptée depuis l'équateur, en supposant que tous ses degrés ont augmenté comme les sécantes des latitudes. Par exemple, pour 60° on trouve 4527, c'est la longueur de la ligne droite qui représente les 60 premiers degrés du méridien, en supposant que le premier degré soit de 60 parties, &

le dernier de 120. Ainſi chaque nombre de la table des latitudes croiſſantes, n'eſt que la ſomme des ſécantes, en ſuppoſant 10 pour le ſinus total, & retranchant 10 de la ſomme, pour qu'elle ſoit zéro au point de départ. On objecte aux cartes réduites que les pays y paroiſſent plus larges qu'ils ne ſont ſur le globe, dès qu'on s'éloigne de l'équateur; mais les ſituations reſpectives qu'ils ont entre eux n'y ſont point altérées; il n'y a que l'échelle changée qui augmente à meſure qu'on approche des poles.

M. Halley a donné une règle fort élégante pour trouver les arcs du méridien qui forment la table des latitudes croiſſantes, ſans additionner les ſécantes, *Philoſ. tranſ. n°.* 219. M. Robertſon en a donné une démonſtration, *Philoſ. tranſ. n°. 496*; en voici une très-ſimple, pour laquelle il ſuffira de ſe rappeller les principes ſuivans.

1°. Lorſque les différences ou les petits accroiſſemens d'une ſuite de quantités ſont dans le même rapport que les quantités elles-mêmes, c'eſt une preuve qu'elles croiſſent en progreſſion géométrique, & que leurs logarithmes croiſſent uniformément.

2°. Quand on a deux ſuites de quantités qui croiſſent uniformément ou en progreſſion géométrique, il ſuffit d'avoir la première différence de chaque ſuite, pour avoir toutes les autres.

3°. Quand on veut faire route vers le nord-eſt, ou à 45° de la méridienne, en coupant tous les méridiens ſous un angle de 45°, on eſt obligé de ſuivre une courbe appellée *Loxodromie* ([a]) de 45°; & ſi l'on avance uniformément en longitude, les accroiſſemens de latitudes iront toujours en diminuant, à proportion que les degrés des parallèles diminueront, de même que ſi l'on avançoit également en latitude, on auroit des différences de longitudes qui iroient en croiſſant, parce qu'un égal progrès ſur les parallèles donne une plus grande augmentation de longitude ſur l'équateur quand le parallèle eſt plus petit. Loxodromie.

([a]) *λοξος oblique, δρόμος courſe*, c'eſt une route oblique à la méridienne, mais qui eſt par-tout de la même obliquité, & forme une eſpèce de ſpirale autour du pole.

Règle de Halley.

Pl. XLII. Fig. 335.

3880. *Les parties du méridien dans les cartes réduites ſont exprimées par les différences des logarithmes, des tangentes des demi-complémens des latitudes.* Soit *P* le pole (*fig.* 335), *FI* un petit changement de latitude qui répond à 1° de changement en longitude ſur l'équateur; *FI* eſt égal à la longueur du degré du parallèle correſpondant, parce que ſous le rumb de 45° on fait autant de chemin vers l'orient que vers le nord; ayant tiré la ligne *AI* de l'extrémité du diamètre on aura $FO = FI$; car dans le triangle *FOI* les angles *I* & *O* ſont égaux, étant meſurés l'un par la moitié de l'arc *IA*, l'autre par la moitié d'un arc égal dans le demi-cercle oppoſé. Puiſque *FI* & *FO* ſont égales au degré du parallèle, ce degré *FO* eſt à ſon rayon *FG* comme un degré de l'équateur eſt au rayon de la ſphère; mais $FO : FG :: MR : MC$, donc *MR* eſt à *MC* en raiſon conſtante. Puiſque *AC* eſt le rayon de la ſphère, *CM* eſt la tangente de l'angle *CAM* ou de la moitié de l'arc *PF*, c'eſt-à-dire, du demi-complément de la latitude; donc l'accroiſſement *RM* de la tangente étant à cette même tangente en raiſon conſtante, les logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes croîtront uniformément, auſſi bien que les différences de longitude le long de l'équateur, que nous avons ſuppoſées uniformes; donc la différence des logarithmes fera trouver en tout temps celle des longitudes.

En allant de 0° à 1° de latitude, on a les demi-complémens des latitudes 45° & 44° 30′, dont les logarithmes tang. diffèrent de 7580, ce qui fait 126 pour chaque minute de longitude; ainſi l'on pourra dans tous les cas prendre la 126e partie de la différence des logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes pour avoir le nombre de minutes dont on aura avancé en longitude ſur l'équateur, en ſuivant la loxodromie de 45°.

Mais ces progrès en longitude qui vont en augmentant quand on avance uniformément en latitude ſont dans le même rapport que les augmentations des degrés de latitude dans les cartes réduites, donc les parties du méridien dans ces cartes ſont exprimées par les différences des

logarithmes tang. des demi-complémens des latitudes.

3881. Les méthodes particulières employées par les géographes dans les cartes ordinaires sont fort différentes entre elles ; mais toutes ont le défaut de représenter mal les distances respectives des lieux ; & la plupart ont encore celui de ne pas avoir les méridiens perpendiculaires aux parallèles de latitude, ensorte qu'un espace de la terre qui est un quadrilatere rectangle y est souvent représenté par un rhomboïde obliquangle, dont les diagonales sont fort éloignées de l'égalité ; cependant on ne laisse pas de mettre des échelles fixes pour les distances, quoique toutes ces distances soient variables.

3882. Il y a pourtant des cartes ou l'on a évité ce dernier inconvénient, telles sont les cartes de Schenk à Amsterdam, la *Germania Critica* du Professeur Mayer, plusieurs cartes de Senex, de M. Buache, de M. Robert de Vaugondy, &c. Dans ces cartes les méridiens sont représentés par des lignes droites convergentes vers un point, duquel comme centre l'on décrit les parallèles à l'équateur ; on trouve une règle pour décrire ces cartes dans la préface du petit Atlas de Berlin. M. Buache s'en est servi dans plusieurs cartes ; c'est moins une projection qu'un développement du cône que l'on suppose être circonscrit à la sphère, & la toucher sur le parallèle moyen.

3883. Pour avoir une forme où la figure des pays soit plus approchante de la figure du globe, dans des cartes qui doivent renfermer une étendue considérable du globe, comme 30 ou 40 degrés, M. Bonne, très-habile géographe emploie la méthode suivante ; il s'en est servi pour l'Empire de Russie, & pour ses autres cartes qui se trouvent à Paris, chez Lattré, Graveur. Les degrés de latitudes y sont égaux, les parallèles à l'équateur y sont représentés par des cercles concentriques dont le centre est au point où la tangente moyenne rencontre l'axe de la terre, ensorte que les cartes sont le développement d'un cône circonscrit à la sphère, & qui la toucheroit sur la circonférence du parallèle qui occupe le milieu de la carte. Le parallèle de 50° de latitude est représenté sur la carte

Cartes particulières.

par un cercle dont le rayon eſt la cotangente de 50° ; & ainſi des autres, qui ſont tous décrits du même centre, & à des diſtances égales.

3884. Il s'agit ſur-tout de ſavoir quel arc il faut prendre ſur ce cercle de la carte pour exprimer un degré du parallèle terreſtre qu'il repréſente ; on le trouve en multipliant un degré ou 60′ par le ſinus de la latitude. Fig. 336. En effet, ſoit *P* le pole de la terre (*fig.* 336), *D* le point qui eſt ſitué à 50° de latitude, enſorte que *DB* eſt le coſinus de 50°, & *DT* la cotangente ; le parallèle dont *DB* eſt le rayon eſt plus petit que le cercle dont le rayon eſt *TD*, dans le même rapport que *BC* eſt plus petit que *TD*, ainſi un degré ou 60′ du parallèle occupera ſur le cercle de la carte, dont *TD* eſt le rayon, un arc égal à 60′ $\frac{BD}{TD} = \frac{60' \text{ coſ. lat.}}{\text{cotang. lat.}} = 60^\circ$ coſ. lat. tang. lat. = 60′ ſin. latit., c'eſt-à-dire, 46′ pour 50° de latitude. En général, deux méridiens diſtans en longitude d'une quantité *m* forment entre eux un angle égal à *m*. ſin. latit.

3885. Ainſi l'on voit que 46′ du cercle dont *TC* eſt le rayon, & qui doit repréſenter ſur la carte le parallèle de 50°, font la valeur d'un degré de longitude, par conſéquent 5° de longitude font 3° 50′ du cercle de la carte, de même 10° font 7° 40′, & 15° font 11° 30′, &c. On a ſouvent beſoin de décrire ce cercle ſans en avoir le centre ; pour cela on prendra 5° du méridien pour ſinus total, on les multipliera par le coſinus de 50°, & l'on aura 3° 13′ pour la valeur de 5° ſur le parallèle de 50°. Ainſi l'on prendra 3° 13′ du méridien pour faire 5° du parallèle ; on les portera ſur une ligne droite perpendiculaire au méridien. L'on diviſera cet eſpace en 67 parties (c'eſt la tangente de 3° 50′) ; on en prendra 2 $\frac{1}{4}$ au-deſſus, (c'eſt l'excès de la ſécante de 3° 50′ ſur le rayon), l'on aura un des points du parallèle de 50°. On portera ſur la même perpendiculaire au méridien 6° 26′ du méridien pour faire 10° du parallèle, on diviſera cet eſpace en 134°$\frac{1}{3}$ (tangente de 7° 40′ valeur des 10° de longitude) ; on prendra 9 de ces parties au-deſſus de la perpendiculaire & l'on aura

un nouveau point du parallèle. De même pour 15°, on portera 9° 39′ du méridien, la tangente de 11° 30′ étant 303 ½ & la partie extérieure de la sécante = 20 ½, l'on cherchera un 4[e] point, & ainsi des autres. Quand on a ainsi plusieurs points d'un cercle, on peut le décrire sans en avoir le centre, en prenant une règle flexible, dont on augmente la convexité par le moyen d'une vis, jusqu'à ce qu'elle s'applique sur tous les points marqués. Si la carte est assez petite pour qu'on veuille supposer les méridiens rectilignes, il ne s'agit que de les tirer tous vers le même centre par les divisions des parallèles, mais pour avoir sur toute l'étendue de la carte une même échelle, on préfère de prendre sur les autres parallèles des intervalles qui diminuent comme les cosinus des latitudes, & l'on a ainsi sur ces parallèles divers points par lesquels on fait passer les méridiens, avec la règle courbe & élastique.

Règle courbe & élastique.

M. Murdoch a donné une méthode pour calculer ce développement du cône, de manière que la surface conique soit égale à la surface de la zone sphérique représentée sur la carte ; il faut pour cela que le cône au lieu de toucher la sphère la coupe dans son intérieur. (*Philos. trans.* 1758).

3886. Flamsteed a employé dans son Atlas céleste (732) une autre forme de projection ; il suppose que les parallèles à l'équateur y soient représentés par des lignes droites & parallèles entre elles, dont les degrés soient, (aussi bien que dans la sphère), proportionnels aux sinus des distances au pole, les méridiens y prennent la forme de la courbe des sinus, dont Wallis parla autrefois dans son Traité de la Cycloïde ; les cercles de latitudes & les parallèles à l'écliptique, y prennent en certains endroits des figures assez bisarres, mais on les tire facilement par le moyen des degrés d'ascension droite & de déclinaison, qui répondent à chaque degré de longitude & de latitude. Si l'on imagine le globe couvert de fils pliés sur les parallèles à l'équateur, qu'on y trace les constellations, & qu'on développe les fils sur un plan, l'on aura la projection de

Flamsteed, (*Hist. cœlest. Proleg. pag.* 159). Il y a des cartes géographiques où l'on s'en est servi.

Fuseaux des globes. *Fig.* 337.

3887. Pour former les globes célestes & terrestres (169), on est obligé de faire graver des *fuseaux* (*fig.* 337) qui sont aussi une espèce de projection, ou un développement du globe, semblable à celui que nous venons d'expliquer. La longueur *PC* de l'axe de cette courbe est égale au quart de la circonférence du globe; les intervalles des parallèles sur l'axe *PC* sont tous égaux, les rayons des cercles *KDI* qui représentent les parallèles sont égaux aux cotangentes des latitudes (3883), & les arcs de chacun comme *DI* sont égaux à peu-près au nombre de degrés de la largeur du fuseau (qui est ordinairement de 30°), multipliés par le sinus de la latitude; ainsi, l'on ne trouveroit aucune difficulté à les tracer; mais l'embarras vient du changement qu'éprouvent les fuseaux quand on les colle sur le globe, & de la quantité dont il faut faire prêter le papier, moins sur les côtés qu'au milieu, parce que les côtés sont plus longs, pour l'ajuster précisément à l'espace qu'il doit couvrir.

3888. La méthode usitée parmi les ouvriers pour tracer les fuseaux, & qui est décrite par Bion (*Usage des globes*, L. III.); & par M. Robert de Vaugondy, au 7e tome de l'Encyclopédie, est peu géométrique, mais elle est suffisante dans la pratique, on tire sur le papier une ligne *AC* égale à la corde de 15°, pour faire la demi-largeur du fuseau, & une perpendiculaire *CP* égale à trois fois la corde de 30°, pour faire la demi-longueur; car ces papiers, dont les dimensions seront égales aux cordes, deviennent égaux aux arcs même, lorsqu'on les colle sur le globe.

On divise la hauteur *CP* en 9 parties, si l'on veut tirer les parallèles de 10 en 10 degrés; on divise aussi le quart-de-cercle *BE* en 9 parties égales; par chaque point de division tel que *G* du quart-de-cercle, & par le point correspondant *D* de la ligne droite *CP* l'on tire des perpendiculaires *HGF* & *DF*, dont la rencontre en *F* donne un

un des points de la courbe *BFP* qui terminera la circonférence du fuſeau. Quand on a trouvé ainſi un aſſez grand nombre de points on trace le contour *PIB* avec une règle courbe. Par cette conſtruction l'on donne au fuſeau des largeurs qui ſont comme ſur le globe en raiſon des coſinus des latitudes ; on ſuppoſe ces largeurs priſes perpendiculairement à *CD*, ce qui n'eſt pas bien exact, mais il eſt impoſſible de preſcrire une opération rigoureuſe pour faire un plan qui puiſſe couvrir une ſurface courbe, & qui ſur une ligne droite *AB* faſſe des lignes *PA*, *PC*, *PB* égales entre elles, comme elles doivent l'être ſur le globe. Pour décrire le cercle *KDI* qui eſt à 30° de l'équateur, il faut prendre au-deſſus de *D* un point qui en ſoit éloigné de la valeur de la tangente de 60° priſe ou dans les tables, ou ſur un cercle égal à la circonférence du globe qu'on veut tracer ; ce point ſervira de centre pour le parallèle *DI* qui doit paſſer au point *D*, car on le ſuppoſe égal à celui d'un cône circonſcrit au globe, & qui le toucheroit au point *D*.

Les méridiens ſe tracent de 10 en 10 degrés en diviſant chaque parallèle comme *KI* en 3 parties aux points *L* & *M*, & tirant depuis le pole *P* par tous ces points de diviſions des courbes qui repréſentent les méridiens intermédiaires entre *PA* & *PB*, comme *BR* & *ST* (*fig.* 338). *Fig.* 338.

L'écliptique *AQ* ſe trace par le moyen de la déclinaiſon connue des différens points de l'équateur, que l'on prend dans une table : pour 10°, elle eſt 3° 58'; pour 20°, 7° 50', = *BQ*; pour 30°, 11° 29'; &c.

3889. En général on obſerve que le papier ſur lequel on fait les cartes, tel que *le colombier*, ſe racourcit de $\frac{1}{72}$, ou d'une ligne ſur ſix pouces, l'un portant l'autre, quand il eſt ſéché après l'impreſſion ; ainſi il faut encore prévenir cet inconvénient dans la gravure des fuſeaux ; ſi malgré cela les fuſeaux ſe trouvent trop courts, on en eſt quitte pour ôter ſur le tour un peu du blanc dont le globe eſt enduit ; on le rend par-là de la grandeur convenable aux fuſeaux que l'on a fait imprimer. Mais ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt qu'en tirant le fuſeau mouillé de Raccourciſſement du papier.

colle pour l'appliquer ſur le globe, l'axe *GH* s'allonge, & le côté *AK* ſe raccourcit, enſorte que ni la longueur du côté *ACK*, ni celle de l'axe *GEH* du fuſeau ne ſont préciſément égales à un quart d'une circonférence de globe, quand on les conſidère ſur le cuivre ou ſur les nombres côtés dans la figure 338.

3890. M. Bonne ayant fait diverſes expériences ſur les dimenſions que prennent des fuſeaux, après qu'on y a mis la colle pour les appliquer ſur le globe, ſur-tout avec le papier du *nom de Jeſus*, qu'il a employé dans ſon globe d'un pied de diamètre, a trouvé qu'il falloit donner aux fuſeaux ſur le cuivre les dimenſions de la fig. 338. En ſuppoſant que le rayon du globe contienne 720 parties, la demi-largeur du fuſeau eſt $AG = 188 \frac{5}{10}$; la diſtance *AC* pour le parallèle de 10° priſe ſur la ligne droite *LM* eſt de 128, 1, le petit écart du parallèle de 10° dans le milieu du fuſeau, où la flèche *ED* eſt de 4; la ligne *ABN* eſt droite, le rayon du parallèle de 10° ou du cercle *CEF* eſt de 4083, & ainſi des autres. La petite calotte circulaire qui ſe place au-deſſous de *H* a pour rayon 253, au lieu de 247 qu'elle auroit, ſi le ſinus de 20° devoit en être le rayon.

Du premier méridien.

3891. Le premier méridien des globes terreſtres, & des cartes géographiques, varie beaucoup ſuivant les pays; j'ai déja parlé de cette diverſité (48), voici quelques détails que j'avois annoncés; on en trouvera de plus conſidérables dans le P. Riccioli (*Geogr. reform. pag.* 385). Pythéas de Marſeille, au rapport de Strabon (L. I.) regardant l'Iſle de Thulé, comme la partie la plus occidentale du monde connu, y plaçoit le commencement des longitudes; on croit que l'Iſlande eſt cette ancienne Thulé. Eratoſthène commençoit aux colonnes d'Hercule, vers le détroit de Gibraltar; Marin de Tyr, & Ptolomée le plus célèbre des géographes anciens, placerent le premier méridien aux Iſles fortunées, appellées aujourd'hui les *Canaries*; mais ils ne déterminerent point laquelle de ces Iſles étoit la plus occidentale, & devoit ſervir de terme de numération parmi les Arabes. Alfragan,

Albategnius, Naſſir-Eddin & Ulug-Beg, comptèrent auſſi des Iſles fortunées; mais Abulfeda, géographe célèbre comptoit ſes longitudes d'un méridien plus oriental de 10° que celui de Ptolomée, & l'on croit que c'étoit pour le faire paſſer à l'extrémité occidentale d'Afrique, où étoient ſelon lui les colonnes d'Hercule, ou à Cadix, devenue fameuſe par la conquête des Maures en Eſpagne : voilà pourquoi les longitudes dans Abulfeda ſont plus petites de 10° que dans les autres géographes Arabes, qui ont ſuivi Ptolomée. (V. *Greaves in Hudſon geog. min. pag.* 8).

Lorſque les Açores eurent été découvertes par les Portugais, en 1448, il y eut des auteurs qui comptèrent les longitudes de l'Iſle de Tercère. Les cartes de Gérard Mercator, mort en 1594, qui forment le grand Atlas publié en 1628 par Hondius, donnent 3° de longitude à l'Iſle de Fer; Jodocus Hondius, mort en 1611, lui en donne 12 dans ſa carte d'Afrique, inſérée au même Atlas.

On trouve des cartes géographiques, par exemple, celle de Toſcane, publiée à la calcographie de Rome en 1745, où les longitudes ſont plus grandes de 5° 23′ que celle de l'Iſle de Fer priſe à 20° de Paris; il ſemble que cela ne peut venir que d'une vieille erreur ſur la poſition des Iſles Canaries.

Janſſon, dans ſes cartes des quatre parties du monde publiées en 1624, Guillaume Blaeu, dans ſon nouvel Atlas placèrent leur premier méridien au pic de Ténériffe, montagne très-élevée que les Navigateurs apperçoivent de loin, & qui ſembloit être un point de départ fixé par la nature même. Les Hollandois s'en ſervent encore; il eſt de 18° 52′ à l'occident de Paris. Janſon, dans ſes hémiſphères plans, Ortelius, dans ſa carte univerſelle, Gérard Mercator le jeune, Bercius, dans ſon Europe abrégée, le mirent à l'Iſle de Fuego, ou S. Philippe, l'une des Iſles du Cap-Verd, ſur ce qu'ils étoient perſuadés qu'en cet endroit l'aiguille aimantée n'avoit aucune déclinaiſon.

3892. Louis XIII. par une déclaration du 25 Avril 1634, rendue ſur l'avis des Mathématiciens les plus con-

nus, fixa le premier méridien à la partie la plus occidentale des Canaries; l'Isle de Fer est la plus occidentale de toutes, & le Bourg de cette Isle est à 19° 54′ à l'occident de Paris M. de l'Isle, M. d'Anville, & la plupart des géographes François négligent les 6′, & supposent la longitude de Paris égale à 20°.

Dans les cartes marines publiées à Paris, & qui forment le grand recueil du *Neptune François*, & celui de l'*Hydrographie Françoise* de M. Bellin, on compte les longitudes du méridien de Paris, en les distinguant par orientales & occidentales; les Anglois font la même chose par rapport au méridien de Londres, & quelquefois par rapport au méridien du Cap Lézard qui est de 0h 29′ 52″ ou de 7° 28′ à l'occident de Paris, & à 49° 57′ de latitude. Dans les cartes marines on réunit ordinairement ces différentes échelles, de même que celle du pic de Ténériffe, pour se rendre utile aux différentes nations, en attendant une convention générale qu'il est difficile d'espérer.

Par la même raison que nous comptons en France la longitude de Paris de 20° 0′ en nombres ronds, les Italiens comptent celle de Rome de 30° 0′ au lieu de 30° 3′ qu'on auroit en partant du Bourg de l'Isle de Fer; c'est ainsi qu'on le voit dans le P. Boscovich, *De Litteraria expeditione* 1755, *pag.* 187.

De la Gnomonique.

3893. La Gnomonique, ou la science des cadrans solaires se réduit à la trigonométrie ou aux projections des cercles de la sphère; il nous sera donc facile d'en renfermer toute la théorie en peu de mots, pour terminer les applications que nous avions à faire de l'astronomie.

Un cadran solaire est un plan sur lequel on a marqué les différentes sections des cercles horaires (93) qui passent par un point quelconque pris pour index, ou par une ligne parallèle à l'axe du monde, prise pour style; car dans toute sorte de cadran le style doit être dirigé vers

le pole du monde, par où les cercles horaires paſſent tous ſans exception.

Le cas le plus ſimple de la Gnomonique eſt celui du cadran équinoxial; un cercle diviſé en parties égales eſt placé perpendiculairement au méridien; ſon inclinaiſon ſur la méridienne étant égale à la hauteur de l'équateur, le ſtyle eſt placé au centre du cercle, perpendiculairement au plan du cadran, & parallélement à l'axe du monde; il ſuffit que le cercle ſoit diviſé en 24 parties égales par 24 rayons, qui feront les 24 lignes horaires.

Cadran équinoxial.

3894. Après le cadran équinoxial, le cas le plus ſimple de la Gnomonique, eſt celui d'un cadran horizontal, dont le ſtyle eſt incliné ſur la méridienne d'une quantité égale à la hauteur du pole; ce ſtyle part d'un point qu'on appelle auſſi le centre du cadran; ſi l'on imagine un cercle perpendiculaire au ſtyle en un point quelconque de ſa longueur, ce cercle ſera parallèle à l'équateur, & formera un cadran équinoxial (3893), ſi l'on prolonge les rayons de ce cercle diviſé en heures, ou ſes lignes horaires, elles iront rencontrer le plan horizontal en des points, où aboutiront les lignes horaires, tirées par le centre du cadran.

Cadran horizontal.

De cette ſimple conſidération, il eſt facile de conclure que dans un cadran horizontal, la tangente de l'angle de chaque ligne horaire avec la méridienne, eſt égal à la tangente de l'angle horaire multiplié par le ſinus de la latitude. On prend le coſinus de la latitude s'il s'agit d'un cadran vertical dirigé de l'orient à l'occident, ou expoſé en plein midi.

3895. On peut tracer graphiquement les lignes horaires d'un cadran horizontal par le moyen d'un globe; il ne faut que voir les points où l'horizon eſt coupé par les cercles horaires de 15°, 30°, &c. les diſtances de ces points au méridien marquent les angles des lignes horaires avec la ligne méridienne. En effet, tous les cercles horaires ſe coupent dans l'axe du globe, comme dans l'axe d'un cadran horizontal, ils ſont interceptés par l'horizon du globe, comme par le plan horizontal du cadran, leurs

communes ſections ſe rencontrent au centre du globe, comme au centre du cadran ; ainſi les angles que forment les communes ſections, ſont meſurées par la circonférence de l'horizon du globe, comme elles le ſeroient par un cercle décrit du centre du cadran ſur le plan du même cadran ; les points de l'horizon où paſſent ces cercles horaires ſont les extrémités des ſections de ces cercles ſur l'horizon ; donc les diſtances de ces points à celui du midi expriment les angles de ces ſections avec celle du méridien ſur l'horizon.

Cadran vertical déclinant.

L'on peut avoir les angles horaires d'un cadran vertical par les mêmes méthodes, pourvu qu'on connoiſſe la déclinaiſon du plan ; on placera le vertical mobile du globe de la même manière que le plan donné, c'eſt-à-dire, qu'on l'éloignera du méridien autant que le plan en eſt éloigné, & l'on examinera les points où ce vertical eſt coupé par les cercles horaires du globe ; les diſtances de ces points au zénit du globe ſeront les angles des lignes horaires avec la méridienne. En effet, les lignes horaires ſont les interſections des plans des cercles horaires avec le plan du vertical où l'on décrit le cadran, & la ligne du zénit eſt l'interſection du méridien avec ce plan ; donc les diſtances entre le zénit & les points du vertical, où les cercles horaires paſſent, ſont les angles des lignes horaires avec la méridienne.

Sur un plan quelconque.

3896. On peut tracer un cadran ſur un plan quelconque par le moyen d'un cadran équinoxial, ou d'un cadran horizontal déja fait : il ne s'agit que de tracer une méridienne horizontale (109), d'élever un ſtyle qui ſe dirige vers le pole, & qui rencontrera le plan au centre du cadran, de placer ſur ce ſtyle un cadran équinoxial, ou bien un cadran horizontal, dont le ſtyle faſſe avec l'autre une ſeule & même ligne ; on prolongera les lignes horaires de ce cadran, juſques à la rencontre du plan donné, elles marqueront les points où chaque ligne horaire doit être tirée, en partant du centre du cadran. Si l'on ne peut avoir de centre, on y ſupplée en donnant au cadran équinoxial deux poſitions différentes, pour

avoir deux points de chaque ligne horaire ſur le plan.

3897. On peut calculer, par la trigonom. ſphérique, les angles des lignes horaires d'un cadran quelconque, pourvu qu'on connoiſſe *l'inclinaiſon* & la *déclinaiſon* du cadran, c'eſt-à-dire, l'angle que ſon plan fait avec le plan de l'horizon, & l'angle compris entre la méridienne & la ſection commune de l'horizon & du cadran; mais je ſuppoſerai, en premier lieu, que le plan paſſe par le zénit, puiſqu'on ſe ſert rarement des plans inclinés. Par la trigonométrie ſphérique.

Soit *AZP* (*fig.* 339) le méridien, *Z* le zénit, *ZXL* le cercle vertical dans lequel eſt le plan d'un cadran déclinant; on connoît la déclinaiſon, qui eſt égale à l'angle *PZX*, avec la diſtance du pole au zénit *PZ*. Dans le le triangle *ZPX* rectangle en *X*, on cherche la perpendiculaire *PX* qui meſure l'angle de l'axe avec la *Souſtylaire*, c'eſt-à-dire, avec la ligne marquée par les perpendiculaires que l'on conçoit tirées de chaque point du ſtyle ſur le plan du cadran. On cherche auſſi le côté *ZX* qui meſure l'angle de la ſouſtylaire avec la ligne verticale ou méridienne. Si *PH* eſt un cercle horaire quelconque, par exemple, celui d'une heure, qui fait un angle *ZPH* de 15° avec le méridien; la différence des angles *ZPH*, *ZPX* donnera l'angle *HPX*; avec cet angle & le côté *PX*, on trouvera l'arc *HX* qui meſure l'angle de la ſouſtylaire avec la ligne horaire cherchée. *Fig.* 339.

Si l'on a un plan tel que *AY* qui ne paſſe point par le zénit, on connoîtra du moins ſon inclinaiſon ſur l'horizon, dont le complément eſt égal à l'arc perpendiculaire *ZV*, & ſa déclinaiſon ou l'angle que fait l'horizontale du plan avec la méridienne horizontale; le complément de cette déclinaiſon eſt l'angle *AZV*; l'on cherchera *AZ*, & l'angle *A*. Dans le triangle *APY* rectangle en *Y*, connoiſſant *AP* & l'angle *A*, on trouvera *AY* qui eſt l'angle de la ſouſtylaire avec la méridienne du cadran, de même que l'angle *APY*, & l'arc *PY* qui eſt égal à l'angle du ſtyle & de la ſouſtylaire. Dans le triangle *POY*, formé par le cercle horaire d'une heure ou de 15°, l'on connoîtra l'angle *OPY* & le côté *PY*; on trouvera *OY* angle de la

fouftylaire avec la ligne d'une heure, dont le cercle *PO* & l'angle *ZPO* marquent la diftance au méridien. Le ftyle eft toujours fuppofé parallèle à l'axe du monde, faifant avec la fouftylaire un angle égal à l'arc *PY*.

3898. Pour connoître la déclinaifon d'un plan, on peut tracer une méridienne horizontale vers le pied (109), & mefurer l'angle qu'elle fait avec la ligne horizontale du plan. De même fur un cadran vertical, le pied du ftyle, (ou le point auquel répond la perpendiculaire abaiffée de fon extrémité fur le plan) étant pris pour centre, l'arc des ombres égales fur le plan, étant divifé en deux parties égales, donnera la pofition de la fouftylaire; car quand le foleil paffe dans le plan du cercle horaire *PX* perpendiculaire au plan du cadran, l'ombre du ftyle droit eft la plus courte qui foit poffible ce jour-là, & à diftances égales du foleil au cercle horaire *PX* les ombres font égales; quand on aura la fouftylaire, l'angle qu'elle formera avec la vertical fera l'arc *ZX*; connoiffant *PZ* & *ZX*, on trouvera l'angle *Z* qui eft la déclinaifon du plan. On trouve auffi la déclinaifon d'un plan vertical par la méthode de M. de Parcieux, en traçant par le pied du ftyle une verticale & une horizontale.

Auteurs de Gnomonique.

3899. Nous renvoyons pour le détail de cette fcience au Traité complet de Gnomonique de M. de Parcieux; on pourra confulter auffi Ozanam, la Hire, Rivard, la Madeleine, Dom Bedos, Blaize, Bion; parmi les plus anciens, on peut voir Oroncefiné, Munfter, Schoner, Voell, Henrion, Clavius, Kircher, de Challes, &c. V. *Mém. acad.* 1757, fur les cadrans analemmatiques ou fur le cadran azimutal elliptique. Les principes que nous venons de donner fuffifent pour entendre & même pour tracer toute forte de cadran, mais le détail des pratiques convenables à chaque cas, & des moyens d'exécution ont fait la matière de beaucoup de traités.



LIVRE

LIVRE VINGT-QUATRIEME.

DU CALCUL ASTRONOMIQUE par le moyen des Obſervations, ſoit ſur Terre, ſoit ſur Mer.

L'OBSERVATION a été le fondement de cette aſtronomie, les tables en ont été le réſultat ; c'eſt pourquoi nous avons expliqué fort au long la manière d'obſerver, & de conſtruire les tables ; mais il nous reſte à expliquer d'une façon élémentaire les diverſes opérations par leſquelles on paſſe de l'obſervation à la conſtruction des tables ; ſi l'on joint à cela les explications que j'ai miſes au bas de chaque table, on aura tout ce qui forme proprement le CALCUL ASTRONOMIQUE. J'ai été obligé de le placer à la fin de cet ouvrage, parce qu'il y entre des choſes qui ne ſe rapportoient à aucun des traités précédens, & des notions qui ſuppoſent la lecture de ces mêmes traités.

En quoi conſiſte le calcul astronomique.

Définition des logarithmes.

3900. Nos logarithmes (a) ordinaires ne ſont autre choſe que la progreſſion arithmétique des nombres naturels 0, 1, 2, 3, &c. placés à côté de la progreſſion géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, &c. Ainſi dans nos tables ordinaires de logarithmes, le nombre 1 eſt véritablement le logarithme de 10, & le nombre 2 eſt le logarithme de 100.

Nombres.	Logarithmes.
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6

Les zéro que l'on trouve à la ſuite du logarithme 2, y feroient inutiles ſi l'on n'avoit à traiter que les ſeuls nombres de la progreſſion géométrique décuple 1, 10,

(a) Ἀριθμὸς, *numerus* ; Λόγος, *Sermo*, *ratio* ; parce qu'ils indiquent les nombres.

100, &c. c'eſt-à-dire, ſi l'on n'avoit pas beſoin des logarithmes intermédiaires.

3901. Pour avoir les logarithmes des nombres compris entre 1 & 10, on ajoute des fractions décimales à chacun de ces deux nombres & à leurs deux logarithmes 0 & 1, l'on établit une progreſſion géométrique entre 1 & 10, & une progreſſion arithmétique correſpondante entre 0 & 1, & les termes de celle-ci ſont les logarithmes des termes de celle-là. Par exemple, la moyenne proportionnelle géométrique entre 1 & 10 eſt 3,1623, c'eſt-à-dire, 3 & $\frac{1623}{10000}$; la moyenne arithmétique entre 0 & 1 eſt 0,5 ou cinq dixièmes; donc le logarithme de 3,1623 eſt 0,5, ou 0,500000, qui eſt abſolument la même choſe.

Invention des logarithmes.

3902. Neper, Baron Ecoſſois, fut l'auteur de cette belle invention, & il publia à Edimbourg en 1614 une table de logarithmes, mais Henri Briggs, Profeſſeur de géométrie à Oxfort, avec qui il en avoit conféré, & qui avoit déja calculé vers 1600 les ſinus naturels à 15 chiffres, par des méthodes algébriques, calcula encore ſous une forme bien plus commode & avec 15 chiffres, les logarithmes des nombres depuis 1 juſqu'à 20000, & depuis 90000 juſqu'à 101000; cette table fut imprimée à Londres en 1624. Briggs avoit auſſi calculé les logarithmes des ſinus & des tangentes pour chaque centième de degré avec 15 chiffres, il mourut en 1632 à l'âge de 70 ans, mais Gellibrand publia ces calculs (*Trigonometrica Britannica*, Goudæ, 1633.

Tables de Briggs & de Ulacq.

3903. Adrien Ulacq compléta bientôt les logarithmes des nombres calculés par Briggs, & donna les logarithmes depuis 20000 juſqu'à 90000, (*Arithmetica Logarithmica*, Goudæ 1628). Conſidérant enſuite que l'uſage des minutes & des ſecondes étoit plus familier aux aſtronomes, que celui des centièmes de degré employés dans la table de Briggs, & que les différences des logarithmes étoient trop inégales au commencement de cette table, Ulacq ſe détermina vers 1630 à calculer encore les logarithmes des ſinus & des tangentes de dix en dix ſecondes, avec 11 chiffres; ce ſont ceux dont les aſtronomes

ſe ſervent encore ; mais ils ſont extrêmement rares aujourd'hui, en voici le titre : *Trigonometria artificialis, ſive magnus Canon triangulorum logar. ad radium* 10000000000, *& ad dena ſcrupula ſecunda, ab* Adriano Ulacco *Goudano conſtructus*, Goudæ, 1633.

3904. Ce travail dont nous profitons encore tous les jours a fait oublier celui de *Benjamin Urſinus*, Mathématicien de l'Electeur de Brandebourg, qui avoit cependant déja calculé des logarithmes ſemblables ſuivant la forme de Néper; ils avoient paru en 1625, & durent être d'un grand ſecours pour les calculs d'Ulacq. Ce dernier profita auſſi du grand Ouvrage de Rheticus, publié par Pitiſcus, où les ſinus naturels avoient été calculés de dix ſec. en dix ſec., avec 15 chiffres ſans compter le rayon (*Theſaurus mathematicus*, Francofurti 1613) [a], ils étoient déja avec 10 chiffres dans *Opus Palatinum* (456, 485).

3905. Les logarithmes de Briggs & d'Ulacq, ſoit pour les nombres, ſoit pour les ſinus, ont été publiés à Londres en 1742. par *Gardiner*, avec 8 chiffres ſeulement; & réimprimés à Avignon en 1770; c'eſt l'édition la plus commode & la plus facile à trouver actuellement. Les logarithmes des nombres y ſont diſpoſés d'une façon très-abrégée qui avoit été imaginée par Nathaniel Roe, & employée par Sherwin, (*Mathematical tables*, in-8°. 1705). On y prend aiſément les logarithmes des nombres juſqu'à un million. Edition plus commode de Gardiner.

3906. L'édition des logarithmes qui eſt dans la trigonométrie de M. de Parcieux, eſt d'une forme très-commode, pour les aſtronomes ; nous l'avons encore perfectionnée en 1760. M. de la Caille & moi, dans une petite édition portative que nous fîmes faire conjointement (1889), qui a été réimprimé enſuite en 1768, & qui ſe trouve chez la veuve Deſaint. On y voit pour les trois premiers degrés la différence entre les logarithmes des ſinus & ceux des nombres naturels; par le moyen de ces différences on a très-facilement les ſinus des degrès minu-

[a] Ce livre eſt extrêmement rare. J'en donnerai la notice dans le Journal des Savans de 1771.

tes & secondes. Ainsi pour avoir le sinus de 2° 11′ 37″ on prend son logarithme dans les nombres naturels, 3,897462, & l'on trouve vis-à-vis du sinus de 2° 12′, la différence 4,685469 qui ne varie presque pas d'une minute à l'autre; la somme est 8,582931; c'est le log. sinus de 2° 11′ 37″. On pourroit ajouter ces différences aux logarithmes, jusqu'à 20 mille.

3907. On trouvera l'usage des logarithmes avec des exemples, dans tous les livres où il y a des tables de logarithmes; à l'égard des logarithmes des fractions décimales dont j'ai fait usage plusieurs fois, & dont on ne trouve pas l'explication dans les livres ordinaires; on pourra consulter l'explication que j'en ai donnée dans mon *Exposition du calcul astronomique*, pag. 52; on y verra, par exemple, pourquoi la fraction 0,0001 a pour logarithme 6. En général, *la caractéristique des logarithmes de fractions est toujours le complément à 9 du nombre des zéro, qui sont après la virgule dans le nombre donné.*

Règle pour les logarithmes de fractions.

3908. S'il s'agit de diviser la fraction 0,0999 par la fraction 0,5, l'on a une soustraction à faire, comme on le voit ci-contre; l'on suppose une dixaine à côté de la caractéristique 8, & l'on retranche 9 de 18; en effet, dès que les dixaines excédentes se négligent dans l'addition, elles se suppléent par la même raison dans la soustraction qui n'est qu'une addition renversée; si dans l'opération précédente on ajoute *B* avec *C*, il vient 18 pour la caractéristique de *A*; voilà pourquoi nous la supposons également de 18 pour pouvoir faire la soustraction.

8,99956	*A*
9,69897	*B*
9,30059	*C*

3909. Il suit encore delà que pour diviser l'unité par une fraction, comme $\frac{1}{10}$, il faut prendre le complément du logarithme de la fraction; car le logarithme de 1 est zéro, & pour ôter de zéro le logarithme — 1, pour lequel nous avons mis + 9, il est clair qu'il faut écrire + 1.

3910. S'il s'agit de prendre la racine carrée d'une fraction 0,0999, c'est-à-dire, de diviser son logarithme

par 2, il faut écrire pour le logarithme de cette fraction, 18,99956, dont la moitié 9,49978 eſt le logar. de ſa racine 0, 316. S'il falloit prendre la racine cube d'une fraction 0,6258, dont le logarithme eſt 9,79643, il faudroit ſuppoſer à la caractériſtique 29 au lieu de 9, & l'on auroit pour le tiers 9,93214, auquel répond 0,8554, qui eſt la racine cube cherchée. En effet, dans le logarithme 8,99956 le 8 tient la place de —2, dont la moitié eſt —1, ou ce qui revient au même +9; donc c'eſt en effet 9 que je dois avoir pour la moitié, donc c'eſt 18 que je dois ſuppoſer au lieu de 8, dans le logarithme 8,99956.

3911. Toutes les analogies que l'on fait pour réſoudre les triangles ſphériques (3672 & ſuiv.), ſe réduiſent à de ſemblables additions; en voici un exemple appliqué à la forme des logarithmes de Gardiner, dont j'ai parlé ci-deſſus (3905). Je ſuppoſe qu'on connoiſſe la longitude du ſoleil 30° 0′ 5″ avec l'obliquité de l'écliptique, & qu'on veuille trouver la déclinaiſon du ſoleil (908), on fera la proportion ſuivante : Exemple de l'uſage des logarithmes.

Le rayon, ou le ſinus total	182	}
Eſt au ſinus de la long. du ſoleil, 30° 0′ 5″	9,6989700	}
Comme le ſin. de l'obl. de l'écl. 23° 28′ 22″	9,6002151	}
Eſt au ſin. de la décl. du ſoleil 11° 29′ 17 $\frac{1}{4}$	97	}
	9,2992130	
Logar. des tables le plus approchant au-deſſous	1375	
Différence	755	104
La différence diviſée par celle des tables diminuée d'un chiffre donne 7″ $\frac{1}{4}$		7 $\frac{1}{4}$

3912. Le nombre 182, qui eſt au-deſſus du premier logarithme, eſt la partie proportionnelle qui répond à 5″; le nombre 97 eſt la partie proportionnelle qui répond à 2″. Les quatre chiffres écrits ſous le dernier logarithme, ſont les derniers chiffres du logarithme de ſinus, qui dans les tables approche le plus de celui que nous voulons trouver, & qui répond à 11° 29′ 10″; la différence eſt 755; on la diviſe par 104, qui eſt la différence

correſpondante à une ſeconde dans les tables, & il vient au quotient $7''\frac{1}{4}$, qu'on ajoute avec les $11^\circ\ 29'\ 10''$, & l'on a le nombre cherché $11^\circ\ 29'\ 17''\frac{1}{4}$.

Omiſſion de la dixaine.

3913. J'ai obſervé dans cet exemple de ne point écrire la dixaine de la caractériſtique, qui ſe trouve 19, j'ai ſeulement écrit 9 : cela remédie à l'excédent qui eſt occaſionné par l'introduction que l'on fait de 9 à la place de — 1, & de 8 à la place de — 2 (3906).

3914. Je donnerai auſſi un exemple des logarithmes des nombres, appliqué aux mêmes tables, parce que j'ai vu qu'on y trouvoit quelquefois de l'embarras, l'explication étant fort ſuccincte ; je ſuppoſe qu'on cherche le logarith. du nombre 3,141593 (3321), on commencera par mettre 0 pour la caractériſtique, parce que dans les tables de Gardiner ou de Sherwin (3905), les caractériſtiques ont été omiſes pour abréger; mais on ſait que quand il n'y a qu'un chiffre d'unités, comme dans le nombre propoſé, où les ſix autres ſont des décimales, le logarith. commence toujours par 0 (3900). On cherchera dans les logarith. des nombres naturels, vis-à-vis de 3141, l'on aura les trois premiers chiffres 497 qui ſuivent la caractériſtique; en ſuivant la même ligne on trouvera au-deſſous de 5, c'eſt-à-dire, dans la ſixième colonne 1371; ainſi le logarithme de 3,1415 eſt 0,497 1371. Dans une petite colonne qui eſt en marge, on cherchera le ſixième chiffre 9 du nombre donné, on verra 124, c'eſt la partie proportionnelle qu'il faut ajouter au logarithme, à cauſe du ſixième chiffre 9 ; on prendra encore dans cette petite colonne le ſeptième chiffre 3, & vis-à-vis l'on trouvera 41, dont retranchant un chiffre on aura 4, qui eſt la partie proportionnelle pour le ſeptième chiffre; on ajoutera donc 128, & l'on aura pour le logarithme entier 0,4971499.

Logarithmes logiſtiques.

3915. Dans l'uſage ordinaire des tables aſtronomiques, on ſe ſert ſouvent des logarithmes logiſtiques ([a])

([a]) Logiſtique eſt le nom qu'on donnoit à l'algèbre ; on l'a donné enſuite à la courbe logarithmique ; il eſt actuellement conſacré à cette petite eſpèce de logarithmes; ce mot vient peut-être de λογίζομαι

employés dans l'astronomie Caroline de Street (520). On y trouve l'avantage de n'avoir rien à retrancher dans toutes les règles de trois, dont le premier terme est un degré ou 60', ce qui a lieu continuellement dans l'usage des tables. La règle de trois qui a servi à trouver le diamètre de la lune (*pag.* 60 & 78 *des Tables*), aussi bien que toutes les parties proportionnelles que nous avons supposées dans les calculs du lieu du soleil & de la lune, se peuvent faire à la vérité par la multiplication & la division ordinaire, en réduisant tout en secondes; mais elles sont bien plus faciles par les logarithmes logistiques. On les trouve à la fin de nos tables avec un exemple abrégé, *pag.* 245 & suivantes; je les ai prolongés au-delà de 60', à cause du mouvement diurne du soleil qui passe souvent 60'; mais quand on ajoute un de ces logarithmes, qui au-delà de 60' commencent par 9, il faut retrancher 1 de la caractéristique ou du cinquième chiffre à gauche. Si l'on s'en est servi dans une soustraction, il faut suppléer 1 dans la caractéristique de la somme. Par exemple, si je faisois cette proportion 72' : 36' : : 18' : x, j'ajouterois 2218 avec 5229, au lieu de la somme 7447 je supposerois 17447 pour retrancher 9208, & j'aurois 8239, logar. logistique de 9' 0".

Ces logarithmes servent aussi pour toutes les opérations des nombres qui ne passent pas 4380 en prenant au lieu des minutes & des secondes le nombre total de secondes, qui est marqué dans la seconde ligne de la table pour chaque nombre de minutes, & y ajoutant les secondes qui sont dans la première colonne : ainsi le logarithme de 3331 est 337 (*pag.* 248).

Des Interpolations, ou de l'usage des secondes Différences.

3916. DANS l'usage des observations & des tables astronomiques, on emploie continuellement des règles de

Colligo, parce que l'algèbre renferme beaucoup de choses en peu de caractères ; le P. Riccioli dit que le calcul des fractions sexagésimales & des portions de signes, de jours, d'heures, &c. est une partie de la logistique (*I.* 2).

trois & des parties proportionnelles, parce qu'on ſuppoſe que les nombres croiſſent uniformément; cependant il y a des cas où cette ſuppoſition ſeroit défectueuſe, on eſt alors obligé d'avoir recours à la méthode des interpolations. Le problême général qu'il faut réſoudre eſt celui-ci : étant données deux ſuites de nombres, qui ſe répondent l'une à l'autre, ſuivant une certaine loi, & dont l'une s'appelle la *ſuite des racines*, & l'autre la *ſuite des fonctions*, trouver un nombre intermédiaire entre deux fonctions, qui réponde à un nombre intermédiaire donné entre deux racines. On peut voir cette matière traitée dans toute ſa généralité par des formules algébriques, dans Newton, dans Cotes, dans Stirling, dans un mémoire de Mayer, (*Comment. Petropolit. T. 11. pag.* 180), & dans l'aſtronomie de la Caille, *pag.* 69; le P. Boſcovich a fait voir qu'on pouvoit par ces méthodes dreſſer des tables des inégalités de Saturne produites par l'attraction. Pour moi voyant que des formules très-compliquées ne pouvoient jamais être d'uſage, & que dans l'aſtronomie on avoit toujours à conſidérer des cas beaucoup moins généraux, j'ai traité les interpolations d'une manière plus limitée, mais plus commode (*Mém. acad.* 1761, *pag.* 125), par le moyen des différences premières, ſecondes & troiſièmes.

Secondes différences conſtantes.

3917. Je ſuppoſe une ſuite de nombres 0, 1, 3, &c. dont les différences ſoient inégales, mais d'une inégalité conſtante & régulière, par exemple, 1, 2, 3, 4, &c. en ſorte que les ſecondes différences, ou les différences des différences, ſoient conſtantes, par exemple, égales à 1, comme dans la table ci-jointe. Si l'on ne prend les mêmes nombres que de deux en deux, par exemple, 0, 3, 10, 21, les différences ſeront 3, 7, 11, & leur inégalité, ou leur ſeconde différence ſera de 4, c'eſt-à-dire, quatre fois plus

Nombres.	Différ. prem.	Secondes Différ.
0		
	1	1
1		
	2	1
3		
	3	1
6		
	4	1
10		
	5	1
15		
	6	1
21		
	7	1
28		
	8	1
36		

plus grande qu'auparavant, parce qu'en doublant les intervalles l'on a pour différence première d'un côté la somme de 1 & 2, de l'autre la somme de 3 & 4, ensorte que la seconde différence a augmenté à raison de la différence qu'il y a entre 2 & 3, & de celle qu'il y a entre 1 & 4, qui est trois fois plus grande. Si l'on prenoit les nombres de trois en trois, on trouveroit la seconde différence 9, &c, c'est-à-dire, que les différences secondes croissent comme les carrés des intervalles des nombres ; delà je vais tirer une règle générale pour remplir les intervalles d'une suite de nombres qui suivroient la même loi.

Manière d'interpoler.

3918. Je suppose quatre nombres, comme seroient quatre longitudes, observées de 12 heures en 12 heures, dont les 3 différences soient 78, 222, 366, ensorte que l'inégalité de leur marche, ou de leur progrès, soit 144, c'est-à-dire, que la différence seconde, ou la différence des différences soit constamment de 144 ; les nombres 0, 78, 300, 666, ne croissent pas uniformément, puisque leurs différences 78, 222, sont inégales, mais du moins l'uniformité est telle que ces différences augmentent également : tel est le cas le plus simple des interpolations, mais ce cas est suffisant dans l'usage de l'astronomie, même pour le mouvement de la lune qui est la planète la plus irrégulière.

Heures.	Nombres.	Différ. prem.	Secondes Differ.
0	0		
		78	
12	78		144
		222	
24	300		144
		366	
36	666		

3919. Connoissant ces nombres, ou ces longitudes de 12 heures en 12 heures, on peut facilement les avoir de 6 heures en 6 heures, en les assujétissant à cette règle des secondes différences constantes ; il ne s'agit que d'interpoler un nombre dans chacun des intervalles ; car on sait que leur seconde différence doit être quatre fois moindre que 144, c'est-à-dire, 36 (3917) ; il suffira donc de faire une suite de nombres, dont la seconde différence soit 36. Pour avoir la différence première on prendra la moitié de la différence 78, c'est-à-dire, 39, & l'on en

ôtera la moitié de la feconde différence 36, c'eft-à-dire, 18, il reftera 21; or ayant cette première différence 21, il fuffira de l'augmenter fucceffivement de la feconde différence 36 pour avoir toutes les autres différences; en effet, la première différence jointe à la feconde, doivent faire 78, & ces deux différences doivent différer de 36; or quand on a la fomme & la différence de deux nombres, il fuffit pour trouver le premier, de retrancher la demi-différence de la demi-fomme.

3920. Si au lieu d'avoir un nombre à interpoler entre 0, 78, 300, on en vouloit interpoler 2, on prendroit le tiers de la différence première, & l'on en ôteroit une fois la feconde différence trouvée; car les trois différences que l'on cherche, doivent faire 78 dans l'exemple précédent, & elles doivent différer de la valeur de la feconde différence trouvée; or quand on a la fomme de trois quantités & leur différence, on trouve la plus petite quantité par la règle que je viens d'indiquer.

Règle générale.

En général, pour interpoler un nombre n de termes entre deux termes d'une fuite donnée, on divifera la feconde différence de la fuite donnée par le carré de $n+1$, pour avoir la feconde différence de la nouvelle fuite; on divifera la différence première par $n+1$, & l'on ôtera du quotient la feconde différence de la nouvelle fuite multipliée par $\frac{n}{2}$; il faudroit l'ajouter fi les différences premières alloient en décroiffant. C'eft ainfi qu'on trouvera la première des différences premières qui doivent avoir lieu dans le nouvel ordre de termes que l'on cherche; les fuivantes fe trouveront en ajoutant fucceffivement la différence feconde trouvée pour la nouvelle fuite.

Cette règle fuffit pour conftruire des tables.

3921. La feule confidération des fecondes différences fuppofées égales, eft fuffifante dans bien des caculs aftronomiques, fur-tout pour conftruire des tables. M. Sharp qui calcula en 1695 les tables d'afcenfion droite & de déclinaifon pour chaque degré de longitude & de latitude, qu'on trouve dans l'hiftoire célefte de Flamfteed, ne les calcula par la trigonométrie que de 5° en 5°, & il

les étendit par la méthode des interpolations à chaque degré, M. Mouton, Chanoine de Lyon, qui calcula les déclinaiſons du ſoleil pour chaque minute de longitude en ſecondes & en tierces, ne les calcula que pour chaque degré par la trigonométrie, & chercha les autres nombres par la méthode des ſec. différences (*Obſer. Diamet.* 1670).

3922. Il ſuffit dans ces cas-là de calculer rigoureuſement aſſez de termes pour que leurs ſecondes différences ſoient à peu-près égales ou varient inſenſiblement. J'ai publié dans la *Connoiſſance des temps de* 1771, une table fort commode pour abréger ces ſortes d'opérations, calculée avec ſoin par M. Guerin à Amboiſe.

3923. On ſe ſert auſſi des ſecondes différences pour corriger des calculs, ou limiter des obſervations, c'eſt-à-dire, les ramener à une marche régulière & uniforme; quand on trouve une ſeconde différence qui eſt trop grande ou trop petite par rapport à la précédente & à la ſuivante, il faut corriger le nombre qui répond à cette ſeconde différence du tiers ſeulement de l'erreur qu'on a remarquée dans la différence; cette correction eſt de même eſpèce que celle de la ſeconde différence elle-même, ſi le progrès eſt de différente eſpèce dans les nombres & dans les premières différences.

Rectifier des calculs.

3924. L'examen du cas particulier que je viens d'expliquer (3920), nous fera trouver aiſément d'une manière générale un terme quelconque, ſans paſſer par tous les termes précédens, au moyen d'une correction de la partie proportionnelle, dont la formule eſt très-ſimple.

Soit d^2 la différence ſeconde des nombres donnés, m le nombre des intervalles qu'il s'agit de former, par exemple 2, quand on veut interpoler un terme dans l'intervalle des nombres donnés, 3 quand on veut interpoler deux termes; on aura $\frac{d^2}{m^2}$ pour la différence ſeconde de la nouvelle ſuite; ſoit x la première des différences premières que l'on cherche, les ſuivantes ſeront $x+\frac{d^2}{m^2}$, $x+\frac{2d^2}{m^2}$, $x+\frac{3d^2}{m^2}$, &c; car elles croiſſent de la quantité de leur ſeconde différence

Trouver l'équation des parties proportionnelles.

$\frac{d^2}{m^2}$; en additionnant enſemble toutes ces différences premières on aura la différence entre le premier terme donné & le terme ſuivant de la ſuite donnée, c'eſt-à-dire, la différence que j'appelle d, entre les deux termes dont on veut remplir l'intervalle; ainſi $mx + \frac{d^2}{m^2}(1+2+3, \&c.) = d$; donc $x = \frac{d}{m} - \frac{1+2+3,\ \&c.}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2}$.

3925. Quand on a la première des différences premières on trouve aiſément les autres, en y ajoutant ſucceſſivement $\frac{d^2}{m^2}$, qui eſt la différence ſeconde; on aura donc les différences ſuivantes entre les termes cherchés.

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3,\ \&c.}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2}$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m}. \qquad \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2}.$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m}. \qquad \frac{d^2}{m^2} + \frac{2d^2}{m^2}.$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m}. \qquad \frac{d^2}{m^2} + \frac{3d^2}{m^2}.$$

&c.

3926. On continueroit aiſément cette ſuite en répétant toujours les deux premiers termes, & mettant ſucceſſivement 4, 5, 6 pour le coëfficient de $\frac{d^2}{m^2}$. On voit dans cette expreſſion la ſérie des nombres naturels 1, 2, 3, &c. répétée dans chaque ligne; & de plus cette même ſérie étendue du haut en bas dans la dernière colonne, il faut les ſommer l'une & l'autre. Dans chaque ligne horizontale la ſérie aura autant de termes que le nombre m contient d'unités, c'eſt-à-dire, m de termes; or, ſuivant la propriété des nombres naturels, un nombre m de termes équivaut à $\frac{m.(m+1)}{2}$; donc dans chaque ligne horizontale on aura $\frac{m+1}{2}$ à la place de $\frac{1+2+3,\ \&c.}{m}$.

Dans la dernière colonne verticale où l'on a $\frac{d^2}{m^2}$, multipliée auſſi par la ſuite des nombres naturels, ſi l'on cherche le quatrième terme, ou la quatrième des différences pre-

mières, on aura trois termes à prendre; & en général, si l'on cherche le terme p, on aura $p - 1$ de termes; donc la somme sera $\frac{(p-1).p}{2}$, qu'il faut multiplier par $\frac{d^2}{m^2}$.

Dans la même supposition l'on aura un nombre p de différences premières à ajouter ensemble, c'est-à-dire, quatre différences si l'on veut parvenir au quatrième terme, on aura donc $p.\frac{d}{m} - \frac{p.(m+1)}{2} + \frac{(p-1).p}{2}.\frac{d^2}{m^2} = p.\frac{d}{m} - \frac{p}{m^2}(m-p)\frac{d^2}{2}$; la partie proportionnelle qui auroit lieu si la suite des nombres donnés croissoit uniformément, est $p\frac{d}{m}$.

3927. La correction $-\frac{p}{2}(m-p).\frac{d^2}{m^2}$ est donc l'équation qu'éxige l'inégalité de la marche, ou la considération des différences secondes. Cette correction de la partie proportionnelle est soustractive quand les différences premières vont en croissant, c'est-à-dire, que les différences secondes sont positives. Equation des parties proportionnelles.

On trouvera dans le mémoire que j'ai cité une formule semblable pour avoir égard aux troisièmes différences, mais la plupart de nos calculs n'exigent que les secondes différences. Tels sont les lieux de la lune calculés de jour en jour, les longitudes géocentriques de Mercure aux environs de ses plus grandes digressions, &c. je me contenterai donc d'expliquer ici l'usage de la formule précédente.

3928. EXEMPLE. Supposons qu'on ait calculé les longitudes de la lune pour les jours 1, 2, 3, 4, 5, à midi, & qu'on ait trouvé les nombres suivans.

Jours.	Longit. de la Lune.	Différences.	Sec. Différ.
1	$1^s\ 4^\circ 34'\ 3''$		
		$13^\circ\ 6'\ 58''$	
2	1 17 41 1		$23'\ 34''$
		13 30 32	
3	2 1 11 33		25 10
		13 55 42	
4	2 15 7 15		30 58
		14 26 40	
5	2 29 33 55		

On demande la long. qui doit avoir lieu le 2 à 15^h; on dira d'abord 24^h sont à $13^\circ 30' 32''$, comme 15^h sont à $8^\circ 26' 35''$,

mouvement pour 15^h ſuppoſé uniforme. La ſeconde différence qui répond à l'intervalle du 2 au 3 eſt 24′ 22″ en prenant un milieu entre celle du 2 & celle du 3 ; ainſi $\frac{d^2}{2} = 12' \, 11''$, $\frac{p}{m} = \frac{15}{24}$ & $\frac{m-p}{m} = \frac{9}{24}$, donc $\frac{p}{m^2}(m-p)\frac{d^2}{2} = \frac{15}{24} \cdot \frac{9}{24} \cdot 12' \, 11'' = 2' \, 51''$; c'eſt ce qu'il faut retrancher du mouvement moyen pour 15^h, 8° 26′ 35″, on aura 8° 23′ 44″ pour le mouvement vrai ; ajoutant ce mouvement à la longit. de la lune pour le 2 à midi 1^s 17° 41′ 1″, on aura 1^s 26° 4′ 45″ longitude pour le 2 à 15^h, qui diffère à peine de celle qu'on trouve en cherchant la longitude au moyen des tables par un calcul immédiat. On trouvera des tables propres à trouver ainſi le lieu de la lune dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, & plus au long dans la *Connoiſſance des temps de* 1771. Cette conſidération ſert auſſi à trouver le mouvement horaire (1520).

Attention pour les tables de Mercure.

3929. Dans l'uſage de certaines tables aſtronomiques, on eſt obligé d'avoir recours aux ſecondes différences, ſi l'on veut obtenir toute l'exactitude dont ces tables ſont ſuſceptibles ; telles ſont les tables de Mercure qui ne ſont calculées que de degré en degré, quoique pour l'équation de l'orbite & pour la diſtance, les différences d'un degré à l'autre ſoient aſſez inégales ; cette inégalité, ou ce qui revient au même, la différence ſeconde va juſqu'à 36″ vers I v^s 15° pour l'équation de l'orbite (*pag.* 108 des tables), & juſqu'à 56 pour le logarithme de la diſtance dans le périhélie (*pag.* 110) ; il peut donc y avoir dans les parties proportionnelles une erreur de 4″ pour l'équation, & de ſept parties ſur le logarithme; car elle eſt quelquefois $\frac{1}{8}$ de la 2de différence. Voici une table de la correction qu'il faut faire à ces parties proportionnelles, en ſuppoſant que la ſeconde différence pour un degré ſoit de 30″. Ainſi quand on cherchera l'équation de Mercure pour 3^s 27° 20′ (*pag.* 108), on

Sec. Diff. pour 1° = 30″.		
Min.	*Correction.*	*Min.*
0	0″ 0	60
5	1, 1	55
10	2, 1	50
15	2, 8	45
20	3, 3	40
25	3, 6	35
30	3, 8	30

aura la partie proportionnelle 2′ 1″; mais la différence seconde étant de 30″, il faudra ôter 3″ 3 de la partie proportionnelle, comme on le voit dans cette petite table, vis-à-vis de 20′. Si la seconde différence étoit de 45, il faudroit ajouter aux corrections de cette table une moitié en sus. Si les différences premières alloient en diminuant, comme cela arrive pour 8ˢ 2° d'anomalie, cette correction devroit être ajoutée à la partie proportionnelle.

Réductions que les astronomes font à des observations peu distantes entr'elles, pour les réduire à une même époque.

3930. Il arrive continuellement dans l'astronomie que l'on connoît à peu-près une certaine quantité, & qu'on veut par de nouvelles observations la déterminer plus exactement; alors on se sert de la connoissance qu'on en a déja pour savoir combien il doit y avoir de variation entre différens temps d'observations, & par-là on trouve l'avantage de confirmer une observ. par plusieurs autres.

Je veux, par exemple, observer avec la plus grande exactitude la hauteur du soleil au solstice d'été pour en déduire l'obliquité de l'écliptique; il n'y a pour cela qu'une seule observation directe & immédiate, c'est celle qu'on feroit à midi le jour même du solstice, & en supposant que le solstice arrivât à midi. Observations solsticiales.

Mais quelle que soit la hauteur solstitiale que je veux observer, je sais par avance qu'elle doit être plus petite de 12″ quand je l'observerai un jour plutôt; (*Expos. du calcul astron. pag.* 32), ainsi ayant observé cette hauteur la veille ou le lendemain du solstice, & y ajoutant 12″, j'aurai deux observations aussi bonnes que celle du jour solsticial, & qui doivent donner le même résultat, si elles sont toutes les trois bien faites.

Quoique je ne sache pas (à une minute près, si l'on veut) qu'elle sera la hauteur solsticiale, cela n'empêche pas que je ne sache très-bien qu'elle sera plus petite de 12″ le len-

demain & la veille, que le jour même du solstice; car une minute d'erreur sur $23^{\circ}\frac{1}{2}$ ne produira pas sur 12″ une erreur de la centième partie d'une seule seconde, puisqu'il faut que l'erreur soit de part & d'autre de la quatorze centième partie du total.

Réduction des observations d'étoiles.

3931. C'est sur ce principe que M. de la Caille réduisoit au premier Janvier 1750, toutes les observations qu'il faisoit d'une même étoile (*Astronomiæ Fundamenta* 1757); & il y a bien des cas où il importe de confirmer ainsi le même résultat par plusieurs jours d'observations. Si les différences sont inégales, on est obligé de calculer par les tables la chose qui a été observée, & l'erreur des tables étant ainsi déterminée plusieurs jours de suite, on prend un milieu entre les erreurs, pour avoir la différence moyenne entre les tables & l'observation, déduite de plusieurs résultats, & c'est celle-ci dont on fait usage; c'est ainsi qu'on peut rendre quatre ou cinq fois moindre la petite incertitude qui naît de l'imperfection de nos instrumens & de l'erreur de nos observations: au lieu d'une erreur de 15 ou 20″ qui est possible sur des longitudes observées, l'on peut s'assurer de 5 ou 6 secondes. De même quand on a pris plusieurs hauteurs en mer, on peut les réduire à un même instant (3994).

Précision naturelle de nos observations.

3932. Prendre un milieu entre deux résultats qui devroient être égaux & qui ne le sont pas, par exemple, entre 2″ & 4″, c'est supposer que l'un est trop grand & l'autre trop petit, c'est ôter au plus grand ce qu'il a de trop, & ajouter au plus petit ce qui lui manque. Quand on veut prendre le milieu entre trois quantités on les ajoute ensemble, & l'on prend le tiers de leur somme; par-là on obtient le résultat le plus probable, comme M. Simpson l'a fait voir par le calcul des probabilités (*Miscellaneous tracts*, 1757). Cependant, quand il y a des observations qui s'écartent considérablement du terme moyen, & qui par-là méritent moins de confiance, il est bon de les rejetter, ou de ne les pas faire entrer dans l'opération pour la même part que les autres; par exemple, s'il y a 4 résultats, dont un s'écarte 3 fois plus que les

les autres du terme moyen, il ne mérite que le tiers de la confiance des autres ; & avant de diviser la somme par 4, on peut diminuer cette somme des deux tiers de ce qu'on voit de trop dans une des quantités données.

DES RESULTATS QUE L'ON DEDUIT DE CHAQUE OBSERVATION.

3933. On a vu dans le livre XIV. la manière de faire toute sorte d'observations, je n'ai pu développer alors les conséquences qu'on en déduit, parce qu'elles supposoient les théories qui n'ont été exposées que dans les livres suivans ; il est temps d'expliquer cette partie essentielle de l'astronomie.

Examen de la marche d'une horloge.

Le mouvement de l'horloge à pendule est la première chose qu'on doit examiner par observation (*960*, *2506*), on se sert pour cet effet ou du soleil ou des étoiles fixes ; quand on se sert du soleil, on cherche le temps vrai qui répond au temps de l'horloge (*960*), on cherche aussi le temps moyen. (*Voyez l'explication des tables du soleil, pag. 16*). On fait la même chose deux ou trois jours après ; & si l'horloge diffère du temps moyen, autant que le premier jour, on est assuré qu'elle est réglée sur le moyen mouvement.

3934. Il est souvent plus commode de recourir aux étoiles, que d'employer le soleil pour régler une horloge : on observe deux jours de suite l'instant du passage d'une étoile au méridien, ou à une lunette fixe, ou bien sa disparition derrière un bâtiment quelconque ; si dans le second jour on trouve *3′ 56″* de moins que dans le premier, on est sûr que l'horloge est réglée. (*955*).

3935. Lorsqu'on connoît la marche d'une horloge, on est en état de trouver & le temps vrai d'une observation (*960*) & les différences d'ascension droite (*2505*), fondemens principaux de toute notre astronomie. C'est par leur moyen qu'on parvient à déterminer la longitude & la latitude d'un astre, c'est-à-dire, sa situation par rapport à l'écliptique & au point équinoxial ; toutes les obser-

vations ſe réduiſent à cela, puiſque ce ſont les termes de comparaiſon que les aſtronomes ont adoptés, par la convention la plus générale, & en même temps la plus naturelle (76, 94).

Ordre des obſervations.

3936. Les premières obſervations par leſquelles doit commencer un obſervateur iſolé, ſont celles de la hauteur du pole (31) & de l'obliquité de l'écliptique (70), j'en ai expliqué la méthode; il ſuffit pour connoître exactement l'obliquité de l'écliptique d'obſerver la déclinaiſon du ſoleil (2582), lorſqu'elle eſt la plus grande au nord & au ſud de l'équateur. La longitude du ſoleil eſt enſuite l'obſervation la plus facile & la plus importante; on détermine ſa déclinaiſon (2582), d'où il eſt aiſé de conclure ſa longitude (853), & ſon aſcenſion droite (872). On paſſe enſuite aux aſcenſions droites des étoiles (877), dont les poſitions doivent ſervir à déterminer celles de toutes les autres planètes. Enfin on compare une planète avec une étoile dont la poſition eſt connue. C'eſt ici l'opération la plus compliquée, ſur-tout quand il s'agit de la lune; je vais donc l'expliquer en détail pour l'uſage de ceux qui n'ont pu fréquenter les grands obſervatoires de l'*Europe*, & apprendre des choſes qui ne ſe ſont guères perpétuées juſqu'ici que par tradition. Je l'appliquerai immédiatement à une obſervation de la lune que je fis à Berlin, dans le temps où M. de la Caille & moi étions chargés de déterminer la diſtance de la lune à la terre, par des obſervations correſpondantes (1649).

Calcul d'une obſervation de la lune dans le méridien.

Obſervation de la lune.

3937. J'OBSERVAI le 23 Février 1752, à Berlin le paſſage du premier bord de la lune au méridien, dans un mural de cinq pieds (2328) à $6^h\ 54'\ 39''$ de temps vrai, & à $6^h\ 56'\ 57''$ le paſſage de l'étoile ζ du taureau. La hauteur méridienne du bord auſtral de la lune à $6^h\ 55'\ 45''$, parut de $57^\circ\ 55'\ 52''$, & celle de l'étoile quand elle paſſa au méridien $58^\circ\ 27'\ 21''$ (*Mém. acad.* 1751, *pag.* 462).

Ces hauteurs ſont dégagées de l'erreur du quart-de-cercle quant au premier point de la diviſion (2556); & celle de la lune eſt corrigée par l'épaiſſeur du fil (2536), mais il en faut ôter 16″ pour l'erreur de la diviſion dans ce point-là (2563), que j'ai vérifiée depuis l'impreſſion de ces obſervations; l'on aura donc la hauteur apparente du bord de la lune $57^\circ\ 55'\ 36''$; nous ne ferons pas uſage de la hauteur de l'étoile dans les calculs ſuivans, puiſque nous connoiſſons l'erreur du quart-de-cercle pour l'appliquer à la hauteur de la lune.

Différence d'aſcenſion droite.

3938. L'horloge étoit réglée ſur le moyen mouvement du ſoleil, ainſi les $2'\ 18''$ de temps écoulées entre le paſſage du bord de la lune & celui de l'étoile, font $0^\circ\ 34'\ 35''\ 6$ (2505), qu'il faut ôter de l'aſcenſion droite apparente de l'étoile pour avoir celle du premier bord de la lune (2507). Si la pendule étoit réglée ſur les étoiles, les $2'\ 18''$ ne feroient que $34'\ 30''$, à raiſon de 15° par heure.

3939. L'aſcenſion droite moyenne de ζ du taureau pour le commencement de 1750, ſuivant le catalogue (*pag.* 206 des tables) eſt de $2^s\ 20^\circ\ 40'\ 40''\ 5$; le mouvement pour dix ans $8'\ 57''\ 5$ (2708); ainſi le mouvement pour 2 ans eſt $1'\ 47''\ 5$, & de $7''\ 8$ depuis le commencement de 1752, juſqu'au 23 Février (*pag.* 224 des tables), donc l'aſcenſion droite moyenne de ζ du taureau étoit $2^s\ 20^\circ\ 42'\ 35''\ 8$.

Aſcenſion droite de l'étoile.

3940. Le lieu du ſoleil étoit alors de $11^s\ 4^\circ \frac{2}{3}$, ainſi l'aberration de l'étoile en aſcenſion droite (2845) étoit $+\ 6''$. Le lieu moyen du nœud étoit $7^s\ 28^\circ\ 47'$, ainſi la nutation en aſcenſion droite (2879) étoit $+\ 16''\ 7$, ſuivant la table que j'en ai donnée (*Connoiſſance des Mouvemens céleſtes* 1764), donc l'aſcenſion droite apparente de l'étoile étoit $2^s\ 20^\circ\ 42'\ 58''\ 3$; ôtant la différence d'aſcenſion droite que nous avons trouvée de $34'\ 35''\ 6$ (3190), nous aurons celle du bord de la lune $2^s 20^\circ\ 8'\ 22'',\ 7$; ſi c'étoit au ſoleil que l'on eût comparé la lune, il faudroit prendre l'aſcenſion droite du ſoleil pour le moment du midi (2507).

Aſcenſion droite du bord de la lune.

3941. La hauteur du bord inférieur de la lune ([a]) 57° 55′ 36″ doit être d'abord diminuée de 37″ pour la réfraction (*pag.* 237 des tables). A l'égard de la parallaxe nous l'appliquerons ci-après. La déclinaison de la lune diminuoit alors de 31″ par heure; ainsi la hauteur de la lune auroit paru plus grande de 0″ 6, si elle eût été observée à 6h 54′ 39″, c'est-à-dire, au moment où le premier bord de la lune passa par le méridien, & où l'ascension droite fut observée; il faut donc ajouter 0″ 6 à la hauteur observée, & l'on aura 57° 54′ 59″ 6 pour la hauteur du bord de la lune dégagée de la réfraction, & réduite au même instant que l'observation du passage. Si l'on vouloit au contraire réduire l'observation de l'ascension droite à la même heure que celle de la hauteur, on se serviroit des tables, *pag.* 93 & 94, pour avoir le temps du passage du centre au méridien, que l'on choisit ordinairement pour l'observation de la hauteur (3948).

Hauteur de la lune.

Parallaxe de hauteur.

3942. La parallaxe horizontale de la lune pour Berlin étoit ce jour-là de 59′ 21″ 6, suivant l'observation même que j'en fis, comparée avec celle de M. de la Caille faite au Cap de Bonne-Espérance (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 109); mais on pourroit également la trouver par les tables de la lune (*pag.* 77 & suiv.), ayant égard à la différence des latitudes, entre Paris & Berlin (*pag.* 96); cette parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur méridienne apparente (augmentée de 16′ 12″ (1284) ou par le sinus de la distance au zénit diminuée de 16′ 12″, tant que la lune est du côté du pole abaissé, par rapport au zénit, donne la parallaxe de hauteur du bord de la lune 31′ 19″, 1 pour la latitude de Berlin, dans le sphéroïde aplati.

3943. La parallaxe 31′ 19″, 1 ajoutée avec la hauteur observée 57° 54′ 59″ 6 donne la hauteur vraie du bord inférieur de la lune 58° 26′ 18″, 7; il faut y ajouter le demi-

([a]) On observe le bord supérieur, si la lune avant son plein se trouve dans les signes descendans 3, 4, 5, 6, 7, 8; ou si après son plein elle est dans les signes ascendans.

diamètre horizontal 16′ 12″, & l'on aura 58° 42′ 31″ pour la hauteur vraie du centre de la lune (a). La hauteur de l'équateur eſt de 37° 28′ 30″, ſuivant un calcul exact des obſervations que je fis pour lors à Berlin; il faut la retrancher de la hauteur vraie de la lune, & il reſte pour la vraie déclinaiſon du centre de la lune 21° 14′ 1″ à 6^{h} 54′ 39″ de temps vrai à Berlin, ou 6^{h} 24′ 0″ temps moyen à Paris. Déclinaiſon vraie.

3944. Le demi-diamètre horizontal de la lune 16′ 12″ diviſé par le coſinus de la déclinaiſon vraie 21° 14′ 1″ donne le demi-diamètre en aſcenſion droite (1515), de 17′ 23″, qu'il faut ajouter à l'aſcenſion droite du premier bord de la lune 2^{s} 20° 8′ 22″, 7 pour avoir celle du centre de la lune 2^{s} 20° 25′ 46″.

3945. Connoiſſant l'aſcenſion droite & la déclinaiſon du centre de la lune avec l'obliquité de l'écliptique pour ce temps-là 23° 28′ 12″ (*Tables du ſoleil, pag.* 5), on trouvera ſa longitude (900) 2^{s} 21° 4′ 46″ & ſa latitude auſtrale 1° 56′ 24″ $\frac{1}{2}$. C'eſt le dernier réſultat de l'obſervation. Longitude & latitude.

3946. Si l'on vouloit ſe ſervir de la hauteur méridienne de l'étoile, obſervée le même jour, on prendroit la différence des hauteurs vraies de la lune & de l'étoile, & l'on appliqueroit cette différence à la déclinaiſon de l'étoile pour avoir celle de lune; on éviteroit ſeulement par ce moyen la ſuppoſition d'une connoiſſance exacte de la hauteur de l'équateur, pour y ſubſtituer celle de la déclinaiſon de l'étoile.

3947. Pour faire jouir la poſtérité de tout l'avantage que peuvent avoir nos obſervations, il ſeroit à ſouhaiter que les catalogues qu'on en donne renfermaſſent toujours l'obſervation même, les élémens du calcul, & le réſultat. Par exemple, en rapportant des obſervations de la lune on doit faire une table qui contienne au moins les 12 Forme d'une table d'obſervations.

(a) Si l'on eût calculé la parallaxe ſur la hauteur du centre, il auroit fallu employer le diamètre augmenté à raiſon de ſa hauteur, page 92 des tables, & l'accourciſſement de la réfraction, page 95; c'eſt pourquoi je préfère la parallaxe du bord.

colonnes ſuivantes, à peu-près comme dans les obſervations que M. Bailly a calculées (*Mém.* 1767, *pag.* 25).

1. Le jour, l'heure, la minute & la ſeconde du paſſage d'un des bords de la lune au méridien, en temps vrai & même en temps moyen, ce qui eſt très commode pour les calculateurs.
2. L'avancement ou le retardement diurne de la pendule ſur le moyen mouvement du ſoleil, ou ſur les étoiles.
3. Le paſſage de l'étoile à laquelle on a comparé la lune.
4. L'aſcenſion droite apparente de l'étoile, calculée.
5. L'aſcenſion droite du bord de la lune, qui en réſulte.
6. La parallaxe horizontale de la lune, tirée des tables.
7. Son demi diamètre en aſc. dr. & même en hauteur.
8. La diſtance au zénit du bord ſupérieur ou inférieur de la lune au moment du paſſage du centre de la lune par le méridien.
9. La diſtance au zénit du centre de la lune, corrigée par la réfraction & la parallaxe, & réduite à l'inſtant du paſſage du bord qu'on a obſervé dans le méridien.
10. La déclinaiſon vraie de la lune qui en réſulte, pour le temps du paſſage du bord de la lune au méridien.
11. La longitude vraie du centre de la lune pour le moment de l'obſervation, comparée avec celle que donnent les tables.
12. La latitude vraie du centre de la lune pour le moment de l'obſervation, comparée avec celle des tables.

Par ce moyen l'on met ſous les yeux de ceux qui voudront en faire uſage, toutes les choſes néceſſaires pour vérifier le calcul, ou réduire l'obſervation avec d'autres élémens, lorſqu'on aura des tables plus exactes, ou qu'on aura lieu de ſuſpecter une obſervation & qu'on voudra la vérifier.

3948. J'ai mieux aimé dans l'exemple & dans les préceptes ci-deſſus, chercher la déclinaiſon pour le temps où le bord a été obſervé, que de chercher l'aſcenſion droite pour le paſſage du centre de la lune, 1°, parce que j'aime mieux choiſir un inſtant qui eſt donné par une obſervation immédiate ; 2°, parce que le calcul eſt un peu plus court ;

3°, parce que la réduction eſt beaucoup moindre, quelquefois nulle; 4°, parce qu'on n'a pas toujours la hauteur obſervée dans le moment même où le centre paſſoit par le méridien.

3949. Le calcul de l'obſervation d'une éclipſe de ſoleil ou d'étoile par la lune, ſe réduit à trouver le temps de la conjonction vraie & la latitude au temps de la conjonction (1971); il en eſt de même du calcul d'un paſſage de Vénus ou de Mercure ſur le ſoleil (2152). Calcul d'une éclipſe obſervée.

Calculer l'oppoſition d'une Planète ſupérieure, par des Obſervations.

3950. Les oppoſitions des planètes ſupérieures & les conjonctions des planètes inférieures, ſont les circonſtances les plus favorables pour déterminer leurs orbites & rectifier leurs élémens (1296, 2623); il eſt donc néceſſaire de donner ici un exemple de ces ſortes de calculs, aſſez détaillé pour que l'on y puiſſe apprendre tout ce qu'il faut faire en pareille occaſion. Le calcul eſt à peu-près le même que pour trouver le temps de la conjonction dans un paſſage de Vénus ſur le ſoleil (2044), cependant les détails ſont aſſez différens pour mériter une explication particulière.

3951. Je prendrai pour exemple l'oppoſition de Saturne que j'ai obſervée au mois d'Octobre 1763, en comparant Saturne avec l'étoile ϐ du Bélier. Cette étoile paſſa le 24, à $11^h\ 45'\ 2''$ de temps vrai, au fil de ma lunette méridienne (2387), & Saturne y paſſa $32'\ 15''$ plus tard. Cet intervalle de temps converti en degrés (2505) donne $8^\circ\ 5'\ 4''\frac{1}{2}$, j'y ajoute $2''\frac{1}{2}$, parce que l'horloge retardoit de $8''$ par jour (2506). On peut auſſi commencer à réduire cet intervalle de temps obſervé en temps moyen, avant que de le convertir en degrés. On trouve $8^\circ\ 5'\ 7''$ pour la différence d'aſcenſion droite entre Saturne & ϐ du Bélier. Obſervation de Saturne en oppoſition.

3952. L'aſcenſion droite moyenne de cette étoile en 1750, ſuivant le catalogue (page 204 des Tables), étoit

de 25° 13′ 2″ 1. Le mouvement de préceſſion en aſcenſion droite (2708), juſqu'au 24 Octobre 1763, étoit de 11′ 19″ 7 (page 228 des Tables); ainſi l'aſcenſion droite moyenne de l'étoile étoit 25° 24′ 21″ 8. L'aberration en aſcenſion droite (2848) étoit alors + 19″ 7 (Tables page 230), & la nutation en aſcenſion droite — 6″ 7 (2876); donc l'aſcenſion droite apparente de l'étoile étoit de 25° 24′ 35″ le 24 Oct. 1763.

3953. L'étoile ayant précédé Saturne au méridien, l'aſcenſion droite de Saturne étoit la plus grande des deux; on ajoutera donc la différence obſervée 8° 5′ 7″ avec l'aſcenſion droite apparente de l'étoile, & l'on aura 33° 29′ 42″ pour l'aſcenſ. droite app. de Saturne le 24 Oct. 1763 à 12h 17′ 17″ de temps vrai, 12h 1′ 37″ de temps moyen.

Aſcenſion droite de Saturne.

3954. Le même jour j'obſervai avec un quart-de-cercle de trois pieds (2311) la hauteur méridienne du centre de Saturne; & après toutes les réductions néceſſaires (2582), je trouvai la déclinaiſon de Saturne 10° 35′ 20″ boréale. Si l'on n'avoit obſervé que la hauteur du bord de Saturne, il faudroit chercher ſon diamètre pour le jour donné, en diſant, la diſtance actuelle de Saturne à la terre (1146) eſt à ſa diſtance moyenne (1222), comme ſon demi-diamètre moyen (1393) eſt à celui qu'il faut employer. Si l'on veut auſſi tenir compte de la parallaxe, on dira la diſtance de Saturne à la terre eſt à la diſtance moyenne du ſoleil à la terre, comme 9″ ſont à la parallaxe horizontale; qu'il faut multiplier par le coſinus de la hauteur pour avoir la parallaxe de hauteur, qu'on ajoute à la hauteur obſervée.

Parallaxe.

3955. Connoiſſant l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de Saturne, on trouve ſa longitude (900) 1s 4° 50′ 57″, & ſa latitude 2° 43′ 25″ auſtrale; en ſuppoſant avec M. de la Caille l'obliquité apparente de l'écliptique 23° 28′ 21″ 7 (2861); elle eſt un peu plus petite dans mes tables, (*pag.* 6).

Longitude & latitude obſervées.

3956. On pourroit auſſi trouver le lieu de la planète ſans le ſecours d'une étoile, par le temps vrai de ſon paſſage au méridien, c'eſt-à-dire, en la comparant ſeulement au

Méthode par le temps vrai.

au ſoleil ; mais il faudroit, 1°, avoir le temps vrai avec une extrême exactitude, c'eſt-à-dire, à une demie-ſeconde, 2°, ſuppoſer le mouvement de l'horloge uniforme à un quart de ſeconde près, dans un eſpace de 12 & de 24 heures ; 3°, être aſſuré avec la même préciſion de l'erreur du mural ou de la lunette méridienne à la hauteur du ſoleil & à celle de la planète, quoique ces hauteurs ſoient ſouvent très-différentes ; 4°, ſuppoſer encore que cette erreur eſt la même le jour & la nuit, à midi & à minuit ; 5°, connoître le lieu du ſoleil avec la même préciſion que celui de l'étoile. Toutes ces ſuppoſitions ſont difficiles à admettre ; on en ſauveroit quelques-unes en prenant des hauteurs correſpondantes de la planète & du ſoleil ; mais ſi l'on vouloit ſe livrer à un travail auſſi pénible, il vaudroit encore mieux obſerver les hauteurs correſpondantes d'une étoile, ce qui ſeroit bien plus exact.

3957. L'eſprit de la méthode que j'ai coutume d'employer, conſiſte à déterminer le lieu de la planète par le moyen d'une étoile, & à n'employer le lieu du ſoleil que pour ſavoir à quelle heure le lieu de la planète en différera de *6* ſignes ; par ce moyen une erreur de quelques ſecondes ſur le temps vrai & ſur le lieu du ſoleil n'influe pas ſenſiblement ſur le réſultat du calcul ; car ſi le temps de l'oppoſition eſt ſujet à une petite erreur, qui vient de celle du lieu du ſoleil, la longitude de la planète n'en eſt pas moins exacte pour ce temps-là, puiſqu'elle ne dépend que de l'étoile à laquelle on a comparé la planète. Eſprit de la méthode que nous préférons.

3958. Dans l'exemple qui précède, la longitude du ſoleil, calculée pour $12^h\ 1'\ 37''$ de temps moyen, ſe trouve de $7^s\ 1^\circ\ 19'\ 23''$, en ſorte que le lieu de Saturne déduit de l'obſervation étoit plus avancé de $3^\circ\ 31'\ 34''$ que le point oppoſé au ſoleil ; il s'agit de ſavoir quel jour & à quelle heure ces longitudes ſe ſont trouvées d'accord, car ce ſera le moment de l'oppoſition. Il eſt donc néceſſaire de connoître le mouvement diurne de Saturne & celui du ſoleil ; on peut très-bien les calculer par les tables ; car dans un intervalle de quelques jours le mouvement calculé ne diffère pas du mouvement obſervé ; mais Elongation obſervée.

Mouvement de Saturne au soleil. on peut aussi emprunter ce mouvement de l'observation ; & c'est ce que j'ai fait dans cet exemple ; car ayant fait les mêmes observations quelques jours après l'opposition, je reconnus que la longitue de Saturne avoit diminué chaque jour (ou en 24 heures vraies) de 4′ 50″, 1, tandis que celle du soleil calculée par les tables augmentoit de 59′ 58″ 5, la somme 64′ 48′ 6 est le mouvement relatif, ou la quantité dont Saturne se rapprochoit tous les jours de son opposition au soleil ; on trouvera donc l'instant où il y est arrivé, en faisant cette règle de trois, 64′ 48″ 6 sont à 24^h ou 86400″ comme 3° 31′ 34″, distance observée de Saturne à son opposition, sont à 78^h 20′ 41″, qui ajoutées

Temps de l'opposition. au temps de l'observation, 24 Octobre 12^h 17′ 17″ donnent pour le temps vrai de l'opposition vraie, le 27 Oct. 18^h 37′ 58″.

3959. En considérant séparément le mouvement de Saturne rétrograde, qui est de 4′ 50″, 1 par jour & le mouvement du soleil, direct, de 59′ 58″ 5, il est aisé de trouver leur longitude pour le temps de l'opposition ; par exemple, 24^h 0′ 0″ : 4′ 50″ 1 : : 78^h 20′ 41″ : 15′ 47″ mouvement de Saturne depuis le moment de l'observation jusqu'à celui de l'opposition ; ce mouvement étant ôté de sa longitude observée 1^s 4° 50′ 57″ (parce que la longitude diminuoit d'un jour à l'autre), donne la longitude de Saturne au moment de l'opposition 1^s 4° 35′ 10″. On aura de

Longitude en opposition. même la longitude du soleil en faisant une semblable proportion, 24^h : 59′ 58″ $\frac{1}{2}$: : 78^h 20′ $\frac{2}{3}$: 3° 15′ 47″, qu'on ajoutera avec la longitude du soleil au moment de l'observation 7^s 1° 19′ 23″, & l'on aura 7^s 4° 35′ 10″ pour la longitude du soleil au moment de l'opposition ; cette longitude est en effet exactement opposée à celle de Saturne, ce qui sert de vérification aux calculs de ces deux articles.

3960. Il faut aussi trouver la latitude de Saturne pour le temps de l'opposition, au moyen de la latitude observée 2° 43′ 25″ ; & pour cela il faut connoître le mouvement diurne en latitude, ou par les tables, ou par l'observation ; mais lorsque ce mouvement est très-petit, il est plus exact d'y employer le calcul des tables ; c'est ainsi que je trouve

que la latitude de Saturne dut augmenter de 6″ depuis le moment de l'obſervation juſqu'à celui de l'oppoſition ; donc la latitude dut être de 2° 43′ 31″ pour le moment de l'oppoſition. Ces réſultats ne diffèrent pas ſenſiblement de ceux que j'ai inſérés dans la table des oppoſitions (*T. II. pag.* 180), quoiqu'ils ayent été trouvés par des obſervations différentes.

3961. On peut mettre encore plus d'exactitude dans le calcul, ſi l'on cherche le temps & le lieu de l'oppoſition en y employant pluſieurs jours d'obſervations ; on calcule pour chaque obſervation la longitude géocentrique par les tables, on la compare avec la longitude obſervée, & l'on a l'erreur des tables pour chaque obſervation, on prend la quantité moyenne entre toutes ces différences de l'obſervation aux tables ; & l'on s'en ſert pour corriger le calcul ; après quoi l'on cherche le temps de l'oppoſition par les tables ainſi corrigées, comme nous avons calculé le temps d'une conjonction (2044). Cette méthode eſt beaucoup plus longue, mais elle eſt auſſi plus parfaite, puiſqu'elle emploie dans un même réſultat pluſieurs jours d'obſervations, au lieu d'un ſeul (3953), ce qui diminue la petite incertitude de chaque obſervation. Au lieu de 15 ou 20″ d'erreur que l'on peut craindre quand on n'emploie qu'une ſeule obſervation, il eſt probable qu'on aura une préciſion de 5 à 6″ en employant dans le calcul quatre ou cinq jours d'obſervations, ſurtout ſi la planète a été comparée à différentes étoiles.

Méthode plus parfaite.

Préciſion de ces calculs.

3962. Ptolomée employoit dans ſes calculs les oppoſitions des planètes par rapport au lieu moyen du ſoleil, & non par rapport à ſon lieu vrai & apparent ; il regardoit la différence qui pouvoit en réſulter comme étant fort légere, & il y trouvoit l'avantage de ſimplifier les démonſtrations & d'abréger les calculs ; Copernic & Tycho ſuivirent ſon exemple, & j'ai cru devoir en avertir ici, parce que l'on pourroit quelquefois s'y tromper dans la lecture de ces auteurs ; Képler fut le premier qui fit voir qu'on devoit néceſſairement employer le lieu apparent, c'eſt-à-dire, le corps même du ſoleil &

Les Anciens employoient le lieu moyen du ſoleil.

y comparer les planètes. (*Myſterium coſmogr. cap.* 15. *De ſtella Martis cap.* 1).

Autre méthode.

3963. La méthode que je viens d'expliquer (3953) pour trouver le lieu d'une planète eſt celle qu'on adopte généralement aujourd'hui ; lorſque Tycho-Brahé, Hévélius, Flamſteed obſervoient les poſitions des planètes par le moyen de leurs diſtances à deux étoiles fixes, le calcul étoit beaucoup plus compliqué ; j'en ai donné l'explication (914).

Avantages des oppoſitions.

3964. Les obſervations faites hors des oppoſitions ont été très-utiles pour déterminer les diſtances des planètes au ſoleil (1216) ; mais aujourd'hui l'on ſuppoſe généralement que ces diſtances ſont connues avec toute l'exactitude poſſible, par la règle de Képler (1222), dont la vérité eſt ſuffiſamment conſtatée ; c'eſt ce qui fait qu'on n'obſerve preſque plus les planètes, ſi ce n'eſt dans leurs oppoſitions : on y trouve l'avantage de ne point employer dans ces calculs la théorie du ſoleil; il en faut excepter Mercure, dont les plus grandes digreſſions ſont eſſentielles pour fixer ſa théorie (1267, 1286).

3965. La méthode que l'on vient d'expliquer pour le calcul des oppoſitions eſt la même pour celui des conjonctions de Vénus au ſoleil, qui tiennent lieu d'oppoſitions pour la théorie de cette planète (*T. II. pag.* 169).

Après avoir parlé de toutes les obſervations qui ſe font ſur terre pour le progrès de l'aſtronomie, je vais parler des obſervations qui ſe font en mer pour trouver les longitudes par le moyen de la lune ; objet intéreſſant, qui mérite bien de terminer cet ouvrage.

USAGE DES MOUVEMENS DE LA LUNE pour trouver les longitudes en Mer.

3966. Il eſt de la dernière importance pour le bien du commerce maritime, & pour le ſalut des hommes qui s'y conſacrent, de pouvoir trouver en pleine mer le degré de longitude où l'on eſt (54). Ce problême ſe réduit à ſavoir quelle heure il eſt ſur le vaiſſeau, & quelle heure il

eſt au lieu du départ (par exemple, à Paris) ; il n'eſt pas difficile de trouver l'heure qu'il eſt ſur un vaiſſeau en obſervant la hauteur du ſoleil ou d'une étoile (1030, *3995*) ; la difficulté ſe réduit donc à trouver en tout temps & en pleine mer l'heure qu'il eſt à Paris.

Prix propoſés pour les longitudes.

Philippe III, qui monta ſur le trône d'Eſpagne en 1598, fut le premier qui, convaincu de l'importance des longitudes, propoſa un prix en faveur de celui qui en feroit la découverte. Les états de Hollande imitèrent bientôt ſon exemple (MORIN, *longit. ſci. pag.* 1). Le Parlement d'Angleterre aſſigna en 1714 une récompenſe de 20000 liv. ſterl. ou *469668* livres de France, pour celui qui trouveroit la longitude à un demi-degré près (*Connoiſſ. des Mouv. céleſtes*, 1765) ; & M. le Duc d'Orléans, Régent de France, en promit une de cent mille livres par une lettre du 15 Mars 1716, écrite à M. Bignon, & qui eſt au Secretariat de l'Académie ; il en eſt parlé dans l'*Hiſt. de l'acad.* 1722, *pag.* 102. Ces encouragemens, joints à l'émulation naturelle des ſavans, ont produit de temps à autres des efforts utiles pour la découverte des longitudes.

Eſſais pour les trouver par l'horlogerie.

3967. Pour trouver l'heure qu'il eſt à Paris, le navigateur n'auroit beſoin que d'une montre aſſez bien réglée pour ne pas varier de plus de 2 minutes dans le cours de 2 mois de navigation. Gemma Friſius, Metius, & d'autres Savans de Hollande, crurent au commencement du dernier ſiècle qu'on en viendroit à bout, & l'on fit pluſieurs eſſais, mais inutilement. M. Sully, Horloger de Paris, travailla de nouveau à une horloge marine en 1726 ; enfin M. Harriſon, qui s'occupoit en Angleterre de cette même recherche depuis 1726, a fait l'épreuve en 1762 d'une nouvelle montre marine, qui paroît remplir l'objet qu'on s'en étoit propoſé ; j'en ai rendu compte fort au long dans la *Connoiſſance des Mouvemens céleſtes*, pour 1765 & 1767. M. Berthoud, qui avoit donné ſes idées ſur cette matière dans ſes Eſſais ſur l'horlogerie, a exécuté d'excellentes montres, dont la vérification a été faite en mer, par ordre du Miniſtère, & dont le ſuccès a été récompenſé.

M. Le Roy en a fait d'autres, dont la defcription & les épreuves ont été publiées dans l'ouvrage de M. Caffini le fils, & que l'académie a couronnées; & l'on fe prépare à faire encore (cette année 1771) un nouveau voyage & de nouvelles épreuves pour trouver ainfi la longitude par le moyen de l'horlogerie.

3968. Mais pour favoir en pleine mer l'heure qu'il eft à Paris, l'on n'a pas effentiellement befoin de ces montres marines; on peut la trouver par le moyen de l'aftronomie, en obfervant les éclipfes (3974), & furtout la fituation de la lune; cette méthode, à certains égards, eft encore plus importante, parce qu'elle peut fervir à rectifier même l'horloge marine dans le cas où celle-ci viendroit à fe déranger, & qu'en tout temps ces obfervations peuvent fervir à vérifier la régularité des montres. Suppofons que, par des tables bien calculées & bien sûres, l'on fache qu'à $2^h\,4'$ temps vrai à Paris, la longitude de la lune fera de $0^s\,10^o$, & qu'étant en pleine mer j'aye trouvé par mon obfervation que la lune a précifément $0^s\,10^o$ de longitude, je ferai sûr qu'il eft $2^h\,4'$ à Paris, auffi bien que fi une excellente montre réglée à Paris me l'avoit indiqué.

On la trouve par le moyen de la lune.

3969. Appian paffe pour le premier qui ait fongé à employer ainfi les obfervations de la lune à trouver les longitudes; Gemma Frifius, Médecin & Mathématiciens d'Anvers, en parla fur-tout dans un ouvrage compofé en 1530: *De principiis aftronomiæ & Cofmographiæ, deque ufu globi ab eodem editi*, édition de Cologne, 1578, *pag.* 58. c. 17; il explique d'abord, *quâ arte locus lunæ vifæ, vel cujuscumque ftellæ ignotæ fitus deprehendatur. Altitudinem ejufdem fupra horifontem addifce, artificio quadrantis vel cujufcumque alterius inftrumenti aftronomici, præterea ejufdem lunæ diftantiam ab aliquo alio fyderum, hujufque fyderis altitudinem.* Après cela il enfeigne la manière d'en conclure le lieu de la lune par le moyen du globe, ce qu'on peut exécuter auffi par la trigonométrie; après quoi, il dit, *pag. 60. Invento jam per obfervationem loco lunæ ut diximus, fimul confideranda eft diligentiffime per globum hora illa qua luna locum talem occupat, deinde ex ephe-*

meridibus rite calculatis, aut ex tabulis Alfonsi aut alterius cujuspiam docti mathematici, exquisitissimo calculo colligenda est hora qua luna talem locum per observationem deprehensum attingere deberet, idque pro loco aliquo certo & cognito cujus longitudo nota statuatur..... Colliges tandem longitudinem loci ignoti ab insulis fortunatis.

Képler parla aussi beaucoup de cet avantage de la lune (*Tab. Rudolph. pag.* 37 & 42), & après lui Longomontanus (*Astron. Dan. pag.* 194, édit. de 1622, *pag.* 318, édit. de 1640). On trouve dans ces différens auteurs la manière de mesurer la distance de la lune à une étoile, pour en conclure la longitude de la lune; de comparer cette longitude avec celle qui est calculée par les tables, & de trouver (par le moyen de la différence entre ces deux longitudes) la distance où l'on est du méridien des tables.

3970. MORIN, Professeur royal de Mathématiques, & Médecin de Paris, corrigea la méthode indiquée par Képler; il la rendit plus générale & la proposa au Cardinal de Richelieu, qui ordonna le 6 Février 1634, que la méthode de Morin seroit examinée par des Commissaires qu'il nomma pour cet effet. Parmi ces Commissaires il y avoit cinq Mathématiciens, Pascal, Mydorge, Boulenger & Beaugrand : ils s'assemblèrent à l'Arsenal le 30 Mars; & après avoir entendu les démonstrations de Morin, ils convinrent de la bonté & de l'utilité de sa méthode, (*Longit. Scientia, pag.* 79 & 120); mais dans la suite ils reconnurent que l'idée n'étoit pas assez neuve, ni les tables assez parfaites pour qu'on pût dire que Morin avoit trouvé le secret des longitudes; & l'imperfection des tables a continué pendant tout le dernier siècle d'être un obstacle à l'utilité de cette méthode.

Morin perfectionne cette méthode.

3971. M. HALLEY, aussi habile Navigateur que célèbre astronome, avoit jugé par sa propre expérience que toutes les méthodes proposées, pour trouver la longitude en mer, étoient impraticables, excepté celle où l'on emploie les mouvemens de la lune; en conséquence,

Tentative de M. Halley.

il avoit fait tous ses efforts pour surmonter les difficultés qui s'opposoient à l'usage de cette méthode. Voici à peu-près ce qu'il en dit (*Astron. Carol.* 1710, *append. pag.* 67) : « J'ai trouvé, par expérience, qu'avec un peu de » pratique on peut se servir sur mer d'une lunette de 5 à » 6 pieds, & observer les appulses ou les occultations » des étoiles fixes par la lune, lorsque la mer n'est pas » extrêmement agitée, sur-tout dans les quadratures où » la lumière de la lune n'est pas assez forte pour effacer » celle des étoiles. Le mouvement de la lune est si prompt » que sa longitude change de 2 minutes en 4 minutes de » temps, c'est-à-dire, pour un degré de longitude. Il est » évident que si nous sommes en état de prédire le temps » vrai de l'occultation ou de l'appulse d'une étoile fixe » pour un méridien quelconque, nous saurons à quelle » distance nous sommes de ce méridien, en comparant » avec ce temps vrai calculé, le temps auquel nous au- » rons fait en mer la même observation. Mais après avoir » bien examiné les calculs faits sur les tables Carolines » de Street, les meilleures qu'on ait eues jusqu'ici, & » les avoir comparées avec plusieurs observations exac- » tes, je trouve que ces tables ne représentent pas avec » une exactitude suffisante les mouvemens observés ; & il » y a des cas où l'on se tromperoit de 100 lieues sur la » longitude observée, si l'on comptoit sur l'exactitude » des tables ».

3972. Ce fut par cette considération que M. Halley songea à corriger les tables de la lune par le moyen de la période de 18 ans (1501). Il publia lui-même plusieurs observations de la lune qu'il avoit faites; & il espéroit trouver parmi celles qui se faisoient sans cesse à Gréenwich & à Paris, lorsqu'on les publieroit, une suite d'observations suffisantes pour prédire en tout temps le lieu de la lune; il assuroit même déja que toutes les fois qu'il avoit pu appercevoir une étoile près de la lune, il avoit déterminé sa longitude & corrigé les erreurs inévitables dans l'estime, pendant un long voyage. Dans la théorie physique de la lune dressée par Newton, & dont Halley venoit

venoit d'avoir connoiſſance ; les défauts des tables ſont tellement corrigés, dit-il, « qu'on eſpère, que l'erreur du » lieu calculé paſſera rarement 4′ ; ce qui ſera peut-être » ſuffiſant pour l'uſage de la navigation ».

3973. Halley s'en tenoit aux appulſes & aux occultations d'étoiles, parce qu'on n'avoit alors aucun inſtrument propre à comparer la lune aux étoiles qui en étoient éloignées : depuis ce temps-là l'octant imaginé en 1731 par Hadley, a donné un moyen facile de meſurer les diſtances ſur mer à une ou deux minutes près, auſſi bien que les hauteurs de la lune ; ce qui fournit pluſieurs méthodes pour déterminer le lieu de la lune en mer.

3974. Les éclipſes de lune, les éclipſes de ſoleil, les conjonctions de la lune aux étoiles, & leurs éclipſes ſont la manière la plus naturelle de trouver la longitude, & celle qui fut employée le plus anciennement. Pour les éclipſes de lune (2472), on cherche ordinairement par l'obſervation de l'entrée & de la ſortie d'une même tache, le temps du milieu de l'éclipſe ; on compare ce temps obſervé avec celui que donne le calcul pour le méridien des tables, & la différence des temps convertie en degrés donne la différence de longitude cherchée. Les éclipſes du premier ſatellite de Jupiter peuvent s'employer au même objet ; mais il eſt fort difficile de les obſerver en mer, à moins qu'on ne ſoit dans une chaiſe marine ſuſpendue, comme celle que M. Irwin fit exécuter en Angleterre vers 1760, & dont l'idée ſe trouve en entier dans le *Coſmolabe de Jacques Beſſon*, Paris 1567. Uſage des éclipſes.

Pour les éclipſes de ſoleil ou d'étoiles on cherche le temps vrai de la conjonction vraie par le moyen de l'obſervation : ce temps vrai trouvé pour le lieu où l'on obſerve, diffère de celui qui eſt donné par le calcul, pour le méridien des tables, ou de celui qu'on y a obſervé, & la différence eſt celle des deux méridiens (1971, *& ſuiv.*).

3975. La méthode des diſtances de la lune au ſoleil ou à une étoile, eſt d'un uſage beaucoup plus général. Elle fut propoſée par Képler, elle a été ſuivie par M. Halley & enſuite par M. l'Abbé de la Caille qui l'a perfectionnée Longitude par les diſtances.

& simplifiée (*Ephem. de* 1755 *à* 1764); M. le Monnier lui-même paroît l'avoir adoptée (*Instit. astr. pag.* 320, *Observations*, *L.* 1. Paris 1751 in-fol.). M. Maskelyne, habile astronome, de la Société royale de Londres, envoyé à l'Isle de Ste Hélene en 1761 par le Roi d'Angleterre, ayant éprouvé & vérifié l'exactitude de cette méthode, l'a recommandée aux Astronomes & aux Marins de la manière la plus pressante dans son livre intitulé, *British Mariner's Guide. London*, 1763, *in*-4°. où il donne des préceptes nouveaux & des méthodes faciles pour en faire le calcul; enfin on calcule en Angleterre depuis 1767 un almanach nautique, tel que M. de la Caille l'avoit proposé, & qui est uniquement fondé sur cette méthode des distances.

Instrumens pour la mer.

3976. Les instrumens avec lesquels on peut observer ces distances en mer, & sur-tout l'octant de réflexion, (2458) sont décrits dans le recueil des machines de l'académie, tom. VI, dans les transactions philosophiques de 1732, (imprimées en François à Paris, n° 420, 425); dans les mémoires du P. Pézenas; dans le Traité de Navigation de M. de la Caille; dans l'Optique de Smith, imprimée en François à Brest & à Avignon en 1767, & dans deux ouvrages de M. d'Après & de M. de Bory, qui contiennent la description & l'usage de l'octant de M. Hadley. M. de Charnière a proposé d'y employer un héliomètre qui eût plusieurs degrés d'amplitude, & qu'il appelle *Mégamètre*; il en a fait exécuter qui ont fort bien réussi. Je supposerai donc qu'on observe la distance du bord de la lune à une étoile ou au bord du soleil; cette distance, qui est accourcie par les réfractions, & modifiée encore par la parallaxe de la lune, doit être corrigée ou dégagée de cette double inégalité, pour qu'on ait la distance vraie : ce sont ces deux corrections qui en font la principale difficulté, comme je le dirai bientôt.

Avantages de cette méthode.

3977. Cette méthode des distances a l'avantage de ne dépendre essentiellement que d'une seule observation de distance; elle ne suppose pas la hauteur connue avec une extrême précision; elle dépend très-peu de la décli-

naiſon de la lune, & de la hauteur du pole; elle n'exige pas qu'on ait un horizon *clair-fin*, c'eſt-à-dire, bien dégagé des vapeurs, elle ne ſuppoſe pas des calculs auſſi longs que ceux de l'aſcenſion droite de la lune; enfin la réduction de la diſtance apparente en diſtance vraie, à raiſon de la réfraction & de la parallaxe, ſe peut faire avec la règle & le compas par une opération graphique (*3992*). Tous ces avantages me paroiſſent prouver démonſtrativement que cette méthode, lorſqu'on peut l'employer, eſt de beaucoup préférable à celle des hauteurs de la lune: je parlerai cependant de celle-ci (*3996*), parce qu'il y a des cas où l'on peut obſerver la hauteur de la lune & où l'on ne pourroit pas meſurer ſa diſtance à une étoile.

3978. Pour calculer la diſtance de la lune à une étoile, on cherche par les tables de la lune ſa longitude pour le temps donné; on prend dans le catalogue celle de l'étoile; on cherche également les latitudes, ce qui donne les diſtances au pole, & l'on forme un triangle au pole de l'écliptique, à l'étoile & à la lune, que l'on réſout par les deux analogies ſuivantes (*3696*): le rayon eſt au coſinus de la différence des longitudes, comme la tangente de la plus petite des deux diſtances au pole boréal de l'écliptique & à la tangente du ſegment. On retranche ce ſegment de la plus grande des deux diſtances au pole boréal de l'écliptique, pourvu que la différence des longitudes ne paſſe pas 90°, & l'on a le ſecond ſegment; après quoi l'on fait cette ſeconde proportion: le coſinus du premier ſegment eſt au coſinus du ſecond, comme le coſinus de la plus petite diſtance au pole eſt au coſinus de la diſtance entre la lune & l'étoile. Calcul de la diſtance.

Si au lieu d'une étoile il s'agit du ſoleil auquel on veuille comparer la lune, les deux proportions précédentes ſe réduiſent à la ſuivante: le rayon eſt au coſinus de la différence des deux longitudes, comme le coſinus de la latitude de la lune eſt au coſinus de la diſtance cherchée.

Comme dans l'obſervation l'on ne meſure ordinairement que la diſtance du bord de la lune au bord du ſoleil qui en eſt le plus proche, il faut ôter de la diſtance cal-

culée la ſomme des demi-diamètres du ſoleil & de la lune ; pour avoir une diſtance que l'on puiſſe comparer à celle qui s'obſervera ſur mer. S'il s'agit d'une étoile, comme on eſt obligé de prendre le bord éclairé de la lune, on ôte le demi-diamètre de la lune de la diſtance calculée lorſque la lune eſt croiſſante & plus avancée en longitude que l'étoile, ou décroiſſante & moins avancée que l'étoile ; au contraire on ajoute le demi-diamètre horizontal à la diſtance calculée, lorſque la lune n'étant pas encore pleine, l'étoile a une plus grande longitude, ou que la lune ayant paſſé l'oppoſition eſt plus avancée que l'étoile.

Autre méthode.

3979. On peut auſſi trouver la diſtance de la lune à une étoile, par la règle de M. Maskelyne, (*Phil. tranſ.* vol. 54 pour 1764, *pag.* 274), en faiſant les deux opérations ſuivantes.

Le rayon eſt au coſinus de la différence des longitudes de la lune & de l'étoile, comme le coſinus de leur différence en latitude eſt au coſinus de la diſtance, à peu-près. Cette règle revient au même que celle qu'on emploie pour le ſoleil ; mais quand la lune & l'étoile ont chacune leur latitude, on peut corriger la diſtance de la manière ſuivante. Au logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144 ajoutez ceux des ſinus des deux latitudes de la lune & de l'étoile, & du ſinus verſe de la différence de longitude, & le complément du logar. ſinus de la diſtance ; la ſomme ſera le log. d'un nombre de ſecondes, qu'il faut ôter de la diſtance, trouvée à peu-près par la première analogie. Avec cette règle on ne peut avoir que 4″ d'erreur, en ſuppoſant même la latitude de la lune de 5°, & celle de l'étoile de 10°.

Troiſième méthode.

Lorſque l'on eſt obligé de calculer une diſtance telle que des coſinus qui varient beaucoup, en font trouver d'autres qui varient très-peu, les règles précédentes ne ſont pas aſſez exactes ; on peut recourir alors à la formule de M. Murdoch (3696). Soit g le ſinus d'un côté AC (*fig.* 327) h le ſinus de l'autre côté CL, d le ſinus de la demi-différence des deux côtés $= \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} LI$, a le ſinus de la moitié de l'angle compris C, x le ſinus de la

Fig. 327.

moitié du troisième côté AL, on aura $xx = hgaa + dd$. Pour le démontrer, je suppose $AF = AQ = 90°$; des points H, A, Q, je tire sur le rayon POC qui est la commune section des plans des cercles CQ & CF, les perpendiculaires HS, AO, QP, qui sont les sinus des arcs correspondans, & égales à LS, BO, FP, & je tire les droites HL, AB, QF, & les diagonales AL, HB. Alors par les triangles semblables QPF, AOB, HSL, j'ai ces deux proportions $QF : QP :: HL : SH$, & $QF : QP :: AB : AO$, ce qui donne $HL = 2ah$ & $AB = 2ag$; mais par la propriété du quadrilatère $HLAI$ qui est sur la circonférence d'un petit cercle de la sphère, on a $LB . HA + HL . AB = AL . HB$, ou $LB^2 + HL . AB = AL^2$, & substituant les valeurs précédentes $4d^2 + 2ah . 2ag = 4x^2$, donc $x^2 = hgaa + dd$.

Exemple. Je suppose que les distances des astres au pole soient de 30° & de 80°, & l'angle compris, c'est-à-dire, la différence des longitudes, de 110°.

Log. sin. 30°...	96989700	
Log. sin. 80°...	99933515	
2 Log. sin. 55°...	98267290	
Log. $hgaa$...	9,5190505.	Nombre 0,330408
2 Log. sin. 25°...	92518966.	dd = 0,178606
Log. somme....	97067297.	0,509014
Moitié.....	98533648.	45° 31′
Double, ou distance cherchée...		91° 2′

3980. Quand on connoît par les tables la distance vraie, il faut l'avoir aussi par observation, c'est-à dire, qu'il faut la conclure de la distance apparente observée, en ajoutant l'accourcissement de réfraction à la distance observée, plus ou moins l'effet de la parallaxe. On peut négliger en mer l'effet de la réfraction, quand les deux astres ont plus de 60° de hauteur; mais s'ils sont moins élevés & qu'ils ne soient pas à peu-près dans le même vertical, il faut employer les méthodes suivantes; elles auroient lieu de même pour les observations de distances

qui ſont dans les ouvrages de Tycho, d'Hévélius & de Flamſteed, & qui ſont toutes affectées d'une double réfraction. Pour trouver cet accourciſſement cauſé par les réfractions, auſſi bien que l'effet de la parallaxe, dans les obſervations de diſtances (*914*); je préfère ordinairement la méthode ſuivante; je calcule par les tables la hauteur & l'azimut des deux aſtres, pour l'heure de l'obſervation, & leur diſtance vraie par le moyen des deux hauteurs & de la différence d'azimut. J'augmente chaque hauteur vraie de la réfraction qui lui convient (moins la parallaxe); avec ces deux hauteurs, ou leurs com-

Fig. 341. plémens ZS, ZL (*fig.* 341), & la même différence d'azimut Z, je calcule la diſtance apparente SL; la différence par rapport à la diſtance vraie SL eſt l'accourciſſement cherché.

Si c'eſt en mer, l'on obſerve ordinairement les hauteurs apparentes des deux aſtres, dont on a meſuré la diſtance; ainſi l'on connoît les trois côtés du triangle ZSL; on calcule l'angle Z, on ajoute aux côtés ZS & ZL la réfraction & l'on en ôte la parallaxe, on a les diſtances vraies ZL, ZS au zénit, l'angle Z étant le même, d'où il eſt facile de conclure la diſtance vraie LS que l'on cherche (*3696*, *3978*).

3981. Ces méthodes ſont rigoureuſes, mais longues; il y a pluſieurs moyens de les abréger : voici la méthode que M. de la Caille employoit. Après avoir cherché les réfractions qui conviennent à la hauteur de la lune & à celle de l'étoile, on calcule l'angle à la lune & à l'étoile, & l'on multiplie chaque réfraction par le coſinus de l'angle qui lui répond. Suppoſons, par exemple, que A ſoit le

Fig. 328. zénit (*fig.* 328); B la lune, C le lieu vrai de l'étoile, K ſon lieu apparent dans le vertical BKC; ayant pris $BE =$

Correction de la réfraction. BC, ou tiré CE perpendiculaire ſur BE, le petit arc EK ſera la quantité dont la réfraction de l'étoile, c'eſt-à-dire, CK rapproche l'étoile C de la lune B; or $EK = CK$. ſin. $ECK = CK$. coſ. KCB; donc cette correction eſt égale à la réfraction de l'étoile en hauteur, multipliée par le coſinus de l'angle à l'étoile. Il en eſt de même de la lune

qui exige aussi une correction dans la distance, égale à la différence de la réfraction à la parallaxe, multipliée par le cosinus de l'angle à la lune.

3982. Exemple. Je suppose que le 26 Mai 1754, étant par la latitude sud 35° 28′, on ait observé, à 8h 45′ 20″ de temps vrai, la distance de Régulus au bord éclairé de la lune 24° 56′; la hauteur de la lune réduite à ce même instant, & diminuée de l'abaissement de l'horizon (2654), étant à peu-près de 5° 53′, & celle de l'étoile 24° 55′. Dans le triangle ABC l'on connoît $AB = 84°\ 7'$, $AC = 65°\ 5'$ & $BC = 24°\ 56'$, on trouve (3706) l'angle à la lune $B = 38°\ 28'$, & l'angle à l'étoile $C = 136°\ 58'$, d'où l'on conclud que la correction de la réfraction sera 1′ 32″ pour l'étoile (soustractive, parce que l'angle à l'étoile est obtus), & 7′ 3″ pour la lune, additive, parce que l'angle à la lune est aigu, ce qui donne la distance corrigée de 25° 1′ 31″ (*Ephem.* 1755 — 64, *pag.* xliij, &c.).

La parallaxe horizontale de la lune étoit alors de 58′ 2″; si on la multiplie par le cosinus de la hauteur apparente, & par celui de l'angle à la lune, on trouvera 45′ 11″, effet de la parallaxe, qu'il faut ôter de la distance observée, parce que l'angle à la lune B est aigu, & l'on aura enfin 24° 16′ 20″ pour la vraie distance de la lune à l'étoile, qui répond à la distance observée 24° 56′.

3983. Ayant calculé pour le même jour cette distance de la lune à l'étoile (3978), on trouve qu'elle étoit à 7h 0′ sous le méridien de Paris, de 24° 30′ 37″, & qu'à 8h elle étoit de 23° 56′ 39″; donc la distance trouvée 24° 16′ 20″ avoit lieu à 7h 25′ 14″ pour Paris; mais elle étoit de la même quantité à 8h 45′ 20″ au lieu de l'observation; donc le lieu de l'observation est de 1h 20′ 6″ à l'orient de Paris. Calcul de la longitude.

3984. Les deux corrections qui proviennent de la réfraction peuvent encore se calculer par la méthode suivante, que M. Maskelyne a donnée à la *pag.* 40 du livre que j'ai cité (3975).

A la hauteur apparente du centre de la lune on ajoute

Autre méthode pour trouver la réfraction de distance.

trois fois la réfraction (2203) qui lui répond dans la table ordinaire des réfractions; on fait la même chose pour la hauteur de l'étoile, & l'on a les deux hauteurs augmentées; leurs complémens sont les deux *distances* au zénit *diminuées*, dont on prend la demi-somme & la demi-différence; le produit de leurs tangentes est la tangente d'un *premier arc*. La tangente de ce premier arc multipliée par la cotang. de la moitié de la distance apparente de l'étoile au centre de la lune est la tangente d'un *second arc*. Au logarithme de la tangente du double du premier arc, on ajoute le logarithme constant 2,0569, qui est celui de 114″, on retranche de la somme le logarithme du sinus du double du second arc, & l'on a le logarithme du nombre de secondes qu'il faut ajouter à la distance apparente, pour la dégager de l'effet des réfractions.

Démonstration.

3985. En effet, la réfraction de distance est $Xl + sY$ (*fig.* 341), la première partie est Ll. cos. L (3981) $=$ 57″ tang. ZL. cos. L (2207) $=$ 57″ tang. LP (3668). De même $sY =$ 57″ tang. SP; ainsi l'effet total est 57″ (tang. $SP +$ tang. LP). Soit M le milieu de l'arc SL, $t =$ tang. ML, $n =$ tang. MP, on aura tang. $LP = \frac{t+n}{1-tn}$ (3638), & tang. $SP = \frac{t-n}{1+tn}$, dont la somme est $\frac{2t+2tn^2}{1-t^2n^2}$ ou $2 \cdot \frac{2tn}{1+t^2n^2} \cdot \frac{1+n^2}{2n}$, à multiplier par 57″; mais $\frac{2tn}{1-t^2n^2}$ est la tangente du double de l'angle, dont la tangente est tn, ou le produit des tangentes de LM & PM, & ce produit est le même que celui des tangentes de la demi-somme & de la demi-différence des côtés ZL & ZS (3733); donc $\frac{2tn}{1-t^2n^2}$ est la tangente du double du *premier arc*. De même le second arc étant égal à MP, dont la tang. $= n$; la cosécante du double est $\frac{1+n^2}{2n}$ (3633); donc il faut multiplier le double de 57″ par la tangente du double du premier arc, & par la cosécante du double du second arc, pour avoir l'effet total de la réfraction (*Philos. trans.* 1764, *pag.* 263).

3986. Pour corriger l'effet de la parallaxe de la lune, voici la règle donnée par M. Maskeline (Ib. *pag.* 42). On ajoute le logarithme tangente de la moitié de la somme des distances au zénit du centre de la lune & de l'étoile corrigées par la réfraction, le logarithme de la tangente de la moitié de la différence, & le logarith. de la cotangente de la moitié de la distance des centres corrigée par la réfraction, la somme de ces trois logarithmes donnera le logarithme tangente d'un arc *A*. La somme de cet arc & de la moitié de la distance apparente des centres (ou leur différence si la lune est plus élevée que l'étoile) donne un arc *B*. On ajoutera son log. tang. avec celui du cos. de la dist. de la lune au zénit & celui de parall. horiz., l'on aura la parall. de dist. qu'il faut soustraire de la dist. observée, si ce n'est dans le cas où l'arc *B* étant la différ. entre l'arc *A* & la moitié de la distance, l'arc *A* seroit en même temps plus grand que la demi-distance. Pour démontrer cette règle, soit *V* le lieu vrai de la lune, *L* le lieu apparent, *LT* la parallaxe de distance, $= p$ sin. *ZL* cos. *L*; on a tang. *LP* : cos. *L* :: tang. *ZL* : 1 (3668) :: sin. *ZL* : cos. *ZL*, ou sin. *ZL* cos. *L* = cos. *ZL* tang. *LP*; donc $LT = p$ cos. *ZL* tang. *LP*. Cela revient à la règle précédente, parce que l'arc *A* est la même chose que *MP* (3733), distance entre la perpendiculaire & le milieu de *LS*, & que l'arc *B* est égal à *LP*. M. Maskelyne a rendu l'usage de ces deux règles plus aisé par le moyen de trois tables qui sont dans le *Nautical Almanac* de 1772.

Pour la parallaxe de distance.

Fig 341.

3987. Pour trouver l'effet de la parallaxe, voici une autre formule dont on fait usage dans les tables du *Nautical almanac* de 1767, (*pag.* 47), la parallaxe de distance $= p$ (cos. *ZS*. cosécante *LS* — cos. *ZL*. cot. *LS*). En effet, $\text{cos. } L = \frac{\text{cos. } ZS - \text{cos. } LS \text{ cos. } ZL}{\text{sin. } LS \text{ sin. } ZL}$ (3716); la parallaxe de hauteur $= p$. sin. *ZL*, donc la parallaxe de distance ou p sin. *ZL* cos. $L = p \left(\frac{\text{cos. } ZS}{\text{sin. } LS} - \frac{\text{cos. } LS \text{ cos. } ZL}{\text{sin. } LS} \right) = p \left(\frac{\text{cos. } ZS}{\text{sin. } LS} - \text{cos. } ZL \text{ cot. } LS \right)$, & mettant coséc. pour $\frac{1}{\text{sin.}}$, $= p$ (cos. *ZS* coséc. *LS* — cos. *ZL*. cotang. *LS*).

3988. Cette méthode auſſi bien que la première dont nous avons parlé (3981), exige une autre petite correction qui peut aller à une minute dans le cas où la diſtance obſervée ne feroit que de 29° & qui vient de ce que ST n'eſt pas rigoureuſement égale à SV; voici la manière de la trouver. On ajoutera le logarithme conſtant 0,941 avec ceux de la ſomme & de la différence des parallaxes de hauteur & de diſtance en minutes, & celui de la cotangente de la diſtance; en ôtant 3 de la caractériſtique, on aura le logarithme du nombre de ſecondes, qu'il faut ajouter à la diſtance obſervée, ſi elle n'excède pas 90°, ou retrancher quand elle paſſe. Cela eſt fondé ſur ce que la différence entre SV & ST eſt égale à VT^2 cotang. SV (3863) $= (LV^2 - LT^2)$ cot. $SV = (LV + LT)(LV - LT)$ cot. SL. Il y en a une table dans le *Nautical Almanac* de 1767.

3989. Pour calculer les réfractions de diſtance, il y a encore des tables à la ſuite du *Nautical Almanac* de 1767, faites ſur deux procédés différens, l'un de M. Lyons, l'autre de M. Dunthorn; ils ſont commodes l'un & l'autre, mais il me ſemble que dans la méthode de M. Lyons, il eſt moins facile de ſe tromper, ce qui peut être un motif de préférence; au reſte il eſt très-bon de faire le calcul par les deux méthodes, & je vais rapporter les démonſtrations de l'une & de l'autre.

Fig. 341. Soit Z le zénit (*fig.* 341) L le lieu apparent de la lune; S l'étoile, leur diſtance apparente $SL = \delta$, le ſinus & le coſinus $= D$ & C; ſuppoſons que les ſinus des hauteurs de ces deux aſtres L & S ſoient M & N, les coſinus m & n, les réfractions en hauteurs μ & ν; l'accourciſſement de la réfraction ſur la diſtance $= sY + lX = Ss$ coſ. $S + Ll$. coſ. L; mais coſ. $S = \frac{M - CN}{Dn}$ (3716), & coſ. $L = \frac{N - CM}{Dm}$; donc l'accourciſſement total de la diſt. eſt $\nu \frac{M - CN}{Dn} + \mu \frac{N - CM}{Dm} = \frac{1}{D}\left(\frac{M\nu}{n} + \frac{N\mu}{m}\right) - \frac{C}{D}\left(\frac{N\nu}{n} + \frac{M\mu}{m}\right)$. M. Lyons a fait une table qui renferme les logarithmes de la quan-

tité $\frac{M\nu}{n} + \frac{N\mu}{m}$, dont ôtant celui de D, il reſte la première partie de la formule. Fig. 341.

La plus grande des deux hauteurs ne devant point être, autant qu'il eſt poſſible, au-deſſous d'environ 10°, la quantité $\frac{M\mu}{m}$ eſt ſenſiblement égale à la réfraction de 45°, $= 57''$, ou $59''$ ſuivant nos tables, parce que $\frac{m}{M}$ où la cotangente de la hauteur eſt à μ comme 1 eſt à $57''$ (2207); ainſi la ſeconde partie de la formule eſt $\frac{C}{D}\left(\frac{N\nu}{n} + 57''\right)$; M. Lyons a donné auſſi une table de cette ſeconde partie de ſa formule.

3990. Si les deux hauteurs ſupaſſent 50° la formule devient extrêmement ſimple, étant égale à $57''$ multipliées par la moitié de la diſtance obſervée. En effet, ſuppoſant cette réfraction de $57'' = e$, $\mu = \frac{em}{M}$, & $\nu = \frac{en}{N}$; ainſi la formule générale devient $\frac{1}{D}\left(\frac{eM}{N} + \frac{eN}{M}\right) - \frac{C}{D}.2e$; on mettra pour $\frac{C}{D}$ qui eſt la cotangente de la diſtance, ſa valeur $\frac{1}{D} - t$ (3636) t étant la tangente de la moitié de la diſtance, on aura $\frac{e}{D}\left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M} - 2\right) + 2et = 2et + \frac{M^2 + N^2 - 2MN}{MN} \cdot \frac{e}{D}$, mais la dernière quantité $e\frac{(M+N)^2}{DMN}$ ne paſſe jamais $8''$ quand les deux aſtres ſont au-deſſus de 50°, ainſi l'effet de la réfraction eſt alors ſenſiblement $= 2et$. M. Lyons en a fait ſa troiſième table, où l'on voit que pour 30° de diſtance la réfraction eſt de $30''$, mais pour 90° elle eſt de $114''$.

Lorſque les aſtres ſont peu élevés & qu'on veut avoir la réfraction avec une extrême préciſion, l'on emploie 4 petites tables que M. Lyons a données en ſupplément; au défaut de ces tables, on peut employer la méthode ordinaire (2978). Quant à la parallaxe, M. Lyons emploie la formule de l'art. 3987.

3991. Il y a d'autres tables à la ſuite du *Nautical*

Fig. 341. *Almanac* de 1767, qui ont été calculées par M. Dunthorn; & dont voici le fondement; Ll & Ss étant la différence de la réfraction à la parall. pour la lune & pour le ſoleil ou l'étoile ; les triang. ZLS, Zls donnent ces proportions (3735) ſin. ZL ſin. $\angle S$: 1 : : ſin. verſe LS — ſin. v. (ZL — ZC) : ſin. verſe Z, ſin. Zl. ſin. Zs : 1 : : ſin. verſe ls — ſin. v. Zb — Zs : ſin. v. Z, donc ſin. ZL. ſin. $\angle S$: ſin. Zl ſin. Zs : : ſin. v. LS — ſin. v. (ZL—ZS) : ſin. v. ls — ſin. v. Zb — Zs : : coſ. (ZL — ZS) — coſ. LS : coſ. (Zl—Zs) — coſ. ls, donc log. (coſ. $\overline{ZL - ZS}$ — coſ. LS) + log. ſin. Zl + log. ſin. Zs — log. ſin. ZL — log. ſin. ZS = log. (coſ. $\overline{Zl - Zs}$ — coſ. ls) ; on a mis dans une table la ſomme des 4 logar. de ſin. Zl, ſin. Zs, ſin. ZL, ſin. ZS, qui ſont les diſtances au zénit, vraies & apparentes ; on retranche cette ſomme du log. de coſ. (ZL—ZS) — coſ. LS, ce qui donne le log. & par conſéquent la valeur de (coſ. $\overline{Zl - Zs}$ — coſ. ls) ; l'on fait cette quantité elle-même = N, & l'on a enfin coſ. ls = coſ. $\overline{Zl - Zs}$ — N ; c'eſt la diſtance vraie que l'on cherche. Si la diſtance excède 90°, il faut avoir égard au changement de ſignes, au lieu de — coſ. LS, on écrit +, & au lieu de coſ. $\overline{Zl - Zs}$ — N, on met N — coſ. $\overline{Zl - Zs}$, (*Nautical Almanac* 1772, *addit. pag.* 38). Je ne m'arrêterai pas à donner des exemples de ces méthodes, parce que ceux qui voudront en faire uſage, auront recours au livre dans lequel on en trouve les tables & les exemples : mon intention étoit ſeulement ici d'en completter les démonſtrations, en rappellant les théorêmes qu'elles ſuppoſent, & que j'ai eu ſoin de démontrer dans le livre précédent.

M. Witchell étoit occupé en Angleterre, en 1769, à calculer des tables où ces corrections de réfraction & de parallaxe étoient toutes détaillées pour chaque degré de diſtance, & pour chaque degré de hauteur de la lune & de l'étoile ; j'ai même deux pages imprimées de ces tables qui ſont très-commodes, & dont je deſirerois qu'on eût la continuation ; l'uſage en ſeroit beaucoup plus facile que

celui des formules & des tables que je viens de citer, & qui ſont déja dans le *Nautical Almanac.*

3992. En attendant, ces corrections de réfraction & de parallaxe ſe peuvent faire avec toute la préciſion néceſſaire par des opérations graphiques, c'eſt-à-dire, avec la règle & le compas, puiſqu'il ne s'agit que d'avoir l'angle à l'étoile & l'angle à la lune, dans un triangle dont on connoît les trois côtés; la parallaxe de hauteur multipliée par le coſinus de l'angle à la lune, donne la parallaxe de diſtance; il en eſt de même de la réfraction. C'eſt ce que M. de la Caille a exécuté fort adroitement, par le moyen de ſon *Chaſſis de réduction.* On a un cercle *HEO* (*fig.* 340) d'environ un pied de diamètre, diviſé en degrés; dont le diamètre *HO* repréſente l'horizon; l'on prend les arcs *HA*, *HA*, égaux à la hauteur de l'étoile, la ligne *AA* eſt l'almicantarat de l'étoile; on prend les arcs *HL*, *HL* égaux à la hauteur de la lune, & la ligne *LL* eſt l'almicantarat de la lune. On prend ſur la gauche, *HM* au-deſſus de l'horizon, & ſur la droite *HN* au-deſſous de l'horizon, égaux à la diſtance de la lune à l'étoile; au-deſſus des points *M* & *N* des arcs *MG* & *NG* égaux à la hauteur de l'étoile, & des arcs *ME*, *NE* égaux à la hauteur de la lune; par le centre *C* l'on tire le rayon *CD* perpendiculaire ſur les lignes *GG*, *EE*; Enfin, l'on prend avec le compas la portion *ST* de la ligne *EE*, compriſe entre la perpendiculaire *CSD* & le point de rencontre de la première ligne *AA* avec la dernière ligne *EE*, cette portion eſt la parallaxe de diſtance, en ſuppoſant que *CD* ſoit la parallaxe horizontale; ſouſtractive quand le point *T* eſt au-deſſus du point *S*. Ce même intervalle *ST* eſt la première partie de la réfraction de diſtance, en ſuppoſant que *SE* repréſente la réfraction de la lune à ſa hauteur actuelle; cette correction eſt contraire à celle de la parallaxe.

Méthode graphique.

Fig. 340.

On prend ſur la ligne *GG* qui appartient à l'étoile, l'intervalle *VZ* entre la perpendiculaire *IVD* & le point de rencontre de l'almicantarat *LL* de la lune & de la ligne *GZVG* qui appartient à l'étoile, cette portion *VZ* eſt la ſeconde partie de la réfraction de diſtance, en ſuppoſant

Fig. 340. que *VG* ſoit la réfraction de l'étoile en hauteur ; elle eſt additive quand le point *Z* eſt au-deſſus du point *V*.

Comme la parallaxe horizontale eſt ſujette à varier, & que non-ſeulement la réfraction en hauteur change beaucoup, mais encore les lignes *SV*, *VG*, qui les repréſentent dans notre figure ; M. de la Caille a joint à ſon chaſſis de réduction des échelles de réfraction & de parallaxe qui répondent aux différentes valeurs de chacun de ces deux élémens ; on en trouvera les figures & les dimenſions dans mon *Expoſition du calcul aſtronomique*, & dans le *Traité de Navigation de M. Bouguer*, édition *in*-8°, par M. de la Caille. J'y ajouterai ſeulement quelques mots d'explication, pour faire ſentir les fondemens de ces opérations.

Échelles de parallaxes.

3993. La parallaxe de la lune en hauteur eſt comme le coſinus de la hauteur apparente ; ainſi le rayon *CD* repréſentant la parallaxe horizontale, la ligne *SE*, qui eſt le coſinus de la hauteur *DE* de la lune, exprime la parallaxe de hauteur ; la partie *ST* de ce rayon *SE* eſt le coſinus de l'angle oppoſé au côté, dont le complément eſt repréſenté par *HA* (3865), elle eſt donc égale à la parallaxe de hauteur multipliée par le coſinus de l'angle à la lune, c'eſt-à-dire, à la parallaxe de diſtance, en prenant toujours le rayon *CD* pour la parallaxe horizontale.

Si donc la parallaxe horizontale ne changeoit point, le rayon *CD* feroit conſtamment l'échelle de la parallaxe ; donc ſi la parallaxe augmente, il faudra diminuer l'échelle dans la même proportion (1858), c'eſt ce que M. de la Caille a obſervé dans ſon échelle de parallaxe.

A l'égard de la réfraction l'échelle doit varier, & même fort inégalement, pour deux raiſons : la première eſt la hauteur, puiſque la réfraction a 48°, eſt 30 fois plus petite qu'à l'horizon (*Table* CLIX) ; la ſeconde vient de ce que *SE* qui eſt le coſinus de la hauteur de la lune, & qui ſuit le rapport des parallaxes, ne ſuit pas le rapport des réfractions ; ainſi pour que la partie *ST* ſoit la réfraction de hauteur multipliée par le coſ. de l'angle à la lune, il faut que *SE* ſoit la réfraction de hauteur, que le rayon général

CD ſoit la réfraction de hauteur diviſée par le coſinus de la hauteur, & par conſéquent que l'échelle des réfractions pour 50° ſoit 7 fois plus grande que l'échelle pour 5°, parce que la réfraction de 5° (10′ 10″ ſuivant M. de la Caille), augmentée en raiſon inverſe du coſinus de la hauteur, c'eſt-à-dire, 10′ 12″, eſt 7 fois plus grande que la réfraction de 50° (55″ 8) augmentée de même, c'eſt-à-dire, 1′ 27″. On n'emploie que l'échelle d'une minute de réfraction, parce que la réfraction à 50° ainſi augmentée, eſt 43 fois plus petite que la parallaxe de 62′; il auroit donc fallu rendre l'échelle de réfraction d'une grandeur incommode. (*Expoſition du calcul aſtronom.* art. 241).

On trouve auſſi l'heure qu'il eſt par la hauteur du ſoleil ou d'une étoile, en y employant le chaſſis de réduction, & ſans le ſecours de la trigonométrie (1030). Pour cela, on prend *OB* (*fig.* 330) égal à la hauteur du pole, *BG* égal à la diſtance de l'étoile au pole, *OK* égal à la hauteur de l'étoile, on tire les lignes *CB*, *CG*, *GD*, *KN*, *FE*, & la ligne *CE* eſt le coſinus de l'angle horaire (3865). Si l'on en prend le double avec un compas, & que l'on porte cette ouverture de compas ſur la circonférence du cercle, on a la différence entre 6ʰ & l'angle horaire, ou leur ſomme, ſi le point *E* eſt au-deſſous du centre *C*. L'angle horaire de l'étoile étant ajouté à la différence des aſcenſions droites du ſoleil & de l'étoile pour cet inſtant, (ſi l'étoile a paſſé le méridien), donnera le temps vrai (1031). Dans le chaſſis de réduction de M. de la Caille, on porte cette ouverture 2 fois ſur la circonférence du cercle, au-deſſous du point *O*, ſi le point *E* eſt au-deſſus du centre, & l'on rencontre le point qui marque l'angle horaire en temps, parce qu'on y a mis les heures de 60 en 60°, en allant de *O* vers *A* pour que les mêmes diviſions ſerviſſent à trouver les degrés & les minutes de temps. Voy. la figure & l'exemple dans l'*Expoſition du calcul aſtron.* art. 239 & 242.

Pour l'intelligence entière de ce chaſſis de réduction, il me reſte à dire un mot du cadre qui l'environne, & dont je n'ai point aſſez démontré la théorie dans le livre que je

viens de citer. Le bord ſupérieur eſt diviſé en $77' \frac{1}{2}$; c'eſt le plus grand mouvement que la lune ait en deux heures; la ligne inférieure eſt diviſée en 120′ qui ſont les deux heures; les lignes verticales à droite & à gauche ſont diviſées en 2° 35′, c'eſt le plus grand mouvement de la lune en 4 heures de temps; au moyen de ces 4 diviſions l'on fait aiſément avec le compas la règle de trois, néceſſaire pour trouver dans l'Almanach Nautique, à quelle heure la lune auroit dû avoir la diſtance qu'on a déduite de l'obſervation; par exemple, pour faire cette proportion $2° 9' : 4^h :: 57 \frac{1}{2} : 1^h 47'$, on tire une ligne horizontale par le point de 2° 9′, on y marque une longueur de $57' \frac{1}{2}$, & par ce point on tire une ligne de l'angle ſupérieur du chaſſis, elle vient marquer ſur la ligne inférieure 1^h 47′; en effet, ſi le mouvement de la lune étoit de 2° 35′ la ligne inférieure marqueroit l'heure cherchée en y portant ſimplement le mouvement de $57' \frac{1}{2}$, mais au lieu de 2° 35′, on n'a que 2° 9′, il faut donc que le dernier terme ſoit plus grand dans le rapport de 2° 35′ à 2° 9′, c'eſt ce qu'on fait par le moyen des deux triangles ſemblables que je viens d'indiquer.

Réduction des hauteurs.

3994. Quand on obſerve la hauteur de la lune & celle de l'étoile un peu avant ou après l'obſervation de la diſtance, on eſt obligé de réduire les hauteurs à ce même moment; pour cela, il ſuffit d'avoir la quantité dont la hauteur change en une minute de temps, & cette quantité eſt égale à 15′ multipliées par le coſinus de la hauteur du pole, & le coſinus de l'amplitude de l'aſtre (3813); on en trouve une table fort détaillée dans la connoiſſance des temps de 1772, pour tous les degrés d'amplitude & de hauteur du pole; on y voit, par exemple qu'à 49° de latitude, un aſtre qui eſt à 40° du vrai point d'orient ou d'occident s'élève ou s'abaiſſe de 7′ 32″ en une minute. M. de la Caille a joint à ſon chaſſis de réduction, une échelle où l'on peut prendre, avec un compas, cette même quantité avec toute la préciſion néceſſaire; cette échelle eſt un triangle rectangle iſocelle, dont chaque

côté,

côté a 15′, & exprimant le ſinus total, eſt diviſé dans le même rapport que les ſinus des divers degrés de latitude & d'azimut. (*Expoſition du calcul aſtron.* art. 240).

3995. La difficulté de voir l'horizon pendant la nuit, fait qu'on ne peut obſerver la hauteur d'une étoile qu'à 2 ou 3 minutes près, & même celle de la lune, dont les reflets empêchent ſouvent qu'on ne puiſſe bien diſtinguer l'horizon. On préfère donc les hauteurs du ſoleil, qui peuvent ſe prendre à une minute près, pour obſerver le temps vrai, que l'on a par conſéquent à 15″ près: avec quatre octans faits en Angleterre, dont M. de Verdun & ſes Officiers ſe ſervoient en 1770, on ne trouvoit preſque jamais plus d'une minute de différence entre les hauteurs méridiennes priſes dans l'eſpace de plus de ſix mois, quoiqu'il n'y eût qu'un ſeul octant à lunette, les trois autres étant à pinnules.

Remarques ſur les obſervations de longitudes.

Les diſtances de la lune au ſoleil ſont préférables à celles de la lune aux étoiles, parce que la ſcintillation des étoiles, & d'autres fois la difficulté de les bien voir, font des obſtacles à l'exactitude des diſtances de la lune aux étoiles. D'ailleurs les montres ordinaires, quoique bonnes, ſont à peine ſuffiſantes pour conſerver l'heure qu'on a déterminée, pendant le jour par des hauteurs du ſoleil ; & les hauteurs d'étoiles ſont plus difficiles à prendre que celles du ſoleil.

L'on choiſit, tant qu'on peut, des diſtances qui ſoient entre 40° & 90°, on peut aller juſqu'à 120° avec les octans ordinaires, mais il eſt alors plus difficile de tenir l'octant dans le plan des deux aſtres ; au contraire, ſi la diſtance eſt trop petite, les réductions ne ſont pas aſſez exactes par les méthodes précédentes (3981 & ſuiv).

Il faut, autant qu'il eſt poſſible, que l'aſtre le moins élevé ait au moins 10° de hauteur, à cauſe de l'inconſtance des réfractions.

Les obſervations ſont plus exactes, 1°, lorſque la lune eſt périgée, 2°, lorſque la lune deſcend & que le ſoleil monte, comme aux environs du dernier quartier, 3°,

quand les deux astres sont à peu-près dans le même vertical, de manière que le changement de la parallaxe contribue à rendre le changement de distance plus prompt, ce qui rend le résultat plus exact.

Vérification de l'octant. Pour vérifier si les miroirs de l'octant sont bien parallèles, on mesure le diamètre du soleil en avant & en arrière du premier point de la division; en répétant l'observation plusieurs fois, l'on peut s'assurer de la vérification à 20″ près, sur un octant de 18 à 20 pouces, où il y ait une division de Vernier (2342). Il est important de s'assurer aussi que les deux surfaces du grand miroir sont bien parallèles, en mesurant des hauteurs méridiennes dans des lieux où la latitude est bien connue, & des distances d'étoiles, dont on connoît d'ailleurs la valeur exacte (785).

Comme l'on sait à peu-près de combien est la distance de la lune à l'étoile, que l'on veut mesurer, par le calcul de l'Almanach Nautique, on fixe l'alidade sur le degré; on place l'octant à peu-près dans le plan des deux astres, & en le faisant balancer légérement, il est aisé de les trouver l'un & l'autre dans la lunette.

Il est difficile de faire de bonnes observations quand on a un gros temps, soit avec le vent-arrière qui augmente le roulis, soit *au plus près*, le tangage étant ordinairement fort; mais lorsqu'on a vent largue, & que le vaisseau est moins agité, on peut trouver la longitude à un degré près, dans l'espace de trois quarts-d'heure, en supposant qu'on ait un Almanach Nautique, avec les tables auxiliaires.

3996. La hauteur de la lune peut servir aussi à trouver les longitudes, & cela de différentes manières. Leadbetter proposa une méthode pour trouver le lieu de la lune par une seule hauteur observée, en supposant la latitude de la lune & l'inclinaison de son orbite connues par les tables. M. le Monnier, pour suppléer quelquefois à la méthode des distances, a donné aussi une méthode pour trouver la longitude en mer par une seule hauteur observée, pourvu qu'on connoisse la déclinaison de la

lune. On le peut faire en obſervant ſa hauteur méridienne, & tenant compte du changement de déclinaiſon de la lune & du mouvement du vaiſſeau.

M. Pingré, dans ſon *Etat du Ciel*, (*année* 1757, *pag.* 186), s'eſt ſervi auſſi de la hauteur de la lune pour trouver l'angle horaire de la lune; c'eſt-à-dire, ſa diſtance au méridien, en ſuppoſant la déclinaiſon connue par les tables. Voici ſon procédé, qui eſt auſſi ſimple qu'il puiſſe être, en employant les angles horaires, & qui peut ſervir, même à terre, pour trouver la longitude, lorſqu'on ne peut pas comparer la lune à une étoile. Ayant obſervé en pleine mer la hauteur du bord de la lune, on y fait les quatre corrections qui dépendent de la hauteur de l'œil au-deſſus de la mer, de la réfraction, de la parallaxe & du demi-diamètre de la lune, & l'on a la hauteur vraie de la lune. On fait toujours, à une demi-heure près, la longitude du lieu où l'on obſerve; par conſéquent on peut ſavoir l'heure qu'il eſt à Paris au moment où l'on a obſervé, & l'on peut calculer par les tables, pour ce moment, la déclinaiſon de la lune, & par conſéquent ſa diſtance au pole. L'on connoît auſſi la latitude du lieu où l'on obſerve (car elle eſt ſur-tout néceſſaire dans cette méthode-ci), l'on a donc la diſtance du pole au zénit; ainſi réſolvant le triangle *PZS*, comme dans l'art. 1015, on trouvera l'angle horaire pour le lieu de l'obſervation.

Longitude par la hauteur de la lune.

Connoiſſant ainſi l'angle horaire de la lune, par le moyen de la hauteur obſervée, on cherche à quelle heure cet angle horaire devoit avoir lieu au méridien de Paris, la différence entre l'heure de Paris & l'heure où l'on a obſervé eſt la différence des méridiens. Si cette différence trouvée eſt à peu-près la même que celle qu'on a d'abord ſuppoſée pour calculer la déclinaiſon, la ſuppoſition eſt juſtifiée, & il n'y a rien à changer au calcul précédent.

Si la différence eſt ſenſible, on fait une autre ſuppoſition pour la longitude du lieu, on cherche de même dans cette nouvelle ſuppoſition l'heure de Paris & la déclinaiſon de la lune par les tables, pour cette heure-là;

avec cette nouvelle déclinaiſon on réſout une ſeconde fois le triangle *PZS*, & l'on trouve l'angle horaire. On cherche à quelle heure de Paris ce même angle horaire y devoit avoir lieu, & la différence entre cette heure de Paris & l'heure de l'obſervation ſera la différence des méridiens. Si cette différence eſt la même que celle qu'on a adoptée dans la ſeconde ſuppoſition, celle-ci ſera vérifiée ; mais s'il y a encore une erreur ou une différence dans le réſultat, on écrira cette erreur au deſſous de celle de la première ſuppoſition, on en prendra la ſomme ou la différence, ſelon qu'elles ſeront de même dénomination ou de dénominations différentes, & l'on fera cette proportion. La ſomme des erreurs eſt à la plus petite erreur, comme celle-ci eſt à la quantité dont il faut corriger la différence des méridiens trouvée dans la ſuppoſition qui a donné la plus petite erreur.

3997. Exemple. On a obſervé en pleine mer la hauteur apparente du bord de la lune, à 16^h de temps vrai ; l'on en a conclu la hauteur vraie du centre de la lune de $9^\circ\ 55'\ 28''$, la latitude géographique du lieu de l'obſervation étant $50^\circ\ 35'\ 27''$ auſtrale. Je ſuppoſe, conformément à l'eſtime du vaiſſeau, que l'on étoit d'environ 2^h à l'oueſt de Paris, enſorte qu'il étoit 18^h à Paris ; je calcule pour ce temps-là, par les tables de la lune, la longitude, la latitude, l'aſcenſion droite & la déclinaiſon, je trouve cette déclinaiſon de la lune, $3^\circ\ 50'\ 29''$ boréale, ainſi j'ai la diſtance de la lune au zénit $= 80^\circ\ 4'\ 32''$, ſa diſtance au pole $= 93^\circ\ 50'\ 29''$, & la diſtance du pole au zénit $= 39^\circ\ 24'\ 33''$, d'où je conclus l'angle horaire de $69^\circ\ 16'\ 46''$ (3706).

Je trouve auſſi par les tables que l'angle horaire pour Paris eſt de $69^\circ\ 16'\ 46''$, à $18^h\ 28'\ 23''$. De-là il ſuit que la différence des méridiens entre Paris & le lieu de l'obſervation devroit être de $2^h\ 28'\ 23''$. Mais nous l'avons ſuppoſée $2^h\ 0'$; donc l'erreur de cette première ſuppoſition eſt de $28'\ 23''$.

3998. Je paſſe donc à une autre hypothèſe ; je ſuppoſe

que la différence des méridiens soit de 2h 28′ 23″; je trouve la déclinaison de la lune 3° 56′ 10″, & l'angle horaire 69° 9′ 14″; cet angle horaire a lieu à Paris à 18h 43′ 21″: donc la différence des méridiens seroit de 2h 43′ 21″, au lieu de 2h 28′ 23″ qu'on avoit supposé; la seconde erreur est donc de 14′ 58″.

Ces erreurs sont toutes les deux en plus, elles ont diminué à mesure qu'on a augmenté la supposition de la différence des méridiens; cela prouve qu'il faut l'augmenter encore. On fera donc cette proportion : la différence des deux erreurs 13′ 25″ ou 805″ est à la plus petite erreur 898″, comme la différence des deux suppositions 28′ 23″ est à 31′ 40″, c'est la quantité qu'il faut ajouter à la seconde supposition 2h 28′ 23″ pour avoir la véritable différence de méridiens, 3h 0′ 3″. Pour sentir la raison de cette proportion, on jettera les yeux sur la disposition suivante de ces calculs. Longitude cherchée.

Première supposition.		*Seconde supposition.*		*Différence.*
Longitude,	2h 0′ 0″	Longitude,	2h 28′ 23″	28′ 23″
Erreur,	28 23	Erreur,	14 58	13 25

On voit dans cette petite table que l'erreur a diminué de 13′ 25″ pour 28′ 23″ d'augmentation dans la supposition de la longitude ou de la différence des méridiens, d'où l'on conclura que l'erreur doit diminuer de 14′ 58″, ou se réduire à rien, pour 31′ 40″ d'augmentation dans la différence des méridiens supposée, donc il faut y ajouter encore ces 31′ 40″, & l'on aura cette différence des méridiens que l'on cherchoit de 3h 0′ 3″.

3999. Ce fut pour faciliter l'usage de cette méthode en mer que M. Pingré calcula pour les années 1754, 55, 56 & 57, un excellent ouvrage qui avoit pour titre *Etat du Ciel.* Jamais on ne mit tant d'exactitude & de temps à cal-

culer une éphéméride; on y trouvoit pour midi & pour minuit de chaque jour le lieu de la lune, sa latitude, son angle horaire, sa déclinaison, sa distance au soleil, le mouvement horaire en longitude, le changement horaire de l'angle au pole, &c. tout cela calculé en secondes avec la dernière précision, ensorte que les calculs de la longitude, dont je viens de donner l'explication d'après M. Pingré, devenoient très-faciles.

Il eut la constance de continuer seul ce travail pendant 4 ans; le peu d'usage qu'on en faisoit alors parmi les marins, le détermina à suspendre un travail aussi pénible jusqu'au temps où il pourroit devenir plus utile; mais M. Pingré eut l'avantage de donner l'exemple pour l'avenir, & de faire voir qu'un habile astronome pouvoit fournir lui seul à la navigation tous les calculs dont les navigateurs ont besoin; moi-même ayant été chargé de la *Connoissance des temps*, j'ai donné dans le volume de 1761, & dans les suivans, les lieux de la lune calculés avec la même précision, pour midi & pour minuit, qui sont le fondement de tous les autres calculs.

La méthode des distances de la lune aux étoiles me paroissant préférable, je choisirois pour mon *Almanach Nautique* la forme que M. de la Caille a indiquée dans ses éphémérides de 1765 à 1774; & dans son *Traité de Navigation* (1760, *pag.* 218; 1769, *pag.* 245), que j'ai mise dans mon *Exposition du calcul astronomique*, & que l'on a adoptée dans le *Nautical Almanac* calculé en Angleterre pour 1767, &c. Cette méthode consiste à donner pour chaque jour, de trois en trois heures, ou de quatre en quatre heures, la distance de la lune au soleil, ou bien à une ou deux étoiles, en degrés, minutes & secondes ou dixièmes de minutes, & la parallaxe horizontale de la lune pour midi & minuit; M. de la Caille y joignoit le temps du passage de l'étoile au mérid. de Paris.

L'on pourroit y joindre encore le logar. de la variation de dist. pour 3^h, moins le logar. de 3^h, afin d'avoir plus aisément la partie proportionnelle de la dernière opération (3983). On a mis aussi dans cet Almanach Nautique 4 pag.

pour les diſtances, à chaque mois, deux ſont pour les diſtances de la lune à des étoiles orientales, & deux pour les étoiles occidentales. Si l'on adoptoit la forme des tables de corrections commencées par M. Witchell (3991), il faudroit, au lieu de la parallaxe horizontale de la lune, y mettre le log. logiſtique de l'excès de cette parallaxe ſur la plus petite parallaxe employée dans la table de correction; par ce moyen l'on pourroit avoir, par une ſimple addition, la ſeconde partie de la correction de la parallaxe; car dans ces tables de M. Witchell il y a une colonne où ſe trouve le logar. logiſtique de 60′ multipliées par le coſinus de la hauteur apparente de la lune, & par le coſinus de l'angle à la lune, enſorte qu'en y ajoutant celui de la ſeconde partie de la parallaxe, on a le log. logiſt. de la correction qu'elle exige pour la diſtance (3915, 3982).

Les raiſons de préférence pour cette méthode des diſtances ont été expoſées fort au long. (*Mém. ac.* 1759, *p.* 77). *Avantages de la méthode des diſtances.*
1°. L'on ne peut trouver ſur mer l'angle horaire de la lune, par le moyen de ſa hauteur, ſans ſuppoſer connues la hauteur du pole & la déclinaiſon de la lune: cependant on ne connoît la hauteur du pole qu'à quatre ou cinq minutes près; car, en ſuppoſant que l'on ait obſervé la hauteur du ſoleil à midi, & par conſéquent la hauteur du pole, à deux minutes près, il faut y appliquer des réductions pour le temps qui s'eſt écoulé depuis midi, & pour le chemin que le vaiſſeau a fait. L'incertitude de ces réductions jointe à celle de l'obſervation principale peuvent nous expoſer à 4′ ou 5′ d'erreur dans la latitude.

2°. Il eſt difficile pendant la nuit d'obſerver bien exactement en mer la hauteur de la lune, ſur-tout quand elle eſt entre 20 & 60 degrés de hauteur, à cauſe du reflet de lumière qui vient de la ſurface de l'eau, & qui empêche de diſtinguer le terme de l'horizon; on ne l'a qu'a 4′ près.

3°. Il peut y avoir deux minutes d'erreur dans la déclinaiſon de la lune, ſoit qu'on la tire de l'obſervation, ſoit qu'on la prenne dans les tables; & cette erreur influe dans la longitude que l'on cherche.

4°. M. de la Caille a calculé ce qui pouvoit réſulter de

ces erreurs dans différentes positions de la lune & du vaisseau ; en supposant encore 2′ d'erreur dans l'ascension droite de la lune, calculée par les tables, & 30″ sur le temps vrai, il trouve l'erreur entre 3° 36′ & 19° 3′, c'est-à-dire, entre 62 & 190 lieues marines, (de 20 au degré).

4000. Dans la méthode où nous employons seulement la distance de la lune à une étoile, l'incertitude est beaucoup moindre. Supposons 4′ d'erreur sur la distance observée, l'erreur qui en résulte sur la longitude est toujours à celle de la longitude que l'on cherche, comme le mouvement diurne de la lune est à 360°; c'est-à-dire, de 1° 49′ si le mouvement diurne est de 13° 10′ $\frac{1}{2}$. Cette méthode n'exige une extrême exactitude que dans la seule distance observée ; car, pour les hauteurs de la lune & de l'étoile, sept à huit minutes d'erreur dans chacune formeront à peine un quart de degré sur la longitude. Enfin, supposant deux minutes d'erreur dans le calcul du lieu de la lune, il en résultera 54′ sur la longitude. La somme de ces trois erreurs ne va pas à 3°, en les supposant toutes du même sens. Cette incertitude sera beaucoup diminuée, si l'on peut faire deux observations différentes le même jour.

Enfin c'est l'expérience qu'il faut principalement consulter sur le choix de ces méthodes : or M. de la Caille & M. Maskelyne ont éprouvé long-temps sur mer la méthode des distances, ils l'ont trouvée la plus exacte, ils l'ont adoptée de préférence. Depuis quelques années M. de Charnières & M. de Verdun, Officiers des Vaisseaux du Roi, M. l'Abbé Rochon, &c. qui se sont exercés à ces observations dans des voyages de long cours, ont employé la méthode des distances de la lune au soleil & aux étoiles, & l'ont regardée comme la meilleure. Il ne nous reste qu'à inviter les navigateurs à en étudier les calculs, à en acquérir l'habitude, & à rendre cette pratique aussi générale qu'elle est utile pour la navigation.

Fin du troisième & dernier Volume.

Fig. 331.
Fig. 332.
Fig. 333.
Fig. 334.
Fig. 335.
Fig. 336.
Fig. 337.
Fig. 338.
Fig. 339.
Fig. 340.
Fig. 341.
Ecliptique
Tropique
Polaire
Rayon 4083.
Distances des Cercles des Paralleles

TABLE
DES MATIERES
CONTENUES DANS CET OUVRAGE,

Des Auteurs qui y sont cités, & des termes d'Astronomie qui s'y rencontrent.

A laquelle on a même ajouté l'explication de plusieurs termes qui ne sont pas employés dans le cours de ce Livre.

N. B. *Les nombres cités indiquent les Articles & non les Pages.*

A.

NOMS DES AUTEURS.

AUTEURS cités dans cet ouvrage comme Astronomes ou Mathématiciens.

NOMS DES AUTEURS.

NOMS DES AUTEURS.

Noms des Philofophes, Hiftoriens, &c.

NOMS des perfonnes citées dans cet Ouvrage, comme Philofophes, Hiftoriens, Poëtes, Amateurs ou *Protecteurs des Lettres, Artiftes, &c.*

1566,

C.

E.

arrêter

H.

I.

K.

L.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

Fin de la Table des Matières.



ADDITIONS ET CORRECTIONS.

TOME I.

PAGE 79, à la fin de la note; dont les cercles, *liſez*, dont les centres.
Page 115, ligne 26; Allen, *liſez*, Allin.
Page 190, ligne 6; & ce me ſemble, *liſez*, & en 15 chiffres dans le *Theſaurus mathematicus* de Pitiſcus en 1613.
Page 232, ligne 20; Nécrologe de 1769, *liſez*, 1770.
Page 298, dans la ſeconde colonne; Aldeberan, *liſez*, Aldebaran.
Page 488, α au nœud du lien des poiſſons, 21° 0′ 11″, *liſez*, 21° 0′ 24′.
β de la petite ourſe, 95° 29′ 5″, *liſez*, 95° 25′ 5″.
Page 489, δ de la grande ourſe, + 0′ 5″, *liſez* — 0′ 5″.
Page 491, α queue du Cygne, + 3′ 30″, *liſez*, + 3′ 40″.
γ dans l'eau du verſeau, *liſez*, λ.
DANS LES TABLES, page 33, au bas de la table, au-deſſus de X, *au lieu de* 30, *liſez* VIII.
Page 57, dans le titre courant, *au lieu de* Tables du Soleil, *liſez* de la Lune.
Page 68, dans la dernière colonne on obſervera que tous les filets doivent être baiſſés d'un chiffre.
Page 76, Table L, dans la derniere colonne après 20, *liſez* 15 *au lieu de* 25.
Page 79, Table LVII; au bas de la table, *au lieu de* VI, *liſez* IV.
Page 132 & ſuiv. l'équation de Mars & ſes diſtances ſont un peu différentes du réſultat indiqué dans les corrections ſuivantes, mais la différence n'eſt pas aſſez conſidérable pour qu'on ait cru devoir en recommencer l'impreſſion.
Page 237 à la fin : *liſez* ces logarithmes ſont les log. ordinaires ôtés du log. &c.

TOME II.

Page 47, ligne 18; reſte celui de la tangente, *liſez*, la moitié du reſte eſt celui de la tangente.
Page 56, ligne 35, 14218,1, *liſez*, 14208,1.
Ib. ligne derniere, 10° 40′ 39″, *liſez*, 10° 41′ 47″.
Ib. ſurpaſſe de 37″, *liſez*, de 1′ 45″.
Page 62, pour l'excentricité de Mars, au lieu de 14218,1, *liſez*, 14208,1.
pour l'équation de Mars, au lieu de 10° 40′ 39″, *liſez*, 10° 41′ 47″.
Page 90, ligne 20, au lieu de 14218,1, *liſez*, 14208,1.
21, au lieu de 10° 42′ 13″, *liſez*, 10° 41′ 47″.
22, qui ſurpaſſe de 2′ 11″, *liſez*, de 1′ 45″.
Page 144, pour l'équation de Mars, au lieu de + 0′ 37″, *liſez*, + 1′ 45″.
Page 208, ligne 26; au lieu de Moore, *liſez*, Moor.
Page 322, ligne 29; après la grande, *ajoutez*, & la Compaſſion ſe célèbre le ſamedi. La Suſception de la Couronne d'épines ſe célèbre le premier dimanche d'août, à moins que la Transfiguration ne la faſſe renvoyer au ſecond dimanche.
Page 323, ligne 23; M. Joannot, *liſez*, Jouannaud.
Page 416, ligne 17, par l'obſervation faite à la baye d'Hudſon, &c. *liſez*, par l'obſervation faite en Californie, on trouve 8″ 8 pour la paralaxe moyenne, & nous pourrons, &c.
Page 501, ligne 27, les ſignes deſcendans, *liſez*, Aſcendans.
Page 543, ligne 15, qui tombe en *R*, *liſez*, en *Z*.

Page 559, ligne 1, mouvement vrai de la lune seule, *lisez*, de la lune au soleil, ou la différence des mouvemens.

ligne 6, plus grande par l'observation, *lisez*, plus grande que par le calcul des tables.

Page 648, ligne pénultième, au lieu de 0″ , *lisez*, 39″ 3.

Ib. à la fin de la table, au lieu de — 38″7, *lisez*, + 38″7.

& au lieu de 7^h 0′ 8″ 8, *lisez*, 7^h 1′ 26″ 2.

TOME III.

Page 94, après la vare de Castille, *ajoutez*, le palme de Lisbonne suivant M. Ciera, 8 pouces 0^{li} 90.

Page 106, ligne 20, au lieu de Pernim, *lisez*, Pernin.

Page 221, ligne 11, au lieu de (3674), *lisez*, (3764).

Page 265, ligne 5, au lieu du 3e Satellite *lisez*, du second Satellite.

Page 301. Les révolutions périodiques des satellites de Saturne d'après les moyens mouvemens établis par M. Cassini, ont été calculées plus exactement par M. Proa, Secretaire du Roi, de même que les révolutions synodiques. V. *la Connoissance des temps* de 1773.

Page 366, la Comète de 1533 est rétrograde & non directe.

A la fin de cette Table on ajoutera les élémens de la 60e Comète apperçue par M. Messier le 1 Avril 1771, & calculée par M. Pingré de la manière suivante, vers la fin de Juin, sur près de trois mois d'observations.

Nœud ascendant	0^s	27°	51′	0″
Inclinaison		11	15	29
Périhélie	3	13	28	13
Distance périhélie 0,90576				
Passage au périhélie le 18 Avril 22^h 14′ 27″				
Mouvement direct				

Page 757, lig. 7, après $p\frac{(m+1}{2}$, *supposez*, $\frac{d^2}{m^2}$ comme au terme suivant.

Page 796, ligne 32; est de 69° 16′ 46″ à 18^h 28′ 23″, *lisez* étoit 70° 31′ 27″ à 16 heures; la différence des ascensions droites du soleil & de la lune changeoit de 30′ 12″ par heure. Delà il suit, &c.

Page 797, ligne 3, cet angle horaire a lieu à Paris, *lisez*, cet angle horaire est plus petit que celui qui avoit lieu pour Paris à 16 heures, de 1° 22′ 13″, ce qui répond à 2^h 43′ 21″ : donc la différence, &c.

Corrections & Additions à faire dans le Recueil de Tables de Halley pour les Planètes, &c. imprimé en 1759, qui se trouve à Paris chez Bailly.

J'ai supposé dans plusieurs endroits de ce Livre, qu'on eût entre les mains le Recueil de Tables que j'ai donné en 1759, qui renferme les Tables de M. Halley pour les Planètes & les Comètes; celles de M. Wargentin pour les Satellites, celles de M. de la Caille pour les Etoiles fixes, &c. L'usage de ce Livre ayant donné lieu d'y appercevoir plusieurs fautes, je vais en donner ici le Catalogue, avec quelques additions utiles. Je conseille à tous ceux qui font usage de ce Livre, de faire sur leur Exemplaire toutes les corrections suivantes.

Dans l'Explication, page 13, ligne 15, après planètes, *ajoutez ces mots*, exceptez de Jupiter (1349).

Page 13, ligne 23 & 24, *effacez ces mots*, & nous ne connoissons que des causes capables de les faire rétrograder.

Page 88, ligne 29, *ajoutez* que dans un autre ouvrage il attribue cette méthode à M. Bradley. (Théorie des Comètes, page XLII).

Page 121, ligne 4, même anomalie moyenne, *lisez*, même distance au périhélie en jours. *Il faut effacer tout le reste de l'article, c'est-à-dire les 24 lignes suivantes, & renvoyer à l'art. 3105 de l'Astronomie.*

Page 135, ligne 6, *ajoutez* M. Maraldi soupçonne que cette équation vient de l'excentricité du 3e Satellite, jointe à un mouvement de son apside, *voyez* art. 2903.

Page 135, ligne 18, mais enfin, &c. *lisez*, cette inclinaison a continué d'augmenter jusqu'en 1763, & l'on croit qu'elle recommence à diminuer.

Page 135, lignes pénultième & dernière, au lieu de l'année 1757, *lisez* pour le cas où elle continueroit d'augmenter jusqu'à 3° 36′; mais jusqu'ici elle ne passe pas 3°. 26′ environ, en supposant l'ombre circulaire.

Page 137, ligne 14, au lieu de 0, 01454, &c. *lisez* 0, 00727, un peu plus grande que celle de Vénus.

Page 140, ligne 26, cette inclinaison semble, &c. *lisez*, cette inclinaison a continué d'augmenter jusqu'en 1763.

Page 142, ligne 27, Table 1, équation du Temps 25′ 18″, *lisez* 25′ 27″, & *corrigez les trois lignes suivantes en conséquence.*

Page 152, ligne 2, *ajoutez* que je crois la variation de l'obliquité de l'écliptique encore plus grande. *Voyez* art. 2746.

Page 153, lignes 21 & suiv. *corrigez ainsi le reste de cet article:* cette longitude du nœud corrigée se retranche de l'ascension droite de l'étoile; avec le reste 6^s 11°, & avec 38° 34′ de déclinaison, on trouve dans la Table IX la seconde partie de la nutation + 7″ 0; dans la Table XII, avec 2^s 27° & 7″, on trouve 1″ 7 à retrancher; ainsi la seconde partie de la nutation dans l'ellipse sera + 5″ 3; on réduira de même la nutation en déclinaison, mais cette correction est assez petite pour qu'on puisse la négliger dans cet exemple.

Page 159, ligne 10, après 7^s 8° 18′, *placez ces mots:* il faut ajouter 6 signes, parce que la déclinaison est boréale, & l'on aura 1^s 8° 18′ pour l'argument cherché ou la longitude, &c.

Page 161, ligne 32, après 13″ 0, *lisez ces mots:* la correction du lieu du nœud prise dans la Table XI est 8° 5′; ainsi le lieu du nœud corrigé est 1^s 19° 21′; avec cet argument on trouve la seconde partie de la nutation en ascension droite dans la Table IX, — 2″ 4, & la correction de la Table XI de 0″ 3; ainsi la seconde partie de la nutation sera — 2″ 1; on retranchera 1^s 19° 21′ de l'ascension droite de l'étoile, avec le reste 0^s 16° 3′ on aura (Table X) la nutation en déclinaison + 2″ 5, la correction de la Table XI est 0″ 4. Il reste donc + 2″ 1 pour la nutation en déclinaison dans l'ellipse. L'aberration en ascension droite sera — 15″ 5, parce que la plus grande est 20″ 5; l'aberration en déclinaison sera — 1″ 4; l'ascension droite apparente sera donc 65° 33′ 25″ 3, & la déclinaison apparente 16° 0′ 40″ 2.

Page 162, ligne 1, *lisez* 15″ 5; ligne 2, *lisez* 20″ 5; ligne 4, au lieu de 7^s 8° 18′, *lisez* 1^s 8° 18′. Ibid. ligne 5, au lieu de + 1″ 4, *lisez* — 1″ 4; lignes 6, & suiv. *lisez* l'ascension droite apparente sera donc 65° 33′ 25″ 3, & la déclinaison 16° 0′ 40″ 2.

DANS LES TABLES, page 14, colonne 3, après 19′, *lisez* 20.

Page 15, col. 1, ligne dernière, *lisez* 3° 35′ 33″.

Ibid. col. 3, après 19′ 24″, *lisez* 19′ 21″.

Page 16, col. 2, dans les deux dernières lignes, *au lieu de* 23°, *lisez* 22°.

Page 40, en titre, *au lieu de* Vénus, *lisez* Mars.

Page 49, col. 3, ligne 1, *lisez* 0° 55′ 29″.

Page 77, col. 4, ligne 2, *lisez* 3° 10′ 6″.

Page 80, col. 2, vis-à-vis de 11°, *lisez* 76194.

Page 83, après 1672, *au lieu de* Août, *lisez* Septembre.

Page 86, *ajoutez* : le signe + annonce que les tables donnent une longitude trop grande.

Page 91, pour la Comète de 1593, *au lieu de* $4^s 26^\circ 19'$, *lisez* $5^s 26^\circ 19'$.

Page 134, après le titre C, *ajoutez*, corrigé par la Table II.

Page 136, dans le titre de la seconde colonne, *au lieu de* D, *lisez* J.

Page 136, dans la 5e colonne, vis-à-vis de 1761, *au lieu de* 74, *lisez* 741.

Page 147, *lisez*, C *corrigé*.

Page 148, *ajoutez au bas de la page cet avertissement* : Lorsque le nombre *A* étant entre 166 & 566, ou entre 1966 & 2366, le nombre *B* se trouve entre 200 & 300 ou entre 700 & 800, l'on peut voir les immersions & les émersions du second Satellite.

Page 164, dans la 3e colonne des demi-durées, l'on a mis en tête & au bas de la colonne, 1757; *il faut effacer* 1757 *& y substituer ce titre* : Demi-durée pour le cas où l'inclinaison seroit de $3^\circ 36'$.

Page 166, dans la 5e colonne, on a mis en tête la lettre *C*, il faut y mettre G.

Page 169, le dernier nombre est $5^h 10' 17''$, *lisez* $6^h 10' 17''$.

Page 177, dans le titre de la Table IV, *au lieu de* la Table I, *lisez* la Table III.

Page 178, dans le titre de la Table V, *au lieu des derniers mots*, à leur longitude moyenne & apparente, *lisez ceux-ci*, à leur longitude vraie, actuelle & apparente.

Ibid. dans l'argument de la Table VI, *on a mis* longitude de la lune, *lisez*, longitude du nœud de la lune.

Ib. au bas de la Table V, *au lieu de ces mots*, voyez la Table XII, *lisez ceux-ci*, cette Table est calculée dans l'ellipse, & n'a pas besoin de la correction de la Table XII, son argument est le lieu moyen du nœud. La formule est à l'art. 2876.

Page 179, Table VII, *la même observation a lieu.*

Page 180 & 181, au bas des Tables IX & X, *ajoutez ces mots* : Pour avoir la nutation dans l'ellipse, il faut que le lieu du nœud soit corrigé par la Table XI; & employer la correction de la Table XII aux nombres trouvés dans ces Tables IX & X. *Voyez* mon Astronomie (2879) Page 181, au bas de la Table XI, *lisez*, cette Table ne sert que pour l'usage des Tables IX & X.

Page 182, Table XII, dans les deux titres, où l'on a mis Tables V, VII, IX & X, *effacez* V, VII, parce que cette Table ne sert que pour corriger les Tables IX & X. Dans la même Table, vis à-vis de $1^s 2^\circ$, & au-dessous de 14, *lisez* $1'' 0$; vis-à-vis de $1^s 8^\circ$ & au-dessous de 10, *lisez* $0'' 9$; vis-à-vis de $11^s 20^\circ$ & au-dessous de 4, *lisez* $1'' 0$; vis à-vis de $11^s 0^\circ$, & au-dessous de 1, *lisez* $1'' 0$.

Page 183, Table XIII, vis-à-vis [illegible], & dans la colonne de l'aberration en latitude, le dernier nombre est $17'' 0$.

Page 184, dans le titre de la Table XIV, *après ces mots*, au temps de la plus grande aberration, *ajoutez* soustractive. Dans le titre de la Table XV, *au lieu de* 4 chiffres, *lisez* 3 chiffres, ou deux seulement si l'on veut avoir les dixièmes de secondes.

Pages 188, & suiv. jusqu'à la page 195, inclus. *ajoutez dans le titre de chaque page cet avertissement* : lorsque la déclinaison des étoiles est boréale, il faut augmenter de 6 signes l'argument trouvé dans cette Table. *Ce changement est essentiel.*

Page 190, au-dessous de 6° de déclinaison, le premier nombre doit être $5^s 15^\circ 13'$.

Fin des Additions & Corrections.

De l'Imprimerie de L. F. DELATOUR, 8 Juillet 1771.

